TD 16

Systèmes linéaires et Matrices

Systèmes linéaires.

Ex 0

A. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. On note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A.

En remarquant que $C_1 = -C_3$, vous déterminerez :

1. une matrice colonne X telle que $AX = 0$.
2. le rang de A.

B. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$. Trouver rapidement :

1. $rg(A)$.
2. deux matrices colonnes X telles que $AX = O$.
3. deux matrices lignes L telles que $LA = O$.
4. les solutions du système linéaire $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. les solutions du système linéaire $AX = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix}$.
6. Une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que le système linéaire $AX = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ soit compatible.

C. Soit (S) un système n équations et n inconnues dont la matrice des coefficients est A. Justifier l'équivalence :
(S) est de Cramer sietssi $rg(A) = n$.

Ex 1 Des systèmes linéaires

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 8 & -9 & 13 \end{bmatrix}$ $et\ Y = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Résoudre le système $AX = Y$, d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ en fonction de a, b et c. Donner ensuite les solutions pour $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ puis $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$. Déterminer le rang de la matrice des coefficients.
2. Soit λ un paramètre réel et $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Résoudre le système $AX = \lambda X$, d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ en fonction de λ.
   Déterminer le rang de la matrice des coefficients en fonction du paramètre.
3. Soit m un paramètre réel. Résoudre $\begin{cases} -x + my + z = 1 \\ -2x + my - z - mt = -1 \\ 3x - 4y + 2z + 5t = 2 \end{cases}$, d'inconnue $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, en fonction de m.
   Déterminer le rang de la matrice des coefficients en fonction du paramètre.
4. Soit a un paramètre réel et $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$. Résoudre $AX = 0$, d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$, en fonction de a. Déterminer le rang de la matrice des coefficients en fonction du paramètre.
5. Soit m un paramètre réel. Résoudre $\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ d'inconnue $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en fonction de m. Déterminer le rang de la matrice des coefficients en fonction du paramètre.
6. Soit m un paramètre réel. Résoudre $\begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ 3x + 2y + mz = 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z = m \end{cases}$, d'inconnue $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le rang de la matrice des coefficients en fonction du paramètre.

Matrices symétriques-antisymétriques. Transposition et trace.

Ex 2 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de M ?
2. Ecrire M sous la forme $S + A$ avec S symétrique et A anti-symétrique.
3. Déterminer toutes les matrices P telles que : $2P - 3P^T = M$.

Ex 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quel est le rang de A? Déterminer toutes les matrices L triangulaires inférieures telles que : $LL^T = A$.

Ex 4 Montrer qu'il n'existe aucunes A et B carrées d'ordre n telles que $AB - BA = I_n$.

Ex 5 Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que $A^T A = O_n \Leftrightarrow A = O_n$.
2. Montrer que $A^T A = I_n \Longrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} {a_{ij}}^2 = n$.

Puissances de matrices par conjecture et récurrence

Ex 6 Soit $a \in \mathbb{R}\ et\ \ A = \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3, A^4, A^5 . Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Faire de même avec , $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ex 7 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}\ et\ \ A \in M_n(\mathbb{R})\ tq\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ?
2. Calculer $A^{n-1}\ et\ A^n$.
3. En déduire que $\forall \lambda \in \mathbb{N},\ \ I + \lambda A$ est inversible et exprimer $(I + \lambda A)^{-1}$comme combinaison linéaire de $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$.

Ex 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une suite u telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 - 2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1 + u_n \end{pmatrix}$.
2. Expliciter A^n en fonction de n .

Ex 9 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux suites a et b telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} - b_{n+1} - 20b_n = 0$.
3. Puis expliciter M^n en fonction de l'entier n .

Ex 10 Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$. Calculer $A^k + A^{-k}$ tel que $k \in \mathbb{N}$.

Ex 11 Soit $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \{1,2,3\}, A^k = B + kC$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = B + kC$.

Puissances de matrices grâce à la formule du binôme de Newton.
Inverse d'une matrice grâce à des matrices nilpotentes ou grâce à un polynôme annulateur.

Ex 12 Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer B^n avec pour $n \in \mathbb{Z}$. Quel est le rang de B^n ?
2. Montrer que B est inversible et déterminer B^{-1}.

Ex 13 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer les puissances de A et de celles de $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 6 & -4 \end{pmatrix}$
2. Montrer que B est inversible et calculer B^k tel que $k \in \mathbb{Z}$.
3. Déterminer l'inverse de $I + A$.

Si $(A, B) \in M_n(K)\ et\ AB = BA$ alors $\forall N \in \mathbb{N}$,
$(A + B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$.

$$B^{N+1} - A^{N+1} = (B - A) \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-1-k} A^k$$

Si $A \in M_n(K)$ alors
$\forall N \in \mathbb{N}, I - A^N = (I - A) \sum_{k=0}^{N-1} A^k$.

Ex 14 Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Calculer les puissances de A .
2. <u>Application</u> : Soit x , y et z trois suites telles que : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = -1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + y_n + z_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + 2y_n + z_n) \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + y_n + 2z_n) \end{cases}$.
   a. On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.
   b. En déduire x_n, y_n et z_n en fonction de n.
   c. Les suites x , y et z Sont –elles convergentes ?

Ex 15 Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ \frac{1}{a} & 0 & a & \cdots & a^{n-2} \\ \vdots & \ddots & & \ddots\ \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a^{n-2}} & & & \ddots & a \\ \frac{1}{a^{n-1}} & \cdots\cdots & & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a} \\ \vdots \\ \frac{1}{a^{n-1}} \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A = UV^T - I$.
2. En déduire A^k tel que $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Si $\lambda_0 I + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_n A^n = 0$ tq $\lambda_0 \neq 0$ alors
$$A[-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}I - \frac{\lambda_2}{\lambda_0}A - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0}A^{n-1}] = I$$

Ex 16 Soit $A(a,b) = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ dans $M_n(K)$ telle que : $\forall i, a_{ii} = a$ et $\forall i \neq j, a_{ij} = b$ où a et b scalaires .

1. Calculer $A(a,b)^p$ où $p \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I . En déduire A^{-1} lorsqu'elle existe .
3. Calculer $det(A(a,b))$ (sous forme factorisée). Retrouver toutes les valeurs de (a,b) telles que $A(a,b)$ inversible.

Ex 17 Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $A(x) = \begin{pmatrix} ch(x) & sh(x) \\ sh(x) & ch(x) \end{pmatrix}$, $J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $A(x)$ est inversible et déterminer $A(x)^{-1}$.
2. Montrer qu'il existe $a(x)$ et $b(x)$ réels tels que : $A(x) = a(x)J + b(x)K$.
3. En déduire $A(x)^n$ tel que $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que cette formule est vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

Puissances et inverse d'une matrice grâce à un polynôme annulateur et la division euclidienne. Inverse d'une matrice grâce à un annulateur et la relation de la forme $AB = I$

Ex 18 Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. P , Q et $P + Q$ sont-elles inversibles ?
2. Calculer PQ , QP , P^n et Q^n.
3. Soit $M = aP + bQ$ tels que a et b réels.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous réels a et b, $M = a^nP + b^nQ$.
b. Montrer que : M est inversible *sietssi a et b sont* non nuls. Le cas échéant, déterminer l'inverse de M.

Ex 19 Soit $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient ligne i est $c_i = i$ et $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ telle que : $a_{ij} = \frac{i}{j}$.

1. Déterminer $rg(A)$.
2. Calculer AC Puis résoudre le système linéaire $AX = C$.
3. Exprimer A^2 en fonction de A.
4. En déduire par l'absurde que A n'est pas inversible.

Ex 20 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A^2 est combinaison linéaire de I et A .
2. En déduire A^n.
3. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^{n+1} - 2A^n = A - 2I$.
5. On pose $G_n = A^n + A - 2I$. Exprimer G_{n+1} en fonction de G_n et retrouver A^n.

Si $\tilde{P}(A) = 0$ et $X^n = P(X)Q(X) + R(X)$ tq $\deg(R) < \deg(Q)$ alors $A^n = \tilde{R}(A)$.

Ex 21 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de M.
2. En déduire $M^p \ tq \ p \in \mathbb{N}$.

Si $\lambda_0 I + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_n A^n = 0$ tq $\lambda_0 \neq 0$ alors $A[-\frac{\lambda_1}{\lambda_0} I - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} A - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0} A^{n-1}] = I$

Ex 22 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et I. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Soit (E) l'équation $AX + XA = I_3$ d'inconnue $X \in M_3(\mathbb{R})$.
   a. Montre que toute solution de (E) commute avec A^2 puis avec A.
   b. En déduire toutes les solutions de (E).

Ex 23 Soit $u_0 = 2 \ et \ v_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - v_n \ \ et \ v_{n+1} = 2u_n + v_n$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice A telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
2. Vérifier que A^2 est combinaison linéaire de $I \ et \ A$.
3. En déduire A^npou $n \in \mathbb{Z}$.
4. En déduire $u_n \ et \ v_n$ en fonction de n.

Ex 24 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $P(A)$ où $P(X) = X^3 - 1$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
2. Calculer $B = \sum_{k=0}^{100} A^k$.

Ex 25 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ .Soit $A \in M_p\ (\mathbb{R})$ telle que : $A^3 - A^2 + A - I = O$

1. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme combinaison linéaire de I, A, A^2.
2. Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3, A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I$
3. Déterminer une matrice B telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
4. Calculer B^r, pour r entier naturel. En déduire A^r.

Puissances et inverse d'une matrice grâce à une matrice semblable

Définition : les matrices A et B sont **semblables** lorsqu'il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

Ex 26 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix} \ et \ P = \begin{pmatrix} i & -2i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer P est inversible et donner P^{-1}.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. En déduire A^k tel que $k \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que A est inversible et déterminer A^k tel que $k \in \mathbb{Z}$.

Si $A = P^{-1}BP$ alors $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P^{-1}B^kP$ et (B inversible $\Longrightarrow A$ inversible et $A^{-1} = P^{-1}B^{-1}P$).

Ex 27 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
2. Montrer que : $AP = PD$.
3. En déduire que A est inversible et expliciter $A^{-1} \ et \ A^k$ tel que $k \in \mathbb{N}$.
4. Soit $x, y, et \ z$ trois FONCTIONS dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 2 \end{cases}$ $et \ \forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - y(t) + 9z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$.

   Et on définit les fonctions a , $b \ et \ c$ telles que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\underbrace{\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}}_{Y(t)} = P^{-1} \times \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} \ et \ X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$

   a. Montrer que : $a, b, et \ c$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = P^{-1} \times X'(t)$.
   b. Trouver une relation entre $A, X(t) \ et \ X'(t)$ (valable pour tout réel t).
   c. En déduire une relation entre $D, Y(t) et \ Y'(t)$ (valable pour tout réel t).
   d. En déduire que a , $b \ et \ c$ vérifient des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et trouver les expressions de a , $b \ et \ c$.
   e. En déduire les expressions de $x, y, et \ z$.

Inversibilité d'une matrice grâce à l'obtention d'une relation de la forme $AB = I$

Ex 28 Soit G l'ensemble des matrices de la forme $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où x réel.

1. Montrer que G est stable pour le produit matriciel. G est –il stable par somme ou multiplication par un scalaire ?
2. Montrer que G contient l'élément neutre pour le produit matriciel.
3. Montrer que toute matrice de G est inversible et que son inverse appartient à G .

> $A \in M_n(K)$ est inversible $\Leftrightarrow$ $\exists B \in M_n(K)/\ AB = I$

EX 29 Soit $G = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} /x,y,z\ réels \right\}$.

1. Montrer que G est stable pour le produit matriciel mais pas par combinaison linéaire de ses éléments.
2. Montrer que tout élément de G est inversible d'inverse dans G .
3. Décrire $\left(M(x,y)\right)^k tq\ k \in \mathbb{Z}$.

Ex 30 $\forall t \in \mathbb{R}, A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$ et $G = \{A(t)/t \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que :$\forall t \in \mathbb{R}, A(t) = B + tC$ où $B\ et\ C$ sont des matrices indépendantes de t à déterminer.
2. Montrer que G est stable pour le produit matriciel .
3. Déterminer les réels t tel que $A(t)$ inversible . Le cas échéant , $A(t)^{-1}$ appartient-il à G ?

Ex 31 Soit $n \in \mathbb{N}^*\ et\ \ \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}\ et\ A = \left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2}$.Calculer $A\bar{A}$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Ex 32 Soit $n \in \mathbb{N}^*\ et\ \ A = \left(1 - \delta_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.Calculer A^2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Inversibilité d'une matrice grâce à la caractérisation[A inversible $\Leftrightarrow (AX = 0 \Rightarrow X = 0)$]

Ex 33 Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs et $A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & & 1+a_n \end{pmatrix}$.

1. Pour $X \in M_{n,1}(K)$, calculer la matrice $X^T AX$.
2. En déduire que A est inversible .

Ex 34 Matrices à diagonales dominantes

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$une matrice carrée d'ordre n telle que :$\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

Nous allons prouver par l'absurde que A est inversible . Pour cela, imaginons un instant que A n'est pas inversible.

1. Justifier qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $X \neq 0\ et\ \ AX = 0$.
2. Justifier que $max(|x_1|,|x_2|..,|x_n|) > 0\ et\ \ \exists i_0 \in [\![1,n]\!]/\ |x_{i_0}| = max(|x_1|,|x_2|..,|x_n|)$.
3. Montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$.
4. En déduire que $|a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|$.
5. Conclure à une absurdité et conclure .

Inversibilité d'une matrice par résolution d'un système :

[**A inversible** $\Leftrightarrow$ ($\forall Y$, ***le système linéaire $AX = Y$ admet une unique solution*****)]

- ***cette unique solution sera, le cas échéant, $X = A^{-1}Y$.***

Ex 35 Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$la matrice carrée d'ordre n telle que : $a_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i > j \\ j - i + 1 & si\ i \leq j \end{cases}$

1. Ecrire A sous forme d'un tableau matriciel (très clair !!)
2. Justifier que A est inversible puis déterminer A^{-1} .
3. Soit J la matrice carrée d'ordre n de coefficients tous égaux à 1. Déterminer une matrice B telle que : $AB = J$.

Ex 34 Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et si oui calculer leur inverse .

1. $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}$ où a, b réels.

2. $A = \begin{pmatrix} 9 & 21 & 3 \\ 3 & 17 & -4 \\ -5 & -29 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \therefore & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & (0) & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 2 & 1 \\ & (0) & & & 1 & 2 \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ & 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \therefore & 0 \\ \vdots & 0 & 3 & 0 & \vdots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

4. $F = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in M_n(\mathbb{R})$ $telle\ que$: $\begin{cases} a_{ii} = 1 \\ a_{i(i+1)} = 2 \\ a_{ij} = 0 \ si\ j \neq i\ et\ j \neq i+1 \end{cases}$.

Ex 35 Déterminer les matrices B telles que $AB = C$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. .

Résultats généraux divers

Ex 36 Soit M une matrice carrée d'ordre n telle que la somme des coefficients d'une ligne de M est la même quelle que soit la ligne. Montrer que M^2 possède la même propriété.

Ex 37 Dans $M_n(K)$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne i et colonne j qui vaut 1.

1. Démontrer que : $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ où δ_{jk} est le symbole de Kronecker.
2. Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice carrée d'ordre n .
   a. Ecrire A comme une combinaison linéaire des n^2 matrices E_{ij} .
   b. Calculer AE_{ij} et $E_{ij}A$.
   c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que A et E_{ij} commutent .
   d. Décrire $C = \{A \in M_n(K) / \forall M \in M_n(K), AM = MA\}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices.

Ex 38 Matrices stochastiques

Définition : Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ A est dite **stochastique** lorsque $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

1. Démontrer que si $P\ et\ Q$ sont stochastiques (réelles et carrées d'ordre n)alors PQ l'est aussi .
2. Soit U la colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 .
   a. Montrer que : P est stochastique ***si et ssi*** $PU = U$.
   b. Redémontrer alors le résultat 1. avec cette nouvelle caractérisation des matrices stochastiques.
   c. Montrer que si P est stochastique et inversible alors P^{-1} est stochastique.

Ex 39 Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer que A et A^T commutent $sietssi$ A est diagonale.

Ex 40 Matrice positive

Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice de $S_n(\mathbb{R})$. A est dite positive lorsque $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^TAX \geq 0$.

Soit $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$.

1. Calculer $X^TDX\ pour\ X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. En déduire une CNS pour que D soit positive.

Ex 41 Soit $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$ avec tous les λ_k distincts . Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $A\ et\ D$ commutent $si\ et\ ssi$ A est diagonale .
2. On suppose que : $D = P^{-1}AP$ où $P \in GL_n(K)$. Soit λ un scalaire

Montrer que : le système $AX = \lambda X$ admet une solution non nulle ***si et ssi*** $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n\}$

Ex 42 Exemples de matrices semblables

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ tq X non nulle. On pose $Y = AX$, $Z = AY$ et $P = (X\ Y)$.

1. Ecrire Z comme combinaison linéaire de X et Y.
2. En déduire que $AP = PB$.
3. Conclure que A et B sont semblables.