Matrices

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de K sont appelés des scalaires (ce sont des réels ou des complexes).
Lorsque cela n'est pas précisé, n , p , q et m sont des entiers naturels non nuls.

I Opérations sur les matrices.

1. Définitions

1Définition : Une matrice n lignes et p colonnes (ou de $type\ (n,p)$ ou $de\ type\ n \times p$) à coefficients dans K est un tableau n lignes et p colonnes remplies d'éléments de K .
On note $M_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices n lignes et p colonnes à coefficients dans K .

2 Notation : si A est une matrice n lignes et p colonnes à coefficients dans K alors on numérote les lignes de A de 1 à n et les colonnes de A de 1 à p et on note :

$a_{ij} = a_{\underbrace{i}_{\substack{premier\\ indice\\ =\\ indice\\ de\\ ligne}}\underbrace{j}_{\substack{deuxième\\ indice\\ =\\ indice\\ de\\ colonne}}}$ le scalaire rangé dans le tableau A qui se situe sur la ligne i et la colonne j .

A est notée : $A = (a_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$ ou $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1\,p-1} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2\,p-1} & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip-1} & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np-1} & a_{np} \end{pmatrix}$.

3 Exercice : Soit $A = (a_{kl})_{\substack{k\in[\![1,5]\!]\\ l\in[\![1,4]\!]}}$ telle que $\forall (k,l) \in [\![1,4]\!] \times [\![1,5]\!], a_{kl} = \begin{cases} kl & si\ k+l\ pair \\ \frac{1}{k} & sinon \end{cases}$. Ecrire A sous forme d'un tableau.

4 Définition : a_{ij} est un élément de K et est appelé **le coefficient ligne i colonne j de A**

Donc, a_{ji} est le coefficient ligne j et colonne i.

5 Définition : Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même dimension et les mêmes coefficients.

2. Matrices particulières

- La **matrice nulle,** n lignes p colonnes est la matrice, n lignes p colonnes dont tous les coefficients sont nuls. On la note $O\ ou\ (O)\ ou\ O_{n,p}$ s'il y a ambiguïté**.**
- **Une matrice carrée** est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes**. Une matrice A carrée d'ordre n** est une matrice carrée à n lignes, n colonnes. Les coefficients $a_{11}, a_{22}, .., a_{nn}$ constituent la **diagonale de A .**
- **La matrice identité d'ordre n** est la matrice carrée n lignes, n colonnes dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent 1. On la note I ou I_n.

  Exemple: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ....

6 $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$ tel que : $\delta_{ij} = \begin{cases} 0\ si\ i \neq j \\ 1\ si\ i = j \end{cases}$ (symbole de Kronecker).

- **Une matrice colonne** est une matrice ne comportant qu'une seule colonne.
- **Une matrice ligne** est une matrice ne comportant qu'une seule ligne.

7 Notation : dans la suite du cours, on notera souvent M_{ij} le coefficient ligne i colonne j de la matrice M.....
Par exemple, $(2A - BC)_{ij}$ est le coefficient ligne i et colonne j de $2A - BC$.
Cela évitera parfois d'introduire trop de lettres !!

3. Addition et multiplication par un scalaire.

8 Définition - Somme de deux matrices et multiplication d'une matrice par un scalaire :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$ deux matrices n lignes p colonnes à coefficients dans K et k un scalaire.

Par définition, $A + B$ et kA (ou $k.A$) sont les deux matrices n lignes p colonnes à coefficients dans K définies par:

$$A + B = (s_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}} \text{ et } k.A = (m_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}} \ telles\ que\ \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,p]\!], s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ \ et\ m_{ij} = k \times a_{ij}$$ ♥

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1\,p-1}+b_{1\,p-1} & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2\,p-1}+b_{2\,p-1} & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & a_{i3}+b_{i3} & \cdots & a_{ip-1}+b_{i\,p-1} & a_{ip}+b_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & \cdots & a_{n\,p-1}+b_{1\,p-1} & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k.A = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{np} \end{pmatrix}.$$

Si α *et* β sont deux scalaires, alors $\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \cdots & \alpha a_{1p} + \beta b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} + \beta b_{n1} & \cdots & \alpha a_{1p} + \beta b_{1p} \end{pmatrix} \in M_{n,p(K)}$ est <u>combinaison linéaire</u> de A et B

Généralisation : Une combinaison linéaire des matrices $A_1, \ldots, A_s$ de $M_{n,p}(K)$ est toute matrice de la forme $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_s A_s$ telle que $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ scalaires.

<u>NB :</u> On ne peut additionner ou faire des combinaisons linéaires que des matrices de même taille.

<u>9 Remarques:</u>

1. Si A *et* B sont des matrices n lignes p colonnes à coefficients dans K , *alors* $A + B$ *et* kA et $\alpha A + \beta B$ sont encore des matrices n lignes et p colonnes à coefficients dans K. On dit que $M_{n,p}(K)$ est stable par addition et multiplication par un scalaire et par combinaison linéaire.
2. La ligne i (resp. colonne j) de $A + B$ est égale la somme des lignes i (resp. colonnes j) de A et de B.
La ligne i (resp. colonne j) de kA est égale au produit de k et de la ligne i (resp. colonne j) de A.

10 Propriétés : premières règles de calcul. Soit A , B *et* C trois matrices de $M_{n,p}(K)$ et α *et* β deux scalaires .

1. $A + (B + C) = (A + B) + C \quad et \quad A + B = B + A$ — L'addition matricielle est associative et commutative.
2. $A + O_{np} = A + O_{np} = A$ — O_{np} est l'élément neutre de l'addition matricielle.
3. $A + (-1)A = O_{np}$ — $(-1)A$ notée $-A$ est le symétrique de A pour l'addition.
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ et $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ — La multiplication externe est distributive à gauche et à droite sur l'addition dans K.
5. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$ — L'associativité mixte entre multiplication externe et produit dans K.
6. $\alpha A = O \Leftrightarrow A = O$ ou $\alpha = 0$.

4. Produit matriciel

<u>11 Exemples</u>

$$\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underbrace{80}_{\substack{1\times5\\+2\times6\\+3\times7\\+4\times8}} \end{pmatrix}$$

Ils sont tout seuls !

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & (-1) \\ 7 & (-2) \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & (-2) & (-3) \\ (-1) & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Produit impossible! Ce produit n'existe pas.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & (-2) & (-3) \\ (-1) & 4 & 5 \\ 0 & 1 & (-5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 38 & -8 \\ 17 & 8 \\ 54 & -14 \\ (-29) & 9 \end{pmatrix}$$

12 Cas général

$$\overbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & \boldsymbol{b_{1j}} & \cdots & b_{1\,q-1} & b_{1q}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & \boldsymbol{b_{2j}} & \cdots & b_{2\,q-1} & b_{2q}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ b_{j1} & b_{j2} & b_{j3} & \cdots & \boldsymbol{b_{kj}} & \cdots & b_{j\,q-1} & b_{jq}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \cdots & \boldsymbol{b_{pj}} & \cdots & b_{p\,q-1} & b_{pq} \end{pmatrix}}^{B}$$

$\uparrow colonne\ j$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1\,p-1} & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2\,p-1} & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{a_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}} & \boldsymbol{a_{i3}} & \boldsymbol{\cdots} & \boldsymbol{a_{ik}} & \boldsymbol{\cdots} & \boldsymbol{a_{ip-1}} & \boldsymbol{a_{ip}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np-1} & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \quad \overleftarrow{ligne}\ \boldsymbol{i} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & & \\ & \boldsymbol{c_{ij}} & \\ & & \end{pmatrix}}_{AB}$$

tq $\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{i1}} \times \boldsymbol{b_{1j}} + \boldsymbol{a_{i2}} \times \boldsymbol{b_{2j}} + \cdots + \boldsymbol{a_{ip}} \times \boldsymbol{b_{pj}} = \sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{a_{ik} b_{kj}}$

13 Définition du produit matriciel .Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$ une matrice n lignes et p colonnes , $B = (b_{ij})_{\substack{i\in[\![1,p]\!]\\ j\in[\![1,q]\!]}}$ une matrice p lignes et q colonnes à coefficients dans K . Alors par définition $C = A \times B$, notée AB, est la matrice n lignes et q colonnes à coefficients dans K dont le coefficient c_{ij}, ligne i et colonne j, est : $\boldsymbol{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}}$. ♥♥

14 NB : on ne sait multiplier A par B que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B et on a la règle suivante : $\boldsymbol{type(n,p) \times type(p,q) = type(n,q)}$.

15 Cas particuliers : produit avec une matrice ligne ou colonne

$$\overbrace{\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ \vdots\\ b_p \end{pmatrix}}^{B}$$

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & \dots & C_j & \dots & C_{p-1} & C_p \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1\,p-1} & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2\,p-1} & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip-1} & a_{ip}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np-1} & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ c_i\\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{AB}$$

$tq\ \ c_i = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_k = \sum_{k=1}^{p} b_k a_{ik}$. Alors, $\boldsymbol{AB = \sum_{k=1}^{p} b_k C_k}$.

$$\overbrace{\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1\,q-1} & b_{1q}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2\,q-1} & b_{2q}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ b_{j1} & b_{j2} & b_{j3} & \cdots & b_{jk} & \cdots & b_{j\,q-1} & b_{jq}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \cdots & b_{pk} & \cdots & b_{p\,q-1} & b_{pq} \end{pmatrix} & \begin{matrix} L_1\\ L_2\\ \vdots\\ L_j\\ \vdots\\ L_p \end{matrix} \end{array}}^{B}$$

$et\ \underbrace{(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_p)}_{A} \quad \underbrace{\left(\qquad\qquad c_k \qquad\qquad \right)}_{AB}$ $tq\ \ c_k = \sum_{k=1}^{p} a_k\, b_{ki}$. i.e. $\boldsymbol{AB = \sum_{k=1}^{p} a_k L_k}$.

16 Règles de calcul : Soit $A, B\ C$ matrices et α scalaire. **Dès que les produits existent**, on a :

1. $(AB)C = A(BC)$ — Le produit matriciel est associatif.
2. $A(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)C = AC + BC$ — Le produit matriciel est distributif sur l'addition matricielle.
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ — L'associativité du produit mixte entre produits externe et matriciel.
4. $A(O) = O = (O)A$
5. $AI_p = A = I_n A$ — I_n est l'élément neutre du produit matriciel.

17 BILAN ET MISE EN GARDE : **Les règles de calcul sur les matrices sont presque les mêmes que dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$** sauf .....

ATTENTION Très souvent :

- AB existe mais BA n'existe pas. Même quand AB et BA existent, AB et BA n'ont pas forcément la même dimension.
- Même quand AB et BA existent et ont la même dimension, on a $\boldsymbol{AB \neq BA}$. ♥

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **Le produit matriciel n'est pas commutatif.**

Quand deux matrices vérifient $AB = BA$, on dit que ces deux matrices commutent......c'est rare.

- Il peut arriver que $AB = O$ avec $B \neq O$ et $A \neq O$. Donc, $\boldsymbol{AB = O \not\Rightarrow B = O \text{ ou } A = O}$. ♥ et $\boldsymbol{A^2 = 0 \not\Rightarrow A = 0}$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A$. **Le produit matriciel n'est pas intègre**

- Il peut arriver que $AB = AC$ et $B \neq C$ Donc, $\boldsymbol{AB = AC \not\Rightarrow B = C}$. ♥

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. **Certaines matrices n'ont pas d'inverse pour la multiplication et on ne divise par une matrice. On multipliera par A^{-1} lorsqu'elle existe.**

5. Transposition

18 Définition : Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!] \\ j\in[\![1,p]\!]}}$ une matrice de type (n, p). La matrice transposée de A est la matrice notée A^T de type (p, n) et définie par : le coefficient ligne i colonne j de A^T est égal au coefficient ligne j colonne i de A. Autrement dit, $A^T = (u_{ij})_{\substack{i\in[\![1,p]\!] \\ j\in[\![1,n]\!]}}$ telle que $u_{ij} = a_{ji}$. Autrement dit, $\forall (k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], (A^T)_{lk} = A_{kl}$.

19 Exercice : Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & (-1) \\ 7 & (-2) \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ alors $A^T = \cdots$ ...

20 Remarque : la ligne i de A^T est la colonne i de A et la colonne j de A^T est la ligne j de A.

21 Règles de calcul: Soit A et B deux matrices.

1. $(A^T)^T = A$.
2. Si A et B sont de même type et α, β des scalaires alors $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$.
3. Si AB existe alors $B^T A^T$ existe et $(AB)^T = B^T A^T$.

6. Matrices élémentaires.

22 Définition : Une matrice élémentaire est une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf un coefficient qui vaut 1. Dans $M_{n,p}(K)$ on note E_{ij} la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne i et colonne j qui vaut 1.

23 Propriété : Pour tous i et k dans $[\![1,n]\!]$ et tous j et l dans $[\![1,p]\!]$ $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

24 Théorème : Toute matrice M de $M_{n,p}(K)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des matrices élémentaires E_{ij} telle que $i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,p]\!]$. Et plus précisément, si $M = (m_{ij})$ alors $M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m_{ij}E_{ij}$.

II Matrices d'opérations élémentaires. Algorithme de Gauss-Jordan.

1. Opérations élémentaires sur les lignes

25 Définitions des opérations élémentaires et des matrices d'opérations élémentaires.

Les **opérations élémentaires sur les lignes** d'une matrice sont : échanger deux lignes de A (notée $L_i \leftrightarrow L_j$) multiplier une ligne par un scalaire non nul (notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$) et ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par un scalaire (notée $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$).

Deux matrices A et B sont équivalentes par lignes lorsque l'on passe de l'une à l'autre en faisant une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. Deux telles matrices sont nécessairement de même dimension. On note alors $A \sim_L B$.

26 Définitions des matrices d'opérations élémentaires.

Matrices de Transposition : Soit $i\ et\ j$ deux entiers de $[\![1,n]\!]$. On note T_{ij} la matrice obtenue en faisant subir $L_i \leftrightarrow L_j$ à I_n .

Matrice de Dilatation : Soit $i\ \in [\![1,n]\!]$ et $\lambda \in K^*$. On note $D_i(\lambda)$ la matrice obtenue en faisant subir $L_i \leftarrow \lambda L_i$ à I_n

Matrice de Transvection : Soit $i\ et\ j$ deux entiers distincts de $[\![1,n]\!]\ et\ \beta$ un scalaire. On note $H_{ij}(\beta)$ la matrice obtenue en faisant subir $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à I_n .

$$T_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & (0) & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & (0) & & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \underbrace{}_{i} & & & \underbrace{0}_{j} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array}$$

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & (0) & & \\ & \ddots & 1 & & & & & \\ & & & \lambda & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & (0) & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & \underbrace{}_{diag\ i} & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_{ij}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & (0) & & \\ & \ddots & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & \beta & & \\ & & & & 1 & & & \\ & (0) & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & \underbrace{}_{i} & & \underbrace{}_{j} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

27 Théorème : Soit A une matrice de type (n,p) . Soit $\lambda \in K^*, \beta \in K$ et $i \in [\![1,n]\!]\ et\ j \in [\![1,p]\!]\ tel\ que\ i \neq j.$

Faire subir $L_i \leftrightarrow L_j$ à A revient à multiplier A à gauche par T_{ij} (i.e. $T_{ij}A$ est la matrice obtenue en effectuant $L_i \leftrightarrow L_j$ sur A).

Faire subir $L_i \leftarrow \lambda L_i$ à A revient à multiplier A à gauche par $D_i(\lambda)$.

Faire subir $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ à A revient à multiplier A à gauche par $H_{ij}(\beta)$.

28 EN PRATIQUE : pour retrouver ses résultats, prenez une matrice A carrée d'ordre 4 et multiplier-la à gauche par T_{32} , par $D_3(\lambda)$ et par $H_{43}(\beta)$ puis à droite . Et vous regardez les effets sur A.

29 Conséquence : Faire subir à A une suite finie d'opérations élémentaires sur ses lignes revient à multiplier A à gauche par un nombre fini de matrices d'opérations élémentaires .

2. Algorithme de Gauss par des produits matriciels.

30 Définition d'une matrice échelonnée par lignes.

Une matrice A est dite échelonnée par lignes lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1) Si une ligne est nulle alors toutes les suivantes le sont aussi.

2) Si chaque ligne non nulle débute par davantage de zéros que la ligne précédente.

Les pivots d'une telle matrice échelonnée sont les réels non nuls qui débutent les lignes non nulles.

31 Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ scalaires non nuls. A est échelonnée par ligne, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont ses pivots.

32Définition d'une matrice échelonnée réduite par lignes et du rang d'une telle matrice.

Une matrice A est échelonnée réduite par lignes lorsque :

Ou bien elle est nulle Par convention $rg(A) = 0.$

Ou bien elle est échelonnée, que tous ses pivots valent 1 et que sur la colonne de chaque pivot tous les coefficients autres que le pivot sont nuls. Alors il existe un entier r compris entre 0 et n telle que A contienne r lignes non nulles et $n - r$ lignes nulles.

Alors, Lorsque A est échelonnée réduite le rang de A est $rg(A) = r = nbre\ de\ lignes\ non\ nulles\ de\ A$

33Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite par lignes et $rg(A) = 3$.

34 Théorème de Gauss-Jordan.

1. Toute matrice est équivalente par lignes à une matrice échelonnée par ligne et à une unique matrice échelonnée réduite par ligne.

2. Soit A une matrice de type (n,p) . Il existe une unique matrice R échelonnée réduite par ligne de type (n,p) et une matrice P, carrée d'ordre n et produit de matrices d'opérations élémentaires, telles que : $A = PR$.

35 Définition : Soit A une matrice de type (n,p).

Le rang de A est le rang de la matrice R échelonnée et réduite par ligne , équivalente par lignes à A. $rg(A) = rg(R)$.

36 Conséquences .

1) Le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de ses pivots.

2) Deux matrices équivalentes par ligne ont le même rang.

3) Le rang d'une matrice A est égal au nombre de pivots de toute matrice échelonnée équivalente par ligne à A

4) Soit A une matrice carrée d'ordre n. $rg(A) = n$ sietssi A est équivalente par lignes à I_n.

37 Exemple : Soit $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient ligne i est $c_i = i$ et $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$telle que : $a_{ij} = \frac{i}{j}$ .Calculer A^2,$rg(A)$ et Calculer AC. Résoudre $AX = C$.

3. Application à la résolution de systèmes linéaires

38 Soit le système linéaire (S): $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ d'inconnue $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in K^p$.

1. Les scalaires a_{ij} sont appelés les coefficients de (S) et $b_1, \dots, b_n$ le second membre.
2. (S) est échelonné lorsque en passant d'une ligne de (S) à la suivante, au moins une inconnue « disparait » (cette inconnue disparue a en fait son coefficient nul).
3. (S) est de Cramer lorsque $n = p$ et (S) admet une unique solution.
4. (S) est compatible lorsque (S) admet au moins une solution. (S) est incompatible lorsque (S) n'admet aucune solution.
5. A ce système (S) , on associe
   - le système linéaire homogène (SH): $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$
   - $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients de (S).Par définition, $le\ rang\ de\ (S) = rg(S) = rg(A)$.
   - $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice du second membre de (S).
6. Opérations élémentaires et réversibles sur (S) :
   - échanger deux lignes de (S) (notée $L_i \leftrightarrow L_j$)
   - multiplier une ligne de (S) par un scalaire non nul (notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$)
   - ajouter à une ligne de (S) une autre ligne de (S) multipliée par un scalaire(notée $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$).
7. Deux systèmes linéaires (S) et (S') sont équivalents lorsqu'on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires. On note alors $(S) \Leftrightarrow (S')$

39 Propriété :

1. Deux systèmes équivalents ont les mêmes solutions.
2. En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $[(S) \Leftrightarrow AX = B]$ et $[(SH) \Leftrightarrow AX = 0]$.
3. (S) est échelonnée dès que sa matrice A est échelonnée.
4. Echelonner A en lignes et faire en parallèle les mêmes opérations sur le second membre B permet d'échelonner (S).

40Théorème : Si X_0 est une solution particulière de (S) alors les solutions de (S) sont toutes les matrices de la forme $X_0 + Y$ où Y solution de (SH).

41 Théorème de Gauss-Jordan. Tout système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné.

42 Propriété : Un système linéaire (S) est de Cramer sietssi (S) est un système à n équations et n inconnues et $rg(S) = n$.

4. Et en colonnes ?

43 Théorème : Soit A une matrice de type (n, p) .

Faire subir $C_i \leftrightarrow C_j$ à A revient à multiplier A à droite par T_{ij} .

Faire subir $C_i \leftarrow \lambda C_i$ à A revient à multiplier A à droite par $D_i(\lambda)$.

Faire subir $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ à A revient à multiplier A à droite par $H_{ij}(\lambda)$.

44 Théorème : Soit A une matrice de type (n,p) . Il existe une unique matrice V échelonnée réduite par colonne $^{(**)}$ de type (n,p) et une matrice inversible Q , carrée d'ordre n et produit de matrices d'opérations élémentaires, telles que : $A = VQ$.

(**) cela signifie que : Soit V est nulle (ce qui signifierait que A est nulle) - Soit V vérifie : 1)si l'une de ses colonnes est nulles toutes les suivantes le sont aussi
2) chaque colonne débute par davantage de 0 que la précédente.
3) chaque colonne non nulle a son premier coefficient non nul égal à 1 appelé pivot
4) le pivot est le seul élément non nul de sa ligne.

45 Théorème (admis): Avec les notations des théorèmes 44 et 33 $rgA = rgR = rgV$.

46 Csq : On peut échelonner une matrice en ligne et/ou en colonne pour obtenir son rang et
$\boldsymbol{\forall A \in M_{n,p(K)}, rg(A) = rg(A^T) \leq min(n,p)}$.

III Matrices carrées . Ensemble $M_n(K)$.

1. Définition. Opérations. Premières règles de calcul.

47 Définitions : Une matrice $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n à coefficients dans K est une matrice n lignes et n colonnes à coefficients dans K. Les coefficients $a_{11}, a_{22}, .., a_{nn}$ constituent la diagonale de A .
On note $\boldsymbol{M_n(K)}$ (et non $M_{n,n}(K)$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K.

48 NB : D'après ce qui précède, toute somme, combinaison linéaire et tout produit de matrices carrées d'ordre n sont des matrices carrées d'ordre n. **Toutes les règles de calcul vues précédemment s'appliquent dans** $\boldsymbol{M_n(K)}$. Donc,
$M_n(K)$ est stable par combinaison linéaire, par addition matricielle, par multiplication externe et par produit matriciel.

49 Définition : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K . La **trace de A** ,notée $tr(A)$,est la somme des coefficients de la diagonale de A. Autrement dit, $tr(A) = a_{11} + a_{22} + .. + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

50 Propriétés de la trace A SAVOIR DEMONTRER :
Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n et α et β deux scalaires.
1. $tr(\alpha A + \beta B) = \alpha tr(A) + \beta tr(B)$
2. $tr(A^T) = tr(A)$
3. $tr(AB) = tr(BA)$.

50 bis Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B carrées d'ordre n telles que $AB - BA = I_n$.

51 A SAVOIR DEMONTRER : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice rectangulaire de type (n,p).
Alors, $tr(AA^T) = \sum_{\substack{i \in \{1,..,n\} \\ j \in \{1,..,p\}}} (a_{ij})^2 = somme\ des\ carrés\ de\ tous\ les\ coefficients\ de\ A$.

52 Exercice : Montrer que si A est une matrice à coefficients réels alors : $A = 0 \Leftrightarrow tr(AA^T) = 0$. Que se passe-t-il si A est à coefficients complexes ?

2. Matrices carrées particulières

53 Rappel : On note O ou O_n la matrice carrée d'ordre n nulle et I ou I_n la matrice identité d'ordre n.

a) Matrices diagonales

54 Définition : Soit $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n. A est diagonale lorsque tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls ie. pour tous entiers $i \neq j$, $a_{ij} = 0$. On note parfois $A = diag(a_{11}, a_{22}, .., a_{nn})$.
On note $\boldsymbol{D_n(K)}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K diagonales .

55 Exemple : O_n et I_n sont diagonales.

56 Propriétés : Soit α et β deux scalaires. Si $D = diag(d_1, d_2, .., d_n)$ et $L = diag(\delta_1, \delta_2, .., \delta_n)$ alors $\alpha D + \beta L = diag(\alpha d_1 + \beta\delta_1, \alpha d_2 + \beta\delta_2, .., \alpha d_n + \beta\delta_n)$ et $DL = diag(\delta_1 d_1, \delta_2 d_2, .., \delta_n d_n)$.
Par conséquent, toute combinaison linéaire et tout produit de deux matrices diagonales carrées d'ordre n sont des matrices diagonales carrées d'ordre n. $D_n(K)$ est donc stable par combinaison linéaire (en particulier par somme et multiplication par un scalaire) et par produit.

57 Exercice. Soit $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$avec tous les λ_k distincts. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que : A et D commutent si et ssi A est diagonale.

b) Matrices triangulaires

58 Définitions : Soit $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n. A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) lorsque tous ses coefficients en dessous (resp. au dessus) de la diagonale sont nuls ie. pour tous entiers $i > j\ (resp\ i < j), a_{ij} = 0$.
On note $TS_n(K)\ (resp\ TI_n(K))$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K et triangulaires supérieures (resp. inférieures) .

59 Remarques : 1. $Si\ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure alors $A^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}$ triangulaire inférieure.
2. Les matrices diagonales sont les matrices triangulaires supérieures et inférieures à la fois.

60 Propriétés Toute combinaison linéaire et tout produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) carrées d'ordre n sont des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) carrées d'ordre n .
Et, Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix} et\ B = \begin{pmatrix} \delta_1 & * & \cdots & * \\ & \delta_2 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \delta_n \end{pmatrix}$ alors $AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\delta_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2\delta_2 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \lambda_n\delta_n \end{pmatrix}$.
$TS_n(K)\ (resp\ TI_n(K))$ est donc stable par combinaison linéaire (en particulier, par somme et multiplication par un scalaire) et par produit.

c) Matrices (anti)symétriques

61 Définitions : Soit $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n.
1. A est symétrique lorsque $A^T = A$ ie $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = a_{ji}$.
2. A est anti-symétrique lorsque $A^T = -A$ ie $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = -a_{ji}$.
On note $S_n(K)\ (resp\ AS_n(K))$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K symétriques (resp. anti-symétriques) .

62 Exemples : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ symétrique et $B = \begin{pmatrix} 0 & -b & -c \\ b & 0 & -e \\ c & e & 0 \end{pmatrix}$ anti-symétrique. Toute matrice diagonale est symétrique.

63 Exercice Montrons que pour toute matrice $carrée\ A, \frac{1}{2}(A + A^T)\ et \frac{1}{2}(A - A^T)$ est symétrique $et \frac{1}{2}(A - A^T)$ est antisymétrique.
Montrons que pour toute matrice A (pas nécessairement carrée), $AA^T\ et\ A^TA$ sont symétriques.

64 Propriétés : La matrice nulle est la seule matrice symétrique et antisymétrique.
La diagonale d'une matrice anti-symétrique est nulle .

65 Propriétés Toute combinaison linéaire de matrices symétriques (resp. anti-symétriques) carrées d'ordre n est symétrique (resp. anti-symétrique) carrée d'ordre n .
$S_n(K)\ (resp\ AS_n(K))$ est donc stable par combinaison linéaire (par somme et multiplication par un scalaire).

66Attention : $S_n(K)$ et $AS_n(K)$ ne sont pas stables par produit matriciel car $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 5 \\ 10 & * \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

67 Théorème : Toute matrice M carrée d'ordre n s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique Cette écriture est : $M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^T)}_{symétrique} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^T)}_{anti-symétrique}$.

3. Puissances d'une matrice carrée.

68 Définition Soit $A \in M_n(K)$. Par convention, $A^0 = I_n$.
Par définition, pour tout entier naturel p non nul , $A^p = A^{p-1}A = AA^{p-1} = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p\ fois}$.
Si $P(X) = a_0 \underbrace{1}_{=X^0} + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_pX^p \in K[X]$ alors par définition, $P(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_pA^p$. P est un polynôme annulateur de A lorsque $P(A) = O$.

69NB :
1) $A^p et\ P(A)$ sont alors des matrices carrées d'ordre n .
2) Si tel que $P = Q + R$ (resp. $P = QR$) où $(Q, R) \in K[X]^2$ alors $P(A) = Q(A) + R(A)$ (resp. $P(A) = Q(A)R(A)$).

70 Exemples à connaitre : Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Soit A une matrice carrée d'ordre n et α un scalaire. Alors, $(\alpha A)^p = \alpha^p A^p$.
2. Si $(A,B) \in M_n(K)^2$ tq $A\ et\ B$ commutent ie $AB = BA$ alors $\alpha A\ et\ \beta B\ commutent\ où\ (\alpha,\beta) \in K^2 et\ \ (AB)^p = A^p B^p$.
3. Si $D = diag(\delta_1, \delta_2, .., \delta_n)$ alors $D^p = diag({\delta_1}^p, {\delta_2}^p, .., {\delta_n}^p)$.
4. $(I_n)^p = I_n\ et\ \ (\alpha I_n)^p = \alpha^p I_n$
5. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K)$. Alors $\forall p \in \mathbb{N}^*, J^p = n^{p-1}J$. **Attention non valable pour $p = 0$.**

71 Définition : Une matrice carrée N est dite nilpotente lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $N^p = O_n$.
Le plus petit entier naturel p tel que $N^p = O_n$ s'appelle l'indice de nilpotence. (on a nécessairement $N^p = O_n\ \ et\ N^{p-1} \neq O_n$).

72 NB : Si N est une matrice nilpotente et $\alpha \in K$ alors αN est nilpotente car $(\alpha N)^p = \alpha^p N^p$

72bis Exemples à connaitre : 1) Toute matrice carrée d'ordre n de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ & 0 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$ ou $N = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ * & 0 & & \\ & & \ddots & \\ * & & * & 0 \end{pmatrix}$ (ie. N triangulaire avec diagonale nulle) est nilpotente d'indice au plus n.

73 Proposition : Formule du binôme de Newton et formule de factorisation.
$A\ et\ B$ sont deux matrices carrées d'ordre n et p est un entier naturel.
Si $A\ et\ B$ commutent ie. $AB = BA$ alors $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$
et si, de plus, $p \neq 0$ alors $A^p - B^p = (A-B)\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\right) = (A-B)\left(\sum_{k=0}^{p-1} B^k A^{p-1-k}\right)$.

74 Cas particulier, pour toute matrice carrée A, $(I+A)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k$et si, de plus, $p \neq 0$ alors $I - A^p = (I-A)\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right)$.

75 Quelques méthodes pour obtenir les puissances d'une matrice carrée M :
76Ou bien : on calcule quelques itérés M^2, M^3, M^4 pour voir si une formule apparaît. On démontre la conjecture par récurrence.

Exercice : $Soit\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^n\ tq\ n \in \mathbb{N}$.

77Ou bien : on décompose M comme somme de deux matrices qui commutent et dont on sait calculer les puissances (matrices diagonales , $J = (1)$, matrices nilpotentes …). Puis, on applique la formule de binôme de Newton. (Cf exemple 50)

Exercice : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer $M^p tq\ p \in \mathbb{N}$.

Exercice : $Soit\ A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer $A^p tq\ p \in \mathbb{N}$.

78Ou bien : il existe un polynôme P annulateur de M i.e. un polynôme P tq $P(M) = 0$.

79SOIT : Je cherche le reste R de la division euclidienne de X^p par P.
Alors, $X^p = P(X)Q(X) + R(X)\ donc\ M^p = \underbrace{P(M)}_{=0} Q(M) + R(M) = R(M)$.

Exercice : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $P(t) = (t-1)(t+2)$. Calculer $P(A)$.En déduire A^p tq $p \in \mathbb{N}$.

80 SOIT : la relation $P(M) = 0$ permet d'obtenir un M^d d'écrire comme combinaison linéaire des premiers itérés de M :par exemple $P(M) = 2M^4 + 4M^3 - M^2 + M - 2I = 0$. Donc, $M^4 = -2M^3 + \frac{1}{2}M^2 - \frac{1}{2}M + I$. On montre alors par récurrence que $\forall k, \exists (a_k, b_k, c_k, d_k) \in \mathbb{R}^4 / M^k = a_k M^3 + b_k M^2 + c_k M + d_k I$ et on essaie d'établir des relations de récurrence vérifiées par les suites $(a_k), (b_k), (c_k), (d_k)$. On essaiera ensuite de trouver une expression explicite de $(a_k), (b_k), (c_k)\ et (d_k)$.

Exercice Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 1) Ecrire A^2 comme combinaison linéaire de $A\ et\ I$.
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels $u_n\ et\ v_n$tels que : $A^n = u_n A + v_n I$.
3) A l'aide des suites $\alpha\ et\ \beta$ telles que $\alpha_n = 2u_n + v_n\ \ et\ \beta_n = u_n - v_n$, exprimer $u_n\ et\ v_n$ en fonction de n puis donner A^nsous forme d'un tableau matriciel.

81 Ou bien on effectue un « **changement de base** » en trouvant une matrice inversible P telle que : $M = PDP^{-1}$ et D est une matrice dont on sait calculer les puissances ou itérés. Alors, $M^k = PD^kP^{-1}$(Cf paragraphe suivant).

IV Matrices carrées inversibles. Ensemble $GL_n(K)$.

1. Définition

82 Définition : La matrice A carrée d'ordre n est inversible lorsqu'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que : $AB = I_n = BA$.
Une telle matrice B est unique, s'appelle l'inverse de A et on note $B = A^{-1}$.
Ainsi, lorsque A^{-1}existe, elle vérifie $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$.
On note $\boldsymbol{GL_n(K)}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K et inversibles.
NB : une matrice non carrée n'est jamais inversible !

83 Applications : résolution d'équations matricielles, de systèmes linéaires.
Si A est inversible alors : $AB = AC \iff B = C$
Si A est inversible alors : $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$

2. Exemples importants

84 Exemples à connaitre . ❤️ ❤️ :

1. I_n est inversible et $I_n = {I_n}^{-1}$. O_n n'est pas inversible .
2. Toute matrice d'opération élémentaire est inversible et

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \forall \lambda \in K^*, \forall \beta \in K,\quad {T_{ij}}^{-1} = T_{ij},\quad D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)\quad et\quad H_{ij}(\beta) = H_{ij}(-\beta)$

3. Si $A\ et\ B$ sont non nulles et vérifient $AB = O_n$ alors ni A ni B n'est inversible (valable si A ou B n'est pas carrée).

Ou encore s'il existe B non nulle telle que $AB = O_n$ alors A n'est pas inversible

4. Si une ligne (resp. colonne) de A est combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes) de A alors A n'est pas inversible. En particulier, si A contient une ligne ou une colonne nulle alors A n'est pas inversible.
5. Une matrice nilpotente N (telle que $N^p = 0$) n'est pas inversible mais $I \pm \beta N$ est inversible et $(I - N)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} N^k\right)$.
6. S' il existe un polynôme P non constant tel que $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + .. + a_p A^p = O_n$ et $a_0 \neq 0$ alors A est inversible et $A^{-1} = -\left(\frac{a_1}{a_0} I_n + \frac{a_2}{a_0}\ A + .. + \frac{a_p}{a_0}\ A^{p-1}\right)$.
7. Soit $D = diag(\delta_1, \delta_2, .., \delta_n)$ matrice diagonale.

D est inversible si et ssi $\forall i \in [\![1,n]\!], \delta_i \neq 0$. Le cas échéant, $D^{-1} = diag\left(\frac{1}{\delta_1}\ ,\frac{1}{\delta_2}\ , .., \frac{1}{\delta_n}\right)$.

8. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors, A est inversible $\iff \underbrace{ad - cb}_{\substack{\det(A)= \\ determinant\ de\ A}} \neq 0$. Et le cas échéant, $A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
9. Soit T triangulaire. Alors T est inversible sietssi sa diagonale n'a pas de 0. Et le cas échéant, T^{-1}est triangulaire.

RQUE : S'il existe $P = \sum_{k=1}^{p} a_k X^k = XQ(X)$ tel que : P non constant, $a_0 = 0,\ P(A) = O\ et\ Q(A) \neq O$ alors A n'est pas inversible d'après 3.

3. Opérations sur les matrices inversibles

85 Propriétés : Inverse, produit et transposée de matrices inversibles.
Soit $P\ et\ Q$ deux matrices carrées d'ordre n, α scalaire <u>non nul</u> et k un entier naturel.
Si $P\ et\ Q$ sont inversibles alors $P^{-1}, \alpha P$, P^T , PQ et P^k sont inversibles et
$(P^{-1})^{-1} = P\ et\ (\alpha P)^{-1} = \frac{1}{\alpha} P^{-1}$, $(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$, $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}\ et\ (P^k)^{-1} = (P^{-1})^k$.

<u>**86 NB**</u> **Une somme ou combinaison linéaire de matrices inversibles n'est pas forcément inversible.** $\not\subset$ex $\underbrace{I_n}_{inversible} + \underbrace{(-I_n)}_{inversible} = \underbrace{O}_{\substack{non \\ inversible}}$.

<u>86bis</u>**Contraposée :** si AB n'est pas inversible alors A ou B n'est pas inversible et par suite si A est inversible et AB ne l'est pas alors B ne l'est pas.

87 $\boldsymbol{GL_n(K)}$ n'est pas stable par addition ni combinaison linéaire mais est stable par produit et passage à l'inverse.

<u>**88 Définition**</u> : Lorsque P est inversible, on définit $P^{-k}\ avec\ k \in \mathbb{N}$ de la manière suivante : $P^{-k} = (P^{-1})^k$. Et d'après ce qui précède, $P^{-k} = (P^{-1})^k = (P^k)^{-1}$. Ainsi si P est inversible alors on donne un sens à toutes les puissances $P^k\ avec\ k \in \mathbb{Z}$.

<u>**89 Un résultat très utile à comprendre et savoir retrouver :**</u> Si $A = P^{-1}BP$ alors $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P^{-1}B^kP$; si, de plus, B est inversible alors A est inversible et $\forall k \in \mathbb{Z}, A^k = P^{-1}B^kP$.

4. Caractérisations d'une matrice inversible.

89Lemme : Soit A une matrice de type (n,p) . Il existe une unique matrice R échelonnée réduite par ligne de type (n,p) et une matrice inversible P, carrée d'ordre n et produit de matrices d'opérations élémentaires, telles que : $A = PR$.

Démo : D'après le théorème de Gauss Jordan, il existe un unique matrice R échelonnée réduite par ligne équivalente par ligne à A ie. obtenue en faisant une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de A. Cette suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de A se traduit par un produit à gauche de A par une suite finie de matrices d'opérations élémentaires notées $P_1, P_2 \dots, P_m$. Ainsi $R = \underbrace{P_1P_2 \dots P_m}_{=Q} A = QA$ où Q est inversible car $P_1, P_2 \dots, P_m$ le sont.

Alors $A = \underbrace{Q^{-1}}_{=P} R$.

90 Théorème de caractérisation de l'inversibilité ❤️ ❤️ : Soit A une matrice carrée d'ordre n

(a) A est inversible *si et ssi* il existe une matrice B telle que $BA = I_n$ (b).

A est inversible *si et ssi* le système $AX = 0$,d'inconnue $X \in M_{n,1}(K)$, a une unique solution (qui est $X = 0_{n,1}$) (c)

A est inversible *si et ssi* $rg(A) = n$ (d)

A est inversible *si et ssi* $A \sim_L I_n$ (e)

A est inversible *si et ssi* A est un produit fini de matrices d'opérations élémentaires. (f)

90bis Par contraposée : A n'est pas inversible *si et ssi* il existe une matrice colonne X non nulle telle que $AX = O$.

91 Conséquence : Soit M une matrice n lignes et p colonnes et P *et* Q deux matrices carrées inversibles d'ordre n *et* p .
Alors $rg(M) = rg(PM) = rg(MQ)$. Autrement dit, multiplier une matrice par une matrice inversible ne change pas son rang.

Démo : Soient P et Q carrées d'ordre n et p et inversibles. Alors P et Q sont des produits finis de matrices d'opérations élémentaires. Donc multiplier M à gauche par P revient à faire une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de M et multiplier M à droite par Q revient à faire une suite finie d'opérations élémentaires sur les colonnes de A. Donc PM et MQ ont le même rang que M.

92 Théorème : A est inversible *si et ssi* il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ **ou** $BA = I_n$.

93 Théorème :

1. A est inversible *si et ssi* l'un des systèmes linéaires associés à A est de Cramer.
2. A est inversible *si et ssi* tout système linéaire associé à A est de Cramer.
3. A est inversible *si et ssi* pour toute matrice colonne Y, le système $AX = Y$ a une unique solution. Le cas échéant, l'unique solution de $AX = Y$ est alors, $X = A^{-1}Y$.

94 Théorème : Soit A une matrice carrée d'ordre n .
A n'est pas inversible *si et ssi* l'une de ses lignes (resp. colonnes) est combinaison linéaire de ses autres lignes (resp. colonnes).

Démo : A n'est pas inversible

sietssi il existe une matrice colonne X non nul tq $AX = O$ $\underbrace{sietssi}_{\substack{en\ posant\ B \\ la\ matrice \\ dont\ toutes\ les \\ colonnes\ valent\ X.}}$ il existe une matrice carrée B non nulle tq $AB = O$.

$$sietssi\ \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K) / l'un\ x_j\ est\ non\ nul\ et\ \sum_{i=1}^{n} x_i C_i = 0$$

$$sietssi\ \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K), \exists j \in [\![1,n]\!] / x_j \neq 0\ \ et\ \ x_j C_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} x_i C_i\ .$$

$$sietssi\ \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K), \exists j \in [\![1,n]\!] / x_j \neq 0\ \ et\ \ C_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x_i}{x_j} C_i\ .$$

$$sietssi\ \exists (\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, .., \lambda_n) \in K^{n-1} /\ C_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_i C_i\ .$$

ssietssi l'une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres colonnes de A.

A n'est pas inversible *sietssi* (A^T) n'est pas inversible

ssietssi i l'une des colonnes de A^T est combinaison linéaire des autres colonnes de A^T.

ssietssi l'une des lignes de A est combinaison linéaire des autres lignes de A.

5. Méthodes pratiques pour savoir si une matrice carrée A est inversible et le cas échéant, calculer son inverse.

95 En pratique : pour prouver que A est inversible et le cas échéant, trouver A^{-1}.

- **96 OU BIEN** L'énoncé donne l'expression de A^{-1}. On nomme B la matrice proposée. Dans ce cas, on vérifie simplement que $AB = I_n$. Alors on peut conclure que A est inversible et $A^{-1} = B$.
- **97OU BIEN** A a l'une des formes suivantes : diagonale, carrée d'ordre 2, nilpotente, égale à $I \pm N$ avec N nilpotente, produit de deux matrices inversibles, transposée ou puissance d'une matrice inversible. Alors je sais dire si A est inversible ou non et je sais donner A^{-1}lorsqu'elle existe.
- **98OU BIEN** L'énoncé propose de vérifier que $P(A) = 0$ avec P polynôme. Alors je vais conclure suivant la valeur du terme constant de P .

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $(A+I)^3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} comme combinaison linéaire de A^2 , A et I .
Que peut –on dire de $A+I$? Retrouver alors par une autre formule l'expression de A^{-1} ?

- **99OU BIEN** L'énoncé ne donne que la matrice A . Je cherche à savoir si A est inversible ou non et le cas échéant à déterminer A^{-1}. Je peux calculer $det(A)$ (Cf paragraphe suivant) pour savoir si A est inversible mais cela ne donnera pas l'expression de A^{-1}. Je peux répondre aux deux questions en même temps en appliquant l'une deux méthodes suivantes au choix :

✓ **100Première méthode :** Je prends $Y = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ quelconque. Je résous le système $AX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

- Dès que le système a une équation de compatibilité i.e. $rg(A) \leq n-1$ (i.e. pour certains Y le système n'a aucune ou a plein de solution) alors A n'est pas inversible.
- Si $rg(A) = n$ $i.e.$ pour tout Y, le système a une unique solution X alors A est inversible et je lis A^{-1}en écrivant la solution du système sous la forme $X = A^{-1}Y$. (on a $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$)

Exercice : Montrons que $P = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

✓ **101Deuxième méthode :** J'échelonne la matrice A en opérant sur ses lignes et je fais en parallèle les mêmes opérations sur I_n.

En effet, il existe une unique matrice échelonnée réduite par lignes telle que : $A \sim_L R$. Je vais faire des opérations élémentaires sur les lignes de A pour obtenir R et en parallèle je fais ces mêmes opérations sur I_n. J' obtiens alors une matrice Q carrée d'ordre n telle que $I_n \sim_L Q$.

- Si $R \neq I_n$ alors A n'est pas inversible.
- Si $R = I_n$ alors A est inversible et il existe P inversible telle que $PA = R = I_n$ avec P produit des matrices des opérations élémentaires effectuées pour passer de A à R. Ainsi, $P = A^{-1}$. Ayant fait subir à I_n les mêmes opérations, j'ai donc $PI_n = P$. Alors, $P = A^{-1}$.

A^{-1} est alors la matrice obtenue en faisant subir à I_n les mêmes opérations que celles faites pour transformer A en I_n.

Exercice : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrons que A est inversible et trouver A^{-1}.

- **102OU BIEN** Si $A = PDP^{-1}$et D est une matrice inversible alors A est inversible et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Montrer que : $AP = PD$. En déduire A^poù $p \in \mathbb{Z}$.

103 En pratique : pour prouver que A est inversible, on pourra aussi calculer $rg(A)$ ou $det(A)$. (Cf chapitre suivant !). Par contre, cela ne donne pas l'expression de A^{-1}.

6. Matrices équivalentes. Matrices semblables.

104 Définition : Soit A et B deux matrices de même taille.
On dit que A est équivalente à B lorsqu'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PBQ$. On note $A \sim B$.
On dit que A est semblable à B lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.

105 Propriétés : Deux matrices semblables sont équivalentes. Deux matrices équivalentes ont le même rang.
Toute matrice est semblable (resp. équivalente) à elle-même. Si A est semblable (resp. équivalente) à B alors B est semblable (resp. équivalente) à A. A est semblable (resp. équivalente) à B et B est semblable (resp. équivalente) à C alors A est semblable (resp. équivalente) à C.
Deux matrices semblables ont le même déterminant (Cf chapitre suivant) .