Corrigé du TD 16
Systèmes linéaires et Matrices

Systèmes linéaires.

Ex 0 Soit $A=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\2&5&-2\\3&0&-3\end{pmatrix}$. On note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A.

En remarquant que $C_1=-C_3$, vous déterminerez :

1. une matrice colonne X telle que $AX=0$.
2. le rang de A.

1. Si $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ alors $AX=aC_1+bC_2+cC_3$ donc $X=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $vérifie\ AX=1C_1+0C_2+1C_3=0$.
2. $C_1=-C_3$ donc $rg(A)\leq 2$ et $A\sim_C\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&5&0\\3&0&0\end{pmatrix}\sim_C\begin{pmatrix}1&0&0\\2&9&0\\3&6&0\end{pmatrix}=B$. Donc, $rg(A)=rg(B)=2$.

Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&4&-6\\3&6&-9\end{pmatrix}$. Trouver rapidement :

1. $rg(A)$.
2. deux matrices colonnes X telles que $AX=O$.
3. deux matrices lignes L telles que $LA=O$.
4. les solutions du système linéaire $AX=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
5. les solutions du système linéaire $AX=\begin{pmatrix}-6\\-12\\-18\end{pmatrix}$.
6. Une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que le système linéaire $AX=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ soit compatible.

1. Je remarque que $L_2=2L_1\ et\ L_3=3L_1$. Donc, $A\sim_L\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $rg(A)=1$.
2. Je remarque que $2C_1-C_2=0\ \ et\ C_1+C_2+C_3=0$. Donc $A\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=O$ et $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=O$.

   On a aussi $C_3+3C_1=0$ donc $A\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}=O$.
3. Comme $2L_1-L_2=0\ et\ 3L_1-L_3=0$, $(2\quad -1\quad 0)A=0\ et\ \ (3\quad 0\quad -1)A=0$.
4. $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-3z=1\\2(x+2y-3z)=1\\3(x+2y-3z)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-3z=1\\2=1\\3=1\end{cases}$ $IMPOSSIBLE$!!
5. $AX=\begin{pmatrix}-6\\-12\\-18\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-3z=-6\\2(x+2y-3z)=-12\\3(x+2y-3z)=-18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-3z=-6\\-12=-12\\-18=-18\end{cases}\Leftrightarrow x=-6-2y+3z$.

   Donc, $Sol=\{\begin{pmatrix}-6-2y+3z\\y\\z\end{pmatrix}/y,z\ réels\}$
6. $AX=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-3z=a\\2(x+2y-3z)=b\\3(x+2y-3z)=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-3z=-6\\2a=b\\3a=c\end{cases}$. Donc le système est compatible sietssi $\begin{cases}2a=b\\3a=c\end{cases}$.

Soit (S) un système n équations et n inconnues dont la matrice des coefficients est A. Justifier l'équivalence :

(S) est de Cramer sietssi $rg(A)=n$.

(S) est de Cramer sietssi (S) admet une unique solution

sietssi il existe un système (S') échelonnée équivalent à (S) et de la forme (S'): $\begin{cases}x_1+a'_{12}x_2+a'_{13}x_3+..+a'_{1p}x_p=b'_1\\ x_2+a'_{23}x_3+..+a'_{2p}x_p=b'_2\\ \vdots\\ x_{n-1}+a'_{2p}x_p=b'_{p-1}\\ x_p=b'_p\end{cases}$.

sietssi il existe un système (S') échelonnée équivalent à (S) et de rang n.

sietssi $rg(S)=n$.

Ex 1 Des systèmes linéaires

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 8 & -9 & 13 \end{bmatrix}$ $et\ Y = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Résoudre le système $AX = Y$, d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ en fonction de a, b et c. Donner les solutions pour $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ puis $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$. Déterminer le rang de la matrice des coefficients.

2. Soit λ un paramètre réel et $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Résoudre le système $AX = \lambda X$, d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ en fonction de λ. Déterminer le rang de la matrice des coefficients en fonction du paramètre.

3. Soit m un paramètre réel. Résoudre $\begin{cases} -x + my + z = 1 \\ -2x + my - z - mt = -1 \\ 3x - 4y + 2z + 5t = 2 \end{cases}$, d'inconnue $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, en fonction de m. Déterminer le rang de la matrice des coefficients en fonction du paramètre.

4. Soit a un paramètre réel et $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$. Résoudre $AX = 0$, d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$, en fonction de a. Déterminer le rang de la matrice des coefficients en fonction du paramètre.

5. Soit m un paramètre réel. Résoudre $\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ d'inconnue $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en fonction de m. Déterminer le rang de la matrice des coefficients en fonction du paramètre.

6. Soit m un paramètre réel. Résoudre $\begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ 3x & +2y & +mz & = & 3 \\ (m-1)x & +my & +(m+1)z & = & m \end{cases}$, d'inconnue $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le rang de la matrice des coefficients en fonction du paramètre.

$$S_{11}: \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ 3x & +2y & +mz & = & 3 \\ (m-1)x & +my & +(m+1)z & = & m \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+3L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+(m-1)L_1}}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-(m-1)L_1}}{\rightleftarrows}} \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (2-3m)y & +(m-3m+3)z & = & 3 \\ & (m-m(m-1))y & +((m+1)-(m-1)^2)z & = & m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (2-3m)y & +(-2m+3)z & = & 3 \\ & (2m-m^2)y & +(3m-m^2)z & = & m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (2-3m)y & +(-2m+3)z & = & 3 \\ & (2-m)my & +(3-m)mz & = & m \end{cases}$$

$\underline{1er\ cas\ m = 0\ .}$ Alors $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +2z & = & 0 \\ 2y & +3z & = & 3 \\ & 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -\frac{3}{2}z + \frac{3}{2}. \\ 0 = 0 \end{cases}$ Donc, $Sol(S_{11}) = \left\{ \left(-2z, -\frac{3}{2}z + \frac{3}{2}, z\right) / z \in \mathbb{R} \right\}$.

$\underline{2ème\ cas\ m \neq 0\ .}$ Alors $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (2-3m)y & +(-2m+3)z & = & 3 \\ & (2-m)y & +(3-m)z & = & 1 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2+2L_3}{\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_3}{\rightleftarrows}} \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (-2-m)y & -3z & = & 1 \\ & (2-m)y & +(3-m)z & = & 1 \end{cases}$

$$S_{11} \underset{L_3\leftarrow L_3-\left(\frac{3-m}{3}\right)L_2}{\overset{L_3\leftarrow L_3+\left(\frac{3-m}{3}\right)L_2}{\rightleftarrows}} \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (-2-m)y & -3z & = & 1 \\ (2-m) + \frac{3-m}{3}(-2-m)y & & & = & 1 + \frac{3-m}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (-2-m)y & -3z & = & 1. \\ & (m^2-4m)y & & = & 6-m \end{cases}$$

$\underline{1er\ sous-cas\ \ m \neq 0\ et\ m = 4}$. $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (-2-m)y & -3z & = & 1 \\ & 0 = 2 \end{cases}$. Ainsi, $Sol(\ S_{11}\ ) = \emptyset$.

$\underline{2ème\ sous-\ \ cas\ \ m \neq 0\ \ et\ m \neq 4.\ }$ $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m^2-2m-4}{m(m-4)} \\ z = -\frac{4}{m(m-4)} \\ y = \frac{6-m}{m(m-4)} \end{cases}$. Ainsi, $Sol(\ S_{11}\ ) = \left\{ \left(\frac{m^2-2m-4}{m(m-4)}, \frac{6-m}{m(m-4)}, -\frac{4}{m(m-4)} \right) \right\}$.

Matrices symétriques-antisymétriques. Transposition et trace.

Ex 2 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de M ?
2. Ecrire M sous la forme $S\ + A$ avec S symétrique et A anti-symétrique.

3. Déterminer toutes les matrices P telles que : $2P-3P^T=M$.

1. $rg(M)=3$ (en utilisant les équivalents colonnes).
2. Le cours assure que $S=\frac{M+M^T}{2}\ et\ A=\frac{M-M^T}{2}$
3. Soit $P\in M_3(\mathbb{R})$. on pose $U=\frac{P+P^T}{2}\ et\ V=\frac{P-P^T}{2}$.

Alors U est symétrique , V est antisymétrique et $P=U+V$. Donc, $P^T=U^T+V^T=U-V$.

Alors, $2P-3P^T=M\Leftrightarrow 2(U+V)-3(U-V)=A+S \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\\ une\ combi.\\ linéaire\\ de\ matrices\\ sym\ est\ sym.\\ donc\ (-1)U+1O\\ est\ sym.\\ idem\ avec\\ anti-sym}} \underbrace{-U}_{sym.}+\underbrace{5V}_{anti-sym.}=S+A \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{par\ unicité\\ de\ l'écriture\\ de\ M\ comme\\ somme\ d'une\\ sym\ et\ d'une\\ anti-sym.}} \begin{cases}-U=S\\ 5V=A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}U=-S\\ V=\frac{1}{5}A\end{cases}$.

Ainsi, $Sol=\left\{-S+\frac{1}{5}A\right\}$.

Ex 3 Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Quel est le rang de A? Déterminer toutes les matrices L triangulaires inférieures telles que : $LL^T=A$.

Prenons $L=\begin{pmatrix}a&0&0\\u&b&0\\w&v&c\end{pmatrix}$. Donc $L^T=\begin{pmatrix}a&c&0\\0&b&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $LL^T=\begin{pmatrix}a&0&0\\c&b&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c&0\\0&b&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&ca&0\\ca&c^2+b^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Donc, $LL^T=A\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\ ac=1\\ c^2+b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ c=1\\ b=0\end{cases}$ ou $\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ c=-1\\ b=0\end{cases}$

Prenons $L=\begin{pmatrix}a&0&0\\u&b&0\\w&v&c\end{pmatrix}$. Donc $L^T=\begin{pmatrix}a&u&w\\0&b&v\\0&0&c\end{pmatrix}$ et $LL^T=\begin{pmatrix}a&0&0\\u&b&0\\w&v&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&u&w\\0&b&v\\0&0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&au&aw\\au&u^2+b^2&uw+bv\\aw&uw+bv&w^2+v^2+c^2\end{pmatrix}$. Donc,

$LL^T=A\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\ w^2+v^2+c^2=1\\ u^2+b^2=1\\ au=1\\ aw=0\\ uw+bv=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm1\\ v^2+c^2=1\\ u^2+b^2=1\\ au=1\\ w=0\\ bv=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm1\\ v^2+c^2=1\\ b^2=0\\ u=\pm1\\ w=0\end{cases}\Leftrightarrow\exists t\in[0,2\pi[/\begin{cases}a=1\\ c=\cos(t)\\ v=\sin(t)\\ u=1\\ w=0\\ b=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=1\\ c=\cos(t)\\ v=\sin(t)\\ u=1\\ w=0\\ b=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=-1\\ c=\cos(t)\\ v=\sin(t)\\ u=-1\\ w=0\\ b=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=-1\\ c=\cos(t)\\ v=\sin(t)\\ u=-1\\ w=0\\ b=0\end{cases}$

Donc, $Sol=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&\sin(t)&\cos(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&0\\0&\sin(t)&\cos(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&\sin(t)&\cos(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&0\\0&\sin(t)&\cos(t)\end{pmatrix}/t\in[0,2\pi[\right\}$.

Vérification : $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&\sin(t)&\cos(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&\sin(t)\\0&0&\cos(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}. OK$!!

Ex 4 Montrer qu'il n'existe aucunes A et B carrées d'ordre n telles que $AB-BA=I_n$.

$tr(AB-BA)=tr(AB)-tr(BA)\underbrace{=}_{cours}0$ et $tr(I_n)=n\neq0$. Donc, il n'existe pas de matrices A et B carrées d'ordre n tq $AB-BA=I_n$.

Ex 5 Soit $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que $A^TA=O_n\Leftrightarrow A=O_n$.
2. Montrer que $A^TA=I_n\Longrightarrow\sum_{i,j=1}^n {a_{ij}}^2=n$.

Puissances de matrices par conjecture et récurrence

Ex 6 Soit $a\in\mathbb{R}\ et\ A=\begin{pmatrix}\cos(a)&\sin(a)\\-\sin(a)&\cos(a)\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2,A^3,A^4,A^5 . Déterminer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Faire de même avec , $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

$A^2=\begin{pmatrix}\cos(a)&\sin(a)\\-\sin(a)&\cos(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(a)&\sin(a)\\-\sin(a)&\cos(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2(a)-sin^2(a)&2\cos(a)\sin(a)\\-2\cos(a)\sin(a)&\cos^2(a)-sin^2(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(2a)&\sin(2a)\\-\sin(2a)&\cos(2a)\end{pmatrix}$.

Conjecture $A^n=\begin{pmatrix}\cos(na)&\sin(na)\\-\sin(na)&\cos(na)\end{pmatrix}$.

$A^0=I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(0)&\sin(0)\\-\sin(0)&\cos(0)\end{pmatrix}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. je suppose que $A^n=\begin{pmatrix}\cos(na)&\sin(na)\\-\sin(na)&\cos(na)\end{pmatrix}$.

Alors $A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}\cos(na)&\sin(na)\\-\sin(na)&\cos(na)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(a)&\sin(a)\\-\sin(a)&\cos(a)\end{pmatrix}$

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos(na)\cos(a) - \sin(na)\sin(a) & \cos(na)\sin(a) + \sin(na)\cos(a) \\ \cos(na)\sin(a) + \sin(na)\cos(a) & \cos(na)\cos(a) - \sin(na)\sin(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(na+a) & \sin(na+a) \\ -\sin(na+a) & \cos(na+a) \end{pmatrix}$.

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos((n+1)a) & \sin((n+1)a) \\ -\sin((n+1)a) & \cos((n+1)a) \end{pmatrix}$.

CCL : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} \cos(na) & \sin(na) \\ -\sin(na) & \cos(na) \end{pmatrix}$.

Ex 7 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ tq $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ?
2. Calculer A^{n-1} et A^n.
3. En déduire que $\forall \lambda \in \mathbb{N}$, $I + \lambda A$ est inversible et exprimer $(I+\lambda A)^{-1}$comme combinaison linéaire de $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$.

Ex 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une suite u telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1-2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1+u_n \end{pmatrix}$.
2. Expliciter A^n en fonction de n .

Ex 9 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux suites a et b telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} - b_{n+1} - 20b_n = 0$.
3. Puis expliciter M^n en fonction de l'entier n .

1. $M^n = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{en\ posant\ a_0=1\ et\ b_0=0}{\triangleq} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & b_0 \\ b_0 & a_0 & b_0 \\ b_0 & b_0 & a_0 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$.

Alors, $M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n - 6b_n & -3a_n - b_n & -3a_n - b_n \\ -3a_n - b_n & 2a_n - 6b_n & -3a_n - b_n \\ -3a_n - b_n & -3a_n - b_n & 2a_n - 6b_n \end{pmatrix}$.

Posons $a_{n+1} = 2a_n - 6b_n$ et $b_{n+1} = -3a_n - b_n$. Alors $M^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}$.

J'en conclus grâce au théorème de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $il\ existe\ deux\ réels\ a_n\ et\ b_n\ tels\ que\ M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$.

Il existe donc deux suites a et b telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2a_n - 6b_n$ et $b_{n+1} = -3a_n - b_n$.

Donc, $a_n = \frac{-1}{3}(b_n + b_{n+1})$ donc $b_{n+2} = -3a_{n+1} - b_{n+1} = -3(2a_n - 6b_n) - b_{n+1} = -3\left(\frac{-2}{3}(b_n + b_{n+1}) - 6b_n\right) - b_{n+1}$.

Ainsi, $b_{n+2} - b_{n+1} - 20b_n = 0$.

3. Posons $(e.c) : r^2 - r - 20 = (r+4)(r-5) = 0$. Donc, $r_1 = -4$ et $r_2 = 5$ sont les racines de (e.c) et il existe u et v deux réels tels que : $\forall n, b_n = u(-4)^n + v5^n$. Or, $b_0 = 0$ et $b_1 = -3$. Donc, $u + v = 0$ et $-4u + 5v = -3$. Donc $v = -\frac{1}{3}$ et $u = \frac{1}{3}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$b_n = \frac{1}{3}[(-4)^n - 5^n]$ et $a_n = \frac{-1}{3}(b_n + b_{n+1}) = \frac{-1}{9}[(-4)^n - 5^n + (-4)^{n+1} - 5^{n+1}] = \frac{-1}{9}[(-4)^n(1-4) - 5^n(1+5)] = \frac{1}{3}[(-4)^n + 2 \times 5^n]$

$$et\ M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-4)^n + 2\times 5^n & [(-4)^n - 5^n] & [(-4)^n - 5^n] \\ [(-4)^n - 5^n] & (-4)^n + 2\times 5^n & [(-4)^n - 5^n] \\ [(-4)^n - 5^n] & [(-4)^n - 5^n] & (-4)^n + 2\times 5^n \end{pmatrix}.$$

<u>Autre méthode</u> : Ecrire $M = -3J + 5I$ et appliquer la FBN.

Ex 10 Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$. Calculer $A^k + A^{-k}$ tel que $k \in \mathbb{N}$.

$A^0 + A^{-0} = 2I_n$

$A + A^{-1} = I_n$.

$A^2 + A^{-2} = (A + A^{-1})^2 - 2I_n = I_n^2 - 2I_n = -I_n$.

$A^3 + A^{-3} = (A^2 + A^{-2})(A + A^{-1}) - A^2A^{-1} - A^{-2}A = (-I_n)I_n - (A + A^{-1}) = -I_n - I_n = -2I_n$.

$A^4 + A^{-4} = (A^3 + A^{-3})(A + A^{-1}) - A^3A^{-1} - A^{-3}A = (-2I_n)I_n - (A^2 + A^{-2}) = -2I_n + I_n = -I_n$.

Supposons qu'il existe $a_{m-1}, a_m \in \mathbb{Z}$ tel que $A^{m-1} + A^{-(m-1)} = a_{m-1} I_n$ et $A^m + A^{-m} = a_m I_n$. Alors,
$A^{m+1} + A^{-(m+1)} = (A^m + A^{-m})(A + A^{-1}) - A^m A^{-1} - A^{-m} A = (a_m I_n) I_n - \left(A^{m-1} + A^{-(m-1)}\right)$
$= a_m I_n - a_{m-1} I_n = (a_m - a_{m-1}) I_n$. Posons $a_{m+1} = a_m - a_{m-1}$. Alors $A^{m+1} + A^{-m-1} = a_{m+1} I_n$.
CCL : $\forall m \in \mathbb{N}, \exists a_m \in \mathbb{Z} / \ A^m + A^{-m} = a_m I_n$.

Posons $(e.c) : r^2 - r + 1 = 0. r_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $r_2 = \overline{r_1}$.

Donc il existe α et β réels tels que $\forall m \in \mathbb{N}, a_m = \alpha \cos\left(\frac{\pi}{3} m\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{3} m\right)$.

Alors $a_0 = 2 = \alpha \cos(0) + \beta \sin(0) = \alpha$ et $a_1 = 1 = \alpha \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \beta \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\beta = 0$. Ainsi,

$\forall m \in \mathbb{N}, a_m = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} m\right)$ et finalement $A^m + A^{-m} = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} m\right) I_n$.

Ex 11 Soit $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \{1,2,3\}, A^k = B + kC$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = B + kC$.

Je sais que $\begin{cases} A = B + C \\ A^2 = B + 2C \\ A^3 = B + 3C \end{cases}$. Donc $\begin{cases} C = A^2 - A \\ B = 2A - A^2 \end{cases}$.

Initialisation : $A = B + C$.

Propagation : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $A^k = B + kC$.

Alors $A^{k+1} = A^k A = (B + kC)A = BA + kCA = (2A - A^2)A + k(A^2 - A)A = (k-1)A^3 - (k-2)A^2$

$A^{k+1} = (k-1)(B + 3C) - (k-2)(B + 2C) = B + (k+1)C$.

CCL : je peux conclure que $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = B + kC$.

Puissances de matrices grâce à la formule du binôme de Newton.

Inverse d'une matrice grâce à des matrices nilpotentes ou grâce à un polynôme annulateur.

Ex 12 Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer B^n avec pour $n \in \mathbb{Z}$. Quel est le rang de B^n ?
2. Montrer que B est inversible et déterminer B^{-1}.

Si $(A, B) \in M_n(K)$ et $AB = BA$ alors $\forall N \in \mathbb{N}$,
$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$.

$$B^{N+1} - A^{N+1} = (B - A) \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-1-k} A^k$$

1. $B = 2I + N$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$., $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^4 = 0$ donc $\forall k \geq 4, N^k = O$. N est donc nilpotente.

De plus I et N commutent donc $2I$ et N commutent. Alors

$$B^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I)^{n-k} = \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} N^k 2^{n-k} I = \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k = \binom{n}{0} 2^n I + \binom{n}{1} 2^{n-1} N + \binom{n}{2} 2^{n-2} N^2 + \binom{n}{3} 2^{n-3} N^3$$

$$B^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} 2^{n-3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} & \frac{n(n-1)(n-2)}{3} 2^{n-4} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

2. B est inversible car triangulaire supérieure avec aucun zéro sur la diagonale et B^{-1}est triangulaire supérieure.

$$BX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = a \\ 2y + z = b \\ 2z + t = c \\ 2t = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} - \frac{b}{4} + \frac{c}{8} - \frac{d}{16} \\ y = \frac{b}{2} - \frac{c}{4} + \frac{d}{8} \\ z = \frac{c}{2} - \frac{d}{4} \\ t = \frac{d}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ & (O) & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Donc, $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ & (O) & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Ex 13 Soit $A=\begin{pmatrix}2&3&-2\\2&0&1\\8&6&-2\end{pmatrix}$

1. Calculer les puissances de A et de celles de $B=\begin{pmatrix}0&3&-2\\2&-2&1\\8&6&-4\end{pmatrix}$
2. Montrer que B est inversible et calculer B^k tel que $k\in\mathbb{Z}$.
3. Déterminer l'inverse de $I+A$.

Si $A\in M_n(K)$ alors

$\forall N\in\mathbb{N}, I-A^N=(I-A)\left(\sum_{k=0}^{N-1}A^k\right)$.

$A^2=\begin{pmatrix}2&3&-2\\2&0&1\\8&6&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&-2\\2&0&1\\8&6&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-6&3\\12&12&-6\\12&12&-6\end{pmatrix}$ et $A^3=\begin{pmatrix}2&3&-2\\2&0&1\\8&6&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&-6&3\\12&12&-6\\12&12&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Donc A est nilpotente et $\forall k\geq 3, A^k=0$.

$B=\begin{pmatrix}0&3&-2\\2&-2&1\\8&6&-4\end{pmatrix}=A-2I$. Comme A et I commutent, A et $-2I$ commutent et je peux appliquer la FBN :

$$B^n=(A-2I)^n\overset{FBN}{=}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^k(-2I)^{n-k}\underset{\substack{car\\ \forall k\geq 3, A^k=0.}}{\overset{\substack{car\ \forall\alpha\in K,\forall k\in\mathbb{N}\\ (\alpha I)^k=\alpha^k I^k=\alpha^k I}}{=}}\sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}A^k(-2)^{n-k}I\overset{\substack{car\ A(\alpha B)=\alpha(AB)\\ et\ AI=A}}{=}\sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}(-2)^{n-k}A^k$$

$$=\binom{n}{0}(-2)^nA^0+\binom{n}{1}(-2)^{n-1}A^1+\binom{n}{2}(-2)^{n-2}A^2$$

$$=(-2)^n\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+n(-2)^{n-1}\begin{pmatrix}2&3&-2\\2&0&1\\8&6&-2\end{pmatrix}+n\frac{n-1}{2}(-2)^{n-2}\begin{pmatrix}-6&-6&3\\12&12&-6\\12&12&-6\end{pmatrix}.$$

$$=(-2)^{n-2}\left[\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4n&-6n&4n\\-4n&0&-2n\\-16n&-12n&4n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3n(n-1)&-3n(n-1)&\frac{3}{2}n(n-1)\\6n(n-1)&6n(n-1)&-3n(n-1)\\6n(n-1)&6n(n-1)&-3n(n-1)\end{pmatrix}\right]$$

Ex 14 Soit $A=\begin{pmatrix}\frac12&\frac14&\frac14\\\frac14&\frac12&\frac14\\\frac14&\frac14&\frac12\end{pmatrix}$.Calculer les puissances de A .

<u>Application</u> : Soit x , y et z trois suites telles que : $\begin{cases}x_0=1\\y_0=2\\z_0=-1\end{cases}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases}x_{n+1}=\frac14(2x_n+y_n+z_n)\\y_{n+1}=\frac14(x_n+2y_n+z_n)\\z_{n+1}=\frac14(x_n+y_n+2z_n)\end{cases}$.

a. On pose $X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.
b. En déduire x_n, y_n et z_n en fonction de n.
c. Les suites x , y et z sont –elles convergentes ?

$A=\begin{pmatrix}\frac12&\frac14&\frac14\\\frac14&\frac12&\frac14\\\frac14&\frac14&\frac12\end{pmatrix}=\frac14(J+I)$. Comme I et J commuent, $A^n=\frac{1}{4^n}(I+J)^n=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^kI^{n-k}=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k$. Or, $J^k=\begin{cases}3^{k-1}J\ si\ k\geq 1\\ I\ si\ k=0\end{cases}$.

Donc, $A^n=\frac{1}{4^n}I+\frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}J^k=\frac{1}{4^n}I+\frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}J=\frac{1}{4^n}I+\frac{1}{4^n}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}\right]J$.

Or, $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}=\frac13\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k=\frac13\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k-\frac13=\frac13 4^n-\frac13$. Donc, $A^n=\frac{1}{4^n}I+\frac{1}{4^n}\left[\frac13 4^n-\frac13\right]J=\frac{1}{3\times 4^n}[3I+(4^n-1)J]$.

$$X_{n+1}=\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\\z_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12x_n+\frac14y_n+\frac14z_n)\\\frac14x_n+\frac12y_n+\frac14z_n\\\frac14x_n+\frac14y_n+\frac12z_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12&\frac14&\frac14\\\frac14&\frac12&\frac14\\\frac14&\frac14&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}=AX_n.$$

Alors on montrer facilement par récurrence que $\forall n, X_n=A^nX_0$. Ainsi, $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}=\frac{1}{3\times 4^n}\begin{pmatrix}4^n+2&4^n-1&4^n-1\\4^n-1&4^n+2&4^n-1\\4^n-1&4^n-1&4^n+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

$x_n=\frac{1}{3\times 4^n}(2\times 4^n+1)\sim_{n\to+\infty}\frac{2\times 4^n}{3\times 4^n}=2/3$

$y_n=\frac{1}{3\times 4^n}(2\times 4^n+4)\sim_{n\to+\infty}\frac{2\times 4^n}{3\times 4^n}=2/3$. Ainsi les suites x, y et z sconvergent vers $\frac23$.

$z_n=\frac{1}{3\times 4^n}(2\times 4^n-5)\sim_{n\to+\infty}\frac{2\times 4^n}{3\times 4^n}=2/3$

Ex 15 Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ \frac{1}{a} & 0 & a & \cdots & a^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a^{n-2}} & & & \ddots & a \\ \frac{1}{a^{n-1}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a} \\ \vdots \\ \frac{1}{a^{n-1}} \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A = UV^T - I$.
2. En déduire A^k tel que $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Si $\lambda_0 I + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_n A^n = 0$ tq $\lambda_0 \neq 0$ alors $A[-\frac{\lambda_1}{\lambda_0} I - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} A - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0} A^{n-1}] = I$

1.$UV^T = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a} \\ \vdots \\ \frac{1}{a^{n-1}} \end{pmatrix} (1 \ a \ a^2 \ \cdots \ a^{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & & a^{n-1} \\ \frac{1}{a} & \frac{a}{a} & \frac{a^2}{a} & & \frac{a^{n-1}}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{a^{n-1}} & \frac{a}{a^{n-1}} & \frac{a^2}{a^{n-1}} & & \frac{a^{n-1}}{a^{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ \frac{1}{a} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a^{n-2}} & & & \ddots & a \\ \frac{1}{a^{n-1}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix} = A + I$. Donc $A = UV^T - I$.

2.Alors comme UV^T et I commutent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(UV^T - I)^k = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} (UV^T)^s (-I)^{k-s} = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} (-1)^{k-s} (UV^T)^s$.

Calculons $(UV^T)^s$: $(UV^T)^2 = UV^T UV^T = U(V^T U)V^T$. Mais $V^T U = (1 \ a \ a^2 \ \cdots \ a^{n-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a} \\ \vdots \\ \frac{1}{a^{n-1}} \end{pmatrix} = (1 + 1 + \cdots + 1) = (n) = n$. Par

conséquent, $(UV^T)^2 = UnV^T = nUV^T$. Alors, $(UV^T)^s = \begin{cases} n^{s-1} UV^T \ si \ s > 0 \\ I \ si \ s = 0 \end{cases}$. Il s'en suit :

$$(UV^T - I)^k = \binom{k}{0} (-1)^k I + \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} (-1)^{k-s} (UV^T)^s = (-1)^k I + \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} (-1)^{k-s} n^{s-1} UV^T = (-1)^k I + \left[\sum_{s=1}^k \binom{k}{s} (-1)^{k-s} n^{s-1}\right] UV^T.$$

Et $\sum_{s=1}^k \binom{k}{s} (-1)^{k-s} n^{s-1} = \left[\frac{1}{n} \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} (-1)^{k-s} n^s\right] - \frac{(-1)^k}{n} = \frac{1}{n}(n-1)^k - \frac{(-1)^k}{n}$. J'en conclus que : $A^k = (-1)^k I + \left[\frac{1}{n}(n-1)^k - \frac{(-1)^k}{n}\right] UV^T$

ou encore $A^k = (-1)^k I + \left[\frac{1}{n}(n-1)^k - \frac{(-1)^k}{n}\right](A + I) = \left[\frac{1}{n}(n-1)^k - \frac{(-1)^k}{n} + (-1)^k\right] I + \left[\frac{1}{n}(n-1)^k - \frac{(-1)^k}{n}\right] A$.

2. En particulier, $A^2 = \left[\frac{1}{n}(n-1)^2 + \frac{n-1}{n}\right] I + \left[\frac{1}{n}(n-1)^2 - \frac{1}{n}\right] A = (n-2)A + (n-1)I$.

Donc, $\frac{1}{n-1}[A^2 - (n-2)A] = I$ i.e. $A\left[\frac{1}{n-1}[A - (n-2)I]\right] = I$. Ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n-1}[A - (n-2)I]$.

Ex 16 Soit $A(a,b) = (a_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ dans $M_n(K)$ telle que : $\forall i, a_{ii} = a \ et \ \forall i \neq j, a_{ij} = b$ où a et b scalaires .

1. Calculer $A(a,b)^p$, $p \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que A^2 est combinaison linéaire de $A \ et \ I$. En déduire A^{-1} lorsqu'elle existe .
3. Calculer $det(A(a,b))$ (sous forme factorisée). Retrouver toutes les valeurs de (a,b) telles que $A(a,b)$ inversible.

$A = bJ + (a-b)I$ où $I = I_n$ $et \ J \ la \ matrice \ carrée \ d'ordre 1 \ dont \ tous \ les \ coeff. valent$ 1.

Comme I et J commutent, $bJ \ et \ (a-b)I$ commutent donc je peux appliquer la FBN et

$$A^p = (bJ + (a-b)I)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (bJ)^k \big((a-b)I\big)^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} b^k J^k (a-b)^{p-k} I = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} b^k (a-b)^{p-k} J^k$$

$$A^p = (a-b)^p I + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} b^k (a-b)^{p-k} J^k = (a-b)^p I + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} b^k (a-b)^{p-k} n^{k-1} J$$

$A^p = (a-b)^p I + \left[\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} b^k (a-b)^{p-k} n^{k-1}\right] J$.

Or, $\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} b^k (a-b)^{p-k} n^{k-1} = \left[\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} b^k (a-b)^{p-k} n^{k-1}\right] - \binom{p}{0} b^0 (a-b)^{p-0} n^{0-1}$

$$= \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (bn)^k (a-b)^{p-k}\right] - \frac{(a-b)^p}{n} = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (nb)^k (a-b)^{p-k}\right] - \frac{(a-b)^p}{n} = \frac{1}{n}[nb + a - b]^p - \frac{(a-b)^p}{n}.$$

Ainsi, $A^p = (a-b)^p I + \left[\frac{1}{n}[nb + a - b]^p - \frac{(a-b)^p}{n}\right] J = (a-b)^p I + \frac{1}{n}[[nb + a - b]^p - [a-b]^p] J$

En particulier, $A^2 = (a-b)^2 I + \frac{1}{n}[[nb + a - b]^2 - [a-b]^2] J = (a-b)^2 I + \frac{1}{n}[n^2 b^2 + 2(a-b)nb] J = (a-b)^2 I + [nb + 2(a-b)] bJ$

Or, $bJ = A - (a-b)I$.

Donc, $A^2 = (a-b)^2 I + [nb + 2(a-b)][A - (a-b)I] = \big[(a-b)^2 - (a-b)\big(nb + 2(a-b)\big)\big] I + [nb + 2(a-b)] A$

$A^2 = (a-b)\big[a - b - \big(nb + 2(a-b)\big)\big] I + [nb + 2(a-b)] A = (a-b)[(1-n)b - a] I + [(n-2)b + 2a] A$.

Donc, $(a-b)[(1-n)b - a] I = A^2 - [(n-2)b + 2a] A$.

Si $(a-b)[(1-n)b - a] \neq 0$ i.e. $a \neq b \ et \ a \neq (1-n)b$ alors

$I = \frac{1}{(a-b)[(1-n)b-a]}[A^2 - [(n-2)b + 2a]A] = \frac{1}{(a-b)[(1-n)b-a]}[A - [(n-2)b + 2a]I]A$.

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{(a-b)[(1-n)b-a]}[A - [(n-2)b + 2a]I]$.

Si $(a-b)[(1-n)b - a] = 0$ i.e. $a = b \ ou \ a = (1-n)b$ alors

$A^2 - [(n-2)b + 2a]A = 0$ donc $A[A - [(n-2)b + 2a]I] = 0$.

Si $b \neq 0$ alors A n'est pas diagonale donc $A - [(n-2)b + 2a]I \neq 0$ et par suite, il existe un =e matrice B non nulle telle que $AB = 0$ donc A n'est pas inversible.

Si $b = 0$ alors $a = 0$ ($car\ a = b\ \ ou\ \ a = (1-n)b$) donc $A = 0$ et ainsi, A n'est pas inversible.

BILAN : A est inversible sietssi $a \neq b\ et\ a \neq (1-n)b$. Et le cas échéant, et $A^{-1} = \frac{1}{(a-b)[(1-n)b-a]}[A - [(n-2)b + 2a]I]$.

Ex 17 Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $A(x) = \begin{pmatrix} ch(x) & sh(x) \\ sh(x) & ch(x) \end{pmatrix}$, $J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $A(x)$ est inversible et déterminer $A(x)^{-1}$.
2. Montrer qu'il existe $a(x)$ et $b(x)$ réels tels que : $A(x) = a(x)J + b(x)K$.
3. En déduire $A(x)^n$ tel que $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que cette formule est vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

Puissances et inverse d'une matrice grâce à un polynôme annulateur et la division euclidienne.

Inverse d'une matrice grâce à un annulateur et la relation de la forme $AB = I$

Ex 18 Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. P , Q et $P + Q$ sont-elles inversibles ?
2. Calculer PQ , QP , $P^n\ et\ Q^n$.
3. Soit $M = aP + bQ$ tels que $a\ \ et\ b$ réels.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous réels $a\ et\ b$, $M = a^nP + b^nQ$.
   b. Montrer que : M est inversible $sietssi\ a\ et\ b\ sont$ non nuls. Le cas échéant, déterminer l'inverse de M.

Ex 19 Soit $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient ligne i est $c_i = i\ et\ \ A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$telle que : $a_{ij} = \frac{i}{j}$.

1. Déterminer $rg(A)$.
2. Calculer AC Puis résoudre le système linéaire $AX = C$.
3. Exprimer A^2 en fonction de A.
4. En déduire par l'absurde que A n'est pas inversible.

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & & \frac{1}{n} \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & & \frac{2}{n} \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \dots\dots & \frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{n}{1} & \frac{n}{2} & & \frac{n}{n} \end{pmatrix}$. Donc, $\forall i \in [\![2,n]\!], L_i = iL_1$. Ainsi, $A \underbrace{\sim_L}_{\substack{L_i \leftarrow L_i - iL_1 \\ pou \\ i\in[\![2,n]\!]}} \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$. Donc $rg(A) = 1$.

2.Notons $U_1, \dots, U_n$ $les\ colonnes\ de\ A.$

Alors $AC \underbrace{=}_{\substack{cours \\ cas\ particulier \\ 70.1}} \sum_{j=1}^n c_jU_j$. Or, $c_jU_j = jU_j = j\begin{pmatrix} \frac{1}{j} \\ \frac{2}{j} \\ \frac{3}{j} \\ \vdots \\ \frac{n}{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = C$. Donc $AC = \sum_{j=1}^n C = nC$.

En conséquence, $A\left(\frac{1}{n}C\right) = \frac{1}{n}(AC) = \frac{1}{n}(nC) = \left(\frac{1}{n}n\right)C = C$. Donc $\frac{1}{n}C = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{2}{n} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{n}{n} \end{pmatrix}$est une solution particulière du système linéaire $AX = C$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. $\underbrace{AX = 0}_{\substack{(SH) \\ \text{associé à } (S)}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \dots + \frac{1}{n}x_n = 0 \\ 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \dots + \frac{1}{n}x_n) = 0 \\ \vdots \\ n(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \dots + \frac{1}{n}x_n) = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_i \leftarrow L_i - iL_1 \\ pour \\ i\in[\![2,n]\!]}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \dots + \frac{1}{n}x_n = 0 \\ 0 = 0 \\ \vdots \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \dots - \frac{1}{n}x_n.$

Donc $sol(SH) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \dots - \frac{1}{n}x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} / x_2, .., x_n réels \right\}$. Alors le cours assure que $sol(S) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \dots - \frac{1}{n}x_n \\ \frac{2}{n} + x_2 \\ \vdots \\ \frac{n}{n} + x_n \end{pmatrix} / x_2, .., x_n réels \right\}$.

Ex 20 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $\tilde{P}(A) = 0$ et $X^n = P(X)Q(X) + R(X)\ \ tq\ \ \deg(R) < \deg(Q)$ alors $A^n = \tilde{R}(A)$.

1. Vérifier que A^2 est combinaison linéaire de $I\ et\ A$.
2. En déduire A^n.
3. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^{n+1} - 2A^n = A - 2I$.
5. On pose $G_n = A^n + A - 2I$. Exprimer G_{n+1} en fonction de G_n et retrouver A^n.

1. $A^2 = 3A - 2I$.
2. $P(X) = X^2 - 3X + 2$ est donc un polynôme annulateur de A. Cherchons le reste de la division euclidienne de X^n par P.

Le théorème de la division euclidienne assure qu'il existe Q et R tels que $X^n = PQ + R \; et \deg(R) < \deg(P) = 2.$ Alors $R = aX + b$ et

$X^n = (X-1)(X-2)Q + aX + b$. J'évalue en 1 et en 2 et je trouve : $1 = a + b$ et $2^n = 2a + b$. Donc $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$.

Ainsi, $X^n = P(X)Q(X) + (2^n - 1)X + 2 - 2^n$. Par suite, $A^n = P(A)Q(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$.

3. $3A - A^2 = 2I$ donc $\frac{3}{2}A - \frac{1}{2}A^2 = I \; et \, \frac{1}{2}(3I - A)A = I$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$.

4. Par récurrence :

Init°: $A^{1+1} - 2A = A^2 - 2A = 3A - 2I - 2A = A - 2I$ OK !

Propag°: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je suppose que $A^{n+1} - 2A^n = A - 2I$.

Alors, $A^{n+2} - 2A^{n+1} = (A^{n+1} - 2A^n)A = (A - 2I)A = A^2 - 2A = 3A - 2I - 2A = A - 2I$ OK !

J'en conclus par le théorème de récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^{n+1} - 2A^n = A - 2I$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G_{n+1} = A^{n+1} + A - 2I = 2A^n + A - 2I + A - 2I = 2A^n + 2A - 4I = 2G_n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, G_n = 2^{n-1}G_1$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n + A - 2I = 2^{n-1}(2A - 2I) = 2^n(A - I)$ et finaleemnt , $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$.

Ex 21 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda_0 I + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_n A^n = 0$ tq $\lambda_0 \neq 0$ alors $A[-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}I - \frac{\lambda_2}{\lambda_0}A - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0}A^{n-1}] = I$

1. Déterminer un polynôme annulateur de M.
2. En déduire $M^p \; tq \; p \in \mathbb{N}$.

1. $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix} = -M + 2I_3$. Donc $P(X) = X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2)$ est annulateur de M.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Cherchons le reste de la division euclidienne de X^p par P. Il existe un unique couple (Q,R) de polynômes à coefficients réels tels que $X^p = PQ + R \; et \deg(R) < \deg(P) = 2$. Alors $R(x) = aX + b$ et $X^p = (X-1)(X+2)Q(X) + aX + b$.

Donc, $1 = a + b$ et $(-2)^p = -2a + b$. Alors, $3a = 1 - (-2)^p$ et $3b = 2 + (-2)^p$.

Ainsi, $X^p = P(X)Q(X) + \frac{1}{3}((1 - (-2)^p)X + (2 + (-2)^p)\underbrace{1}_{X^0})$.

Par conséquent, $A^p = \frac{1}{3}((1 - (-2)^p)A + (2 + (-2)^p)\underbrace{I_3}_{A^0})$.

Ex 22 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et I_3. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Soit (E) l'équation $AX + XA = I_3$ d'inconnue $X \in M_3(\mathbb{R})$.
   a) Montre que toute solution de (E) commute avec A^2 puis avec A.
   b) En déduire toutes les solutions de (E).

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ 4 & 4 & 13 \end{pmatrix} = 4A - 3I_3$. Par conséquent, $A^2 - 4A = -3I_3$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)(A^2 - 4A) = I_3 \; et$ finalement et $\left(-\frac{1}{3}\right)(A - 4I)A = I_3$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)(A - 4I)$.

2.a) Supposons que $X \in M_3(\mathbb{R}) \; et \; AX + XA = I_3$ et montrons que $XA^2 = A^2X$ puis $AX = XA$.

Comme $AX + XA = I_3$, $A(AX + XA) = AI_3 = A \; et \; (AX + XA)A = I_3A = A$; donc $A^2X + AXA = A = AXA + XA^2$. J'en déduis que : $A^2X = XA^2$. De plus, $A^2 = 4A - 3I_3$. Par conséquent, $(4A - 3I_3)X = X(4A - 3I_3)$ i.e. $4AX - 3X = 4XA - 3X. \, Donc \; 4AX = 4XA$ et ainsi, $AX = XA$. Donc A et X commuent.

b) $AX + XA = I_3 \Leftrightarrow \begin{cases} AX + XA = I_3 \\ AX = XA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2AX = I_3 \\ AX = XA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}A^{-1}(2AX) = \left(\frac{1}{2}A^{-1}\right)I_3 \\ AX = XA \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car \\ \frac{1}{2}A^{-1} commute \\ avec\ A}} X = \frac{1}{2}A^{-1}$. Donc, $Sol = \left\{\frac{1}{2}A^{-1}\right\}$.

Ex 23 Soit $u_0 = 2 \; et \; v_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - v_n \; et \; v_{n+1} = 2u_n + v_n$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice A telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
2. Vérifier que A^2 est combinaison linéaire de $I \; et \; A$.
3. En déduire A^n pou $n \in \mathbb{Z}$.
4. En déduire $u_n \; et \; v_n$ en fonction de n.

Ex 24 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $P(A)$ où $P(X) = X^3 - 1$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
2. Calculer $B = \sum_{k=0}^{100} A^k$.

Ex 25 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ .Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$ telle que : $A^3 - A^2 + A - I = O$.

1. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme combinaison linéaire de I, A, A^2.
2. Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}, \exists(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3, A^n = a_nA^2 + b_nA + c_nI$
3. Déterminer une matrice B telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
4. Calculer B^r, pour r entier naturel. En déduire A^r.

1.$A^3 - A^2 + A - I = O$ $donc$ $A^3 - A^2 + A = I$ et $enfin$ $(A^2 - A + I)A = I$. Donc A est inversible et $A^{-1} = A^2 - A + I$.

$A^0 = I = 0A^2 + 0A + 1I$. Donc $a_0 = 0, b_0 = 0$ et $c_0 = 1$ conviennent.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $\exists(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3, A^n = a_nA^2 + b_nA + c_nI$.
Alors $A^{n+1} = A^nA = (a_nA^2 + b_nA + c_nI)A = a_nA^3 + b_nA^2 + c_nA = a_n(A^2 - A + I) + b_nA^2 + c_nA = (a_n + b_n)A^2 + (c_n - a_n)A + a_nI$.
Posons $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = c_n - a_n$ et $c_{n+1} = a_n$. Alors, $A^{n+1} = a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A + c_{n+1}I$.
Le théorème de récurrence assure alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3, A^n = a_nA^2 + b_nA + c_nI$.
3.La matrice est nécessairement de $type$ $(3,3)$(car $type(3,1) = type(3,3) \times type(3,1)$)
$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = c_n - a_n \\ c_{n+1} = a_n \end{cases}$ donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + b_n \\ c_n - a_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Donc $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient.
4.$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.
Ainsi, $\forall r \in \mathbb{N}, B^r = \begin{cases} I \ si \ r = 4k \\ B \ si \ r = 1 + 4k \\ B^2 si \ r = 2 + 4k \\ B^3 si \ r = 3 + 4k \end{cases}$.
$\forall n, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Montrons par récurrence sur n que : $\forall n, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = B^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = B^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.Alors $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = BB^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = B^{n+1}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$. OK !
Le théorème de récurrence assure que $\forall n, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = B^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} si \ n = 4k$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} si \ n = 1 + 4k,$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = B^{2}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} si \ n = 2 + 4k,$, et $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = B^3\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} si \ n = 3 + 4k.$
Cela signifie : $\begin{cases} a_{4k} = a_0 = 0 \\ b_{4k} = b_0 = 0 \\ c_{4k} = c_0 = 1 \end{cases} \begin{cases} a_{4k+1} = a_0 + b_0 = 0 \\ b_{4k+1} = -a_0 + c_0 = 1 \\ c_{4k+1} = a_0 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} a_{4k+2} = b_0 + c_0 = 1 \\ b_{4k+2} = -b_0 = 0 \\ c_{4k+2} = a_0 + b_0 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} a_{3+4k} = c_0 = 1 \\ b_{3+4k} = a_0 - c_0 = -1. \\ c_{3+4k} = b_0 + c_0 = 1 \end{cases}$
Donc $\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{4k} = I \quad , \quad A^{4k+1} = A \quad , \quad A^{4k+2} = A^2$ et $A^{4k+3} = A^2 - A + I$.

Puissances et inverse d'une matrice grâce à une matrice semblable

Définition : les matrices A et B sont **semblables** lorsqu'il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

Ex 26 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} i & -2i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer P est inversible et donner P^{-1}.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. En déduire A^k tel que $k \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que A est inversible et déterminer A^k tel que $k \in \mathbb{Z}$.

Si $A = P^{-1}BP$ alors $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P^{-1}B^kP$ et

(B inversible $\Longrightarrow A$ inversible et $A^{-1} = P^{-1}B^{-1}P$).

Ex 27 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
2. Montrer que : $AP = PD$.
3. En déduire que A est inversible et expliciter A^{-1} et A^k tel que $k \in \mathbb{N}$.
4. Soit $x, y, et\ z$ trois FONCTIONS dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 2 \end{cases}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = 5x(t) - y(t) + 9z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$.

Et on définit les fonctions a , b et c telles que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\underbrace{\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}}_{Y(t)} = P^{-1} \times \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}_{X(t)}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$

a. Montrer que : $a, b, et\ c$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = P^{-1} \times X'(t)$.
b. Trouver une relation entre $A, X(t)$ et $X'(t)$ (valable pour tout réel t).

c. En déduire une relation entre $D, Y(t) et\ Y'(t)$ (valable pour tout réel t).
d. En déduire que a , $b\ et\ c$ vérifient des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et trouver les expressions de a , $b\ et\ c$.
e. En déduire les expressions de $x, y, et\ z$.

Inversibilité d'une matrice grâce à l'obtention d'une relation de la forme $AB = I$

Ex 28 Soit G l'ensemble des matrices de la forme $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où x réel.

1. Montrer que G est stable pour le produit matriciel. G est –il stable par somme ou multiplication par un scalaire ?
2. Montrer que G contient l'élément neutre pour le produit matriciel.
3. Montrer que toute matrice de G est inversible et que son inverse appartient à G .

EX 29 Soit $G = \left\{ M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x, y, z\ réels \right\}$.

1. Montrer que G est stable pour le produit matriciel mais pas par combinaison linéaire de ses éléments.
2. Montrer que tout élément de G est inversible d'inverse dans G .
3. Décrire $\left(M(x,y,z)\right)^k tq\ k \in \mathbb{Z}$.

1. $\forall (x,y,z,x',y',z') \in \mathbb{R}^6, \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & 1 & z' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+x' & y'+xz'+y \\ 0 & 1 & z+z' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$

Mais, $2\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & 1 & z' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2x+x' & 2y+y' \\ 0 & 3 & 2z+z' \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \notin G.$

Donc G est stable par produit mais pas par combinaison linéaire.

2.$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, rg\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$ Donc tout élément $M(x,y,z)$ de G est inversible.

De plus, $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -x & xz-y \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x-x & xz-y-xz+y \\ 0 & 1 & z-z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$ Donc $(M(x,y,z))^{-1} = M(-x,-y,xz-y) \in G.$

3.Soit $k \in \mathbb{N}$. $M(x,y,z) = I + N\ avec\ N = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. N est nilpotente car $N^3 = 0$ et N commute avec I. Donc,

$[M(x,y,z)]^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} N^j I^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} N^j = \binom{k}{0} N^0 + \binom{k}{1} N^1 + \binom{k}{2} N^2 + 0 = I + kN + \frac{k(k-1)}{2} N^2$

$[M(x,y,z)]^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & kx & ky + \frac{k(k-1)}{2}xz \\ 0 & 1 & kz \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ex 30 $\forall t \in \mathbb{R}, A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$ et $G = \{A(t) / t \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que :$\forall t \in \mathbb{R}, A(t) = B + tC$ où $B\ et\ C$ sont des matrices indépendantes de t à déterminer.
2. Montrer que G est stable pour le produit matriciel .
3. Déterminer les réels t tel que $A(t)$ inversible . Le cas échéant , $A(t)^{-1}$ appartient-il à G ?

Ex 31 Soit $n \in \mathbb{N}^*\ et\ \ \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}\ et\ A = \left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2}$.Calculer $A\bar{A}$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Posons $a_{kl} = \omega^{(k-1)(l-1)}\ et\ \ b_{kl} = \overline{\omega^{(k-1)(l-1)}} = \overline{\omega}^{(k-1)(l-1)}$. Posons $C = A\bar{A} = (c_{kl})$. Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$.

$c_{kl} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks} b_{sl} = \sum_{s=1}^{n} \omega^{(k-1)(s-1)} \overline{\omega}^{(s-1)(l-1)} = \sum_{s=1}^{n} (e^{\frac{2i\pi}{n}})^{(k-1)(s-1)-(s-1)(l-1)}$

$$\underbrace{=}_{\substack{car \\ (k-1)(s-1)-(s-1)(l-1)= \\ ks-ls-k+l=(k-l)s-(k-l) \\ =(k-l)(s-1)}} \sum_{s=1}^{n} (e^{\frac{2i\pi}{n}})^{(k-l)(s-1)} = \sum_{t=0}^{n-1} (e^{\frac{2i\pi(k-l)}{n}})^t = \begin{cases} \dfrac{1-\left(e^{\frac{2i\pi(k-l)}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi(k-l)}{n}}}\ si\ e^{\frac{2i\pi(k-l)}{n}} \neq 1 \\ n\ si\ e^{\frac{2i\pi(k-l)}{n}} = 1 \end{cases} \overset{\left(e^{\frac{2i\pi(k-l)}{n}}\right)^n = e^{2i\pi(k-l)} = 1}{\triangleq} \begin{cases} 0\ si\ (k-l) \not\equiv 0[n] \\ n\ si\ (k-l) \equiv 0[n] \end{cases}.$$

Comme $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$, $(k-l) \equiv 0[n] \Leftrightarrow k=l$. Donc, $c_{kl} = \begin{cases} 0 \; si \; k \neq l \\ n \; si \; k = l \end{cases}$. Ainsi, $A\bar{A} = nI$. Par conséquent, $A\left(\frac{1}{n}\bar{A}\right) = I$. Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n}\bar{A}$

Ex 32 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ $\;et\;$ $A = \left(1-\delta_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

1. <u>Première méthode</u> : $Posons \; a_{ij} = 1 - \underbrace{\delta_{ij}}_{\substack{symbole \\ de \\ Kronesker}}$.

Alors $(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(1-\delta_{ik})(1-\delta_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n}\delta_{ik} - \sum_{k=1}^{n}\delta_{kj} + \sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}\delta_{kj} = n - \delta_{ii} - \delta_{jj} + \delta_{ii}\delta_{ij}$

$(A^2)_{ij} = \begin{cases} n-1 \; si \; i=j \\ n-2 \; si \; i\neq j \end{cases}$. Donc, $A^2 = (n-2)A + (n-1)I$.

<u>Deuxième méthode :</u> $A = \left(1-\delta_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = J - I$.

Comme I et J commutent, $A^2 = J^2 - 2IJ + I^2 = nJ - 2J + I = (n-2)J + I = (n-2)(A+I) + I = (n-2)A + (n-1)I$

2. Alors, $[A^2 - (n-2)A] = (n-1)I \; et \; \frac{1}{n-1}[A-(n-2)I]A = I$. Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n-1}[A-(n-2)I]$.

Inversibilité d'une matrice grâce à la caractérisation[**A inversible $\Leftrightarrow$ $(AX=0 \Rightarrow X=0)$**]

Ex 33 Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels strictement positifs et $A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & & 1+a_n \end{pmatrix}$.

1. Pour $X \in M_{n,1}(K)$, calculer la matrice X^TAX.
2. En déduire que A est inversible .

Ex 34 Matrices à diagonales dominantes

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice carrée d'ordre n telle que : $\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

Nous allons prouver par l'absurde que A est inversible . Pour cela, imaginons un instant que A n'est pas inversible.

1. Justifier qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $X \neq 0 \; et \; AX = 0$.
2. Justifier que $max(|x_1|, |x_2|.., |x_n|) > 0 \; et \; \exists i_0 \in [\![1,n]\!] / |x_{i_0}| = max(|x_1|, |x_2|.., |x_n|)$.
3. Montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$.
4. En déduire que $|a_{i_0i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0j}|$.
5. Conclure à une absurdité et conclure .

Inversibilité d'une matrice par résolution d'un système :

[**A inversible $\Leftrightarrow$ $(\forall Y, le \; système \; linéaire \; AX = Y \; admet \; une \; unique \; solution^{**})$**]

- **$cette \; unique \; solution \; sera, le \; cas \; échéant, \; X = A^{-1}Y.$**

Ex 35 Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la matrice carrée d'ordre n telle que : $a_{ij} = \begin{cases} 0 & si \; i > j \\ j-i+1 & si \; i \leq j \end{cases}$

1. Ecrire A sous forme d'un tableau matriciel (très clair !!)
2. Justifier que A est inversible puis déterminer A^{-1} .
3. Soit J la matrice carrée d'ordre n de coefficients tous égaux à 1. Déterminer une matrice B telle que : $AB = J$.

Ex 34 Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et si oui calculer leur inverse .

1. $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}$ où a, b réels.
2. $A = \begin{pmatrix} 9 & 21 & 3 \\ 3 & 17 & -4 \\ -5 & -29 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ⋰ & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & (0) & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 2 & 1 \\ & (0) & & & 1 & 2 \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ & 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & ⋰ & 0 \\ \vdots & 0 & 3 & 0 & \vdots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

4. $F=(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\in M_n(\mathbb{R})\ telle\ que\colon \begin{cases} a_{ii}=1 \\ a_{i(i+1)}=2 \\ a_{ij}=0\ si\ j\neq i\ et\ j\neq i+1 \end{cases}.$

1. $detM=3+8=11\neq 0\ donc\ M\ est\ inversible\ et\ M^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$

2. $\det N=a(a+b)+b^2=a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2. Donc\ detN=0\Leftrightarrow\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2=0\ \ et\ \ \frac{3}{4}b^2=0\Leftrightarrow b=0=a.$

Donc, N est inversible sietssi $a\neq 0\ ou\ b\neq 0.\ Et, dans\ ce\ cas, N^{-1}=\frac{1}{a^2+ab+b^2}\begin{pmatrix}a+b & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.

3 ;$TX=Y\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&⋰&0\\ \vdots&0&1&0&\vdots\\0&1&0&0&\vdots\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_n=y_1\\x_{n-1}=y_2\\ \vdots\\x_1=y_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&⋰&0\\ \vdots&0&1&0&\vdots\\0&1&0&0&\vdots\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. Donc T inversible et $T^{-1}=T$.

$rg(H)=n\ donc\ H\ est\ inversible.$

$$HX=Y\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&&&\\0&1&2&\ddots&(0)&\\0&0&1&\ddots&&\\&&&\ddots&2&1\\&(0)&&&1&2\\&&&&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=y_1\\x_2+2x_3+x_4=y_2\\ \vdots\\x_{n-3}+2x_{n-2}+x_{n-1}=y_{n-3}\\x_{n-2}+2x_{n-1}+x_n=y_{n-2}\\x_{n-1}+2x_n=y_{n-1}\\x_n=y_n\end{cases}\overset{(**)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x_1=y_1-2y_2+3y_3+\cdots+(-1)^{n-1}ny_n\\x_2=y_2-2y_3+3y_4+\cdots+(-1)^{n-2}(n-1)y_n\\ \vdots\\x_{n-3}=y_{n-3}-2y_{n-2}+3y_{n-1}-4y_n\\x_{n-2}=y_{n-2}-2y_{n-1}+3y_n\\x_{n-1}=y_{n-1}-2y_n\\x_n=y_n\end{cases}$$

Justifions par récurrence finie et double $(**)$**: conjecture** $\forall k\in[\![2,n-1]\!], x_{n-k}\overset{(H_k)}{=}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}(k+1-j)y_{n-j}$

H_k est vraie pour $k=2$ et $k=3$ car $x_{n-2}=y_{n-2}-2y_{n-1}+3y_n$ et $x_{n-3}=y_{n-3}-2y_{n-2}+3y_{n-1}-4y_n$

Soit $k\in[\![3,n-2]\!]$. Je suppose $H_{k-1}\ et\ H_k$ vraies.

Je sais donc que $x_{n-k}=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}(k+1-j)y_{n-j}\ \ et\ x_{n-(k-1)}=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-1-j}(k-1+1-j)y_{n-j}$

Alors, $x_{n-(k+1)}=x_{n-k-1}=y_{n-k-1}-2x_{n-k}-x_{n-k+1}=y_{n-k-1}-2\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}(k+1-j)y_{n-j}-\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-1-j}(k-j)y_{n-j}$

$$x_{n-k-1}=y_{n-k-1}-2(-1)^{k-k}(k+1-k)y_{n-k}-\sum_{j=0}^{k-1}[(-1)^{k-1-j}(k-j)y_{n-j}+2(-1)^{k-j}(k+1-j)y_{n-j}]$$

$$x_{n-k-1}=y_{n-k-1}-2y_{n-k}-\sum_{j=0}^{k-1}[(-1)^{k-1-j}(k-j)+2(-1)^{k-j}(k-j)+2(-1)^{k-j}]y_{n-j}$$

$$x_{n-k-1}=y_{n-k-1}-2y_{n-k}-\sum_{j=0}^{k-1}[-(-1)^{k-j}(k-j)+2(-1)^{k-j}(k-j)+2(-1)^{k-j}]y_{n-j}$$

$$x_{n-k-1}=y_{n-k-1}-2y_{n-k}-\sum_{j=0}^{k-1}[(-1)^{k-j}(k-j+2)]y_{n-j}$$

$$x_{n-(k+1)}=y_{n-(k+1)}-2y_{n-k}+\sum_{j=0}^{k-1}[(-1)^{k+1-j}(k+2-j)]y_{n-j}$$

$$x_{n-(k+1)}=\sum_{j=0}^{k+1}[(-1)^{k+1-j}(k+2-j)]y_{n-j}$$

Donc, $H_{k-1}\ et\ H_k$ vraies$\Longrightarrow H_{k+1}$ vraies.

J'en conclus que : $\forall k\in[\![2,n-1]\!],\ H_k$ vraie.

Alors, $HX=Y\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&3&\cdots&&(-1)^{n-1}n\\0&1&-2&3&&(-1)^{n-2}(n-1)\\&&1&-2&&\\&&&1&\ddots&-2\\&&&0&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. Donc, $H^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&3&\cdots&&(-1)^{n-1}n\\0&1&-2&3&&(-1)^{n-2}(n-1)\\&&1&-2&&\\&&&1&\ddots&-2\\&&&0&&1\end{pmatrix}$

$rg(K)=n\ donc\ K\ est\ inversible.$

$$KX=Y\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=y_1\\x_2+2x_3+x_4+..+(n-1)x_n=y_2\\ \vdots\\x_{n-3}+2x_{n-2}+3x_{n-1}+4x_n=y_{n-3}\\x_{n-2}+2x_{n-1}+3x_n=y_{n-2}\\x_{n-1}+2x_n=y_{n-1}\\x_n=y_n\end{cases}\overset{(**)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x_1=y_1-2y_2+y_3\\x_2=y_2-2y_3+y_4\\ \vdots\\x_{n-3}=y_{n-3}-2y_{n-2}+y_{n-1}\\x_{n-2}=y_{n-2}-2y_{n-1}+y_n\\x_{n-1}=y_{n-1}-2y_n\\x_n=y_n\end{cases}$$

Justifions par récurrence finie et double $(**)$**: conjecture** $\forall k\in[\![2,n-1]\!], x_{n-k}\overset{(H_k)}{=}y_{n-k}-2y_{n-k+1}+y_{n-k+2}$.

H_k est vraie pour $k=2$ et $k=3$ puisque $x_{n-2}=y_{n-2}-2y_{n-1}+y_n\ et\ x_{n-3}=y_{n-3}-2y_{n-2}+y_{n-1}$.

Soit $k \in [\![3, n-2]\!]$. Je suppose $H_2, \dots, H_{k-1}$ *et* H_k vraies. Je sais donc que , $\forall j \in [\![2,k]\!], x_{n-j} \overset{(H_k)}{\triangleq} y_{n-j} - 2y_{n-j+1} + y_{n-j+2}$

Alors, $x_{n-(k+1)} = y_{n-(k+1)} - \sum_{j=0}^{k}(k+2-j)x_{n-j}$

$x_{n-(k+1)} = y_{n-(k+1)} - \sum_{j=2}^{k}(k+2-j)(y_{n-j} - 2y_{n-j+1} + y_{n-j+2}) - (k+2)x_n - (k+1)x_{n-1}$

$x_{n-(k+1)} = y_{n-(k+1)} - \sum_{j=2}^{k}(k+2-j)(y_{n-j}) + 2\sum_{j=2}^{k}(k+2-j)(y_{n-j+1}) - \sum_{j=2}^{k}(k+2-j)(y_{n-j+2}) - (k+2)y_n - (k+1)(y_{n-1} - 2y_n)$

$x_{n-(k+1)} = y_{n-(k+1)} - \sum_{j=2}^{k}(k+2-j)(y_{n-j}) + 2\sum_{j'=1}^{k-1}(k+2-j'-1)(y_{n-j'}) - \sum_{j''=0}^{k-2}(k+2-j''-2)(y_{n-j''}) + ky_n - (k+1)y_{n-1}$

$x_{n-(k+1)} = y_{n-(k+1)} - \sum_{j=2}^{k}(k+2-j)(y_{n-j}) + 2\sum_{j=1}^{k-1}(k+1-j)(y_{n-j}) - \sum_{j=0}^{k-2}(k-j)(y_{n-j}) + ky_n - (k+1)y_{n-1}$

$x_{n-(k+1)} = y_{n-(k+1)} - \sum_{j=2}^{k-2}\underbrace{\left(2(k+1-j) - (k+2-j) - (k-j)\right)}_{=0} y_{n-j} - 2y_{n-k} - 3y_{n-k+1} + 2ky_{n-1} + 2y_{n-k+1} - ky_n - (k-1)y_{n-1} + ky_n - (k+1)y_{n-1}$

$x_{n-(k+1)} = y_{n-(k+1)} - 2y_{n-k} - y_{n-k+1}$ OK !!!

CCL: Le théorème de récurrence forte permat alors de conclure que : $\forall j \in [\![2,k]\!], x_{n-j} \overset{(H_k)}{\triangleq} y_{n-j} - 2y_{n-j+1} + y_{n-j+2}$.

Je peux alors conclure que $K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & 1 & -2 & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 1 & \ddots & -2 \\ 0 & \cdots & & 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Ex 35 Déterminer les matrices B telles que $AB = C$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. .

Résultats généraux divers

Ex 36 Soit M une matrice carrée d'ordre n telle que la somme des coefficients d'une ligne de M est la même quelle que soit la ligne. Montrer que M^2 possède la même propriété.

Soit $M = (m_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \in M_n(K)$ telle qu'il existe $s \in K$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = s$.

Soit $M^2 = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $\forall j \in [\![1,n]\!], a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}m_{kj}$.

Donc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} m_{ik}m_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} m_{ik}m_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} m_{kj}}_{=s}\right) = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \times s = s\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_{ik}}_{=s}\right) = \underbrace{s^2}_{\substack{indépendant \\ de\ i.}}$.

Donc M^2 possède la même propriété que M.

Ex 37 Dans $M_n(K)$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne i et colonne j qui vaut 1.

1. Démontrer que : $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ où δ_{jk} est le symbole de Kronecker.
2. Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice carrée d'ordre n .
   a. Ecrire A comme une combinaison linéaire des n^2 matrices E_{ij} .
   b. Calculer AE_{ij} *et* $E_{ij}A$.
   c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que A et E_{ij} commutent .
   d. Décrire $C = \{A \in M_n(K) / \forall M \in M_n(K), AM = MA\}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices.

$AE_{ij} = matrice\ dont\ toutes\ les\ colonnes\ sont\ nulles\ \ et\ E_{ij}\ A.$

Ex 38 Matrices stochastiques

Définition : Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ A est dite **stochastique** lorsque $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

1. Démontrer que si P *et* Q sont stochastiques (réelles et carrées d'ordre n)alors PQ l'est aussi .
2. Soit U la colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 .

a) Montrer que : P est stochastique ***si et ssi*** $PU = U$.

b) Redémontrer alors le résultat 1. avec cette nouvelle caractérisation des matrices stochastiques.

c) Montrer que si P est stochastique et inversible alors P^{-1} est stochastique.

Ex 39 Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. Montrer que A et A^T commutent *sietssi* A est diagonale.

Ex 40 Matrice positive

Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice de $S_n(\mathbb{R})$. A est dite positive lorsque $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^T AX \geq 0$.

Soit $D = diag(d_1, \dots, d_n)$.

1. Calculer $X^T DX\ pour\ X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. En déduire une CNS pour que D soit positive.

Ex 41 Soit $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$ avec tous les λ_k distincts . Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que : $A\ et\ D$ commutent $si\ et\ ssi\ A$ est diagonale .
2) On suppose que : $D = P^{-1}AP$ où $P \in GL_n(K)$. Soit λ un scalaire

Montrer que : le système $AX = \lambda X$ admet une solution non nulle ***si et ssi*** $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n\}$

Ex 42 Matrices semblables, matrices équivalentes.

Soit $A\ et\ B$ deux matrices carrées d'ordre n.

On dit que A est équivalente à B lorsqu'il existe deux matrices inversibles $P\ et\ Q$ telles que $A = PBQ$.
On dit que A est semblable à B lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.

1) Comment par des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes de A et de B peut-on savoir si A et B sont équivalentes ?
2) Montrer que :
   a) A est équivalente(resp . semblable) à A
   b) si A est équivalente(resp . semblable) à B alors B est équivalent (resp . semblable)e à A .
   c) si A est équivalente(resp . semblable) à B et B est équivalente(resp . semblable) à C alors A est équivalente(resp . semblable) à C .
   d) Si A est équivalente (resp . semblable) à B alors $rg(A) = rg(B)$.
   e) Si A est semblable à B alors $det(A) = det(B)$.