Programme de colle 22

Chapitre 15 Matrices

Cf programme précédent.

Chapitre 16 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels . Familles finies de vecteurs.

I Généralités.

1. Définition et règles de calcul

P1 $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \vec{x}+\vec{y} \in E\ \ et\ \ \forall\vec{x} \in E, \forall\alpha \in K,\ \ \alpha.\vec{x} \in E$ **(E est stable par addition interne et multiplication externe).**

P2. (+) est ASSOCIATIVE et COMMUTATIVE i.e. $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in E^3,\ \ (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ et $\vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$

P3. (+) a un élément NEUTRE noté $\overrightarrow{O_E}$ ou $\vec{O}$ qui vérifie : $\forall\vec{x} \in E,\ \ \vec{x}+\vec{O} = \vec{x}$.

P4. Tout élément $\vec{x}$ de E a un unique SYMETRIQUE pour $(+)$. $\forall\vec{x} \in E, \exists!\,\vec{y} \in E/\vec{x}+\vec{y} = \vec{O}$. Alors, $\vec{y}\ est\ noté - \vec{x}$ et appelé l'opposé de $\vec{x}$. $(\vec{z}+(-\vec{x})est\ désormais\ noté\ \vec{z}-\vec{x})$

P5. $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \forall(\alpha,\beta) \in K^2, \alpha.(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha.\vec{x}+\alpha.\vec{y}\ \ et\ \ (\alpha+\beta).\vec{x} = \alpha.\vec{x}+\beta.\vec{x}$ ((.) est distributive sur $(+)$)

P6. $\forall\vec{x} \in E, \forall(\alpha,\beta) \in K^2, \alpha.(\beta.\vec{x}) = \alpha\beta.\vec{x} = \beta.(\alpha.\vec{x})$ (associativité mixte)

P7. $\forall\vec{x} \in E, 1.\vec{x} = \vec{x}$

C1 $\forall\vec{x} \in E, \forall\alpha \in K.\ (\alpha.\vec{x} = \vec{O}$ **si et ssi** $\alpha = 0\ ou\ \vec{x} = \overrightarrow{O_E}$)

C2 $\forall\vec{x} \in E, \forall\alpha \in K, -\vec{x} = (-1).\vec{x}\ \ \ et\ \ -(\alpha.\vec{x}) = (-\alpha).\vec{x} = \alpha.(-\vec{x})$

C3 $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \forall(\alpha,\beta) \in K^2\ (\alpha-\beta).\vec{x} = \alpha\vec{x}-\beta\vec{x}\ et\ \alpha.(\vec{x}-\vec{y}) = \alpha\vec{x}-\alpha\vec{y}$

Généralisation des propriétés $P2$ à 7 : Soit $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p$ des vecteurs d'un $K\ -e-v\ \ E$ et $\alpha,\alpha_1,\dots,\alpha_p$ des éléments de K .

$\sum_{k=1}^{p}\vec{u}_k = \sum_{k=1}^{r}\vec{u}_k + \sum_{k=r+1}^{p}\vec{u}_k$ où $r \in [\![1,p-1]\!]$.

$\sum_{k=1}^{p}\vec{u}_k = \sum_{i=0}^{p-1}\vec{u}_{p-i}$

$\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}\vec{u}_{kj}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p}\vec{u}_{kj}\right)$

$\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\,\vec{x} = \left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\right)\vec{x}$

$\alpha\sum_{k=1}^{p}\vec{u}_k = \sum_{k=1}^{p}\alpha\vec{u}_k$

Si $\vec{x},\vec{y}\ et\ \vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p$ sont des vecteurs de E alors

tout vecteur de la forme $\alpha.\vec{x}+\beta.\vec{y}\ \ tq\ \alpha,\beta \in K$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}\ et\ \vec{y}$ et est élément de E.

tout vecteur de la forme $\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\vec{u}_k\ tq\ \alpha_1,\dots,\alpha_p \in K$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p$ et est élément de E.

Tout espace vectoriel est stable par combinaison linéaire.

2. Espaces vectoriels de référence.

Munis de leur addition et da leur multiplication externe usuelles ,

P (l'ensemble des vecteurs du plan), E (l'ensemble des vecteurs de l'espace géométrique)sont des $\mathbb{R}-\mathrm{e}-\mathrm{v}$

$K, K^n, M_{n,p}(K), K^{\mathbb{N}}, F(\Omega,K)$, $K[X], K_m[X]$, ainsi parés ces ensembles sont des K-e-v

3. Espace produit- Espace de fonctions.

Structure de K-e-v. de $\mathfrak{F}(T,E)$ où E est un K-e-v et T un ensemble.

II Sous-espaces vectoriels.

1. Définition

Deux définitions équivalentes d'un sous-e-v.

Soit $(E,+,.)$ un K-e-v. F est un sous-espace-vectoriel de E lorsque

- $F \subset E$
- $\overrightarrow{O_E} \in F$ OU $F \neq \emptyset$
- $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in F^2, \forall\alpha \in K, \alpha\vec{x} \in F\ et\ \vec{x}+\vec{y} \in F$ OU $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in F^2, \forall(\alpha,\beta) \in K^2, \alpha\vec{x}+\beta\vec{y} \in F$.

Tout ss-e-v d'un K-e-v est un K-e-v et est stable par somme, multiplication par un scalaire, par combinaison linéaire.

2. Sous-e-v engendré par une famille de vecteurs.

Soit E un K-e-v et $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_p}$ des vecteurs de E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_p}$ est un ss-e-v de E noté $vect(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_p})$ et appelé ss-e-v engendré par la famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_p})$

$(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_p})$est une famille génératrice de $vect(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_p})$.

Droite vectorielle et plan vectoriel. Une droite vectorielle de E est un ss-e-v engendré par un vecteur non nul de E.

Un plan vectoriel de E est un ss-e-v de E engendré par deux vecteurs non colinéaires de E.

$vect(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_p})$ est inclus dans tout ss-e-v de E contenant $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_p}$ et est donc le plus petit ss-e-v (au sens de l'inclusion) contenant la famille $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_p}$.

Soit X un sous-ensemble de E et $vect(X)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d' éléments de X . Alors, $vect(X)$ est un ss-e-v de E et est contenu dans tout s—e-v de E contenant X. $vect(X)$ est appelé l'espace vectoriel engendré par X.

3. Intersection et somme de ss-e-v

- Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de ss-e-v de E. Alors $\bigcap_{i\in I}F_i = \{\vec{x} \in E/\forall i \in I, \vec{x} \in F_i\}$ est un sous-e-v de E.
- Soit F et G deux ss-e-v de E. Alors $F+G = \{\vec{x}+\vec{y}/\vec{x} \in F, \vec{y} \in G\} = \{\vec{u} \in E/\exists\vec{x} \in F, \vec{y} \in G, \vec{u} = \vec{x}+\vec{y}\}$ est ss-e-v- de E appelé ss-e-v somme de F et G .
- Si $F = vect(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_p})$ et $G = vect(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_q})$ alors $F+G = vect(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_p},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_q})$.

4. Somme directe et sous-espaces supplémentaires.

Soit F et G deux ss-e-v de E.

- F et G sont en somme directe lorsque tout élément de $F + G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
- ~~F et G sont supplémentaires dans E lorsque tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. On note alors $E = F \oplus G$. (définition)~~
- F et G sont en somme directe sietssi $F \cap G = \{\overrightarrow{O_E}\}$. (caractérisation ou définition équivalente)
- ~~F et G sont supplémentaires dans E sietssi $F \cap G = \{\overrightarrow{O_E}\}$ et $F + G = E$. (caractérisation ou définition équivalente)~~

Questions de cours :

A) Bien connaître les DEFINITIONS et les énoncés des propriétés.

B) Retravailler les démonstrations des propriétés de cours suivantes :

QDC 1 Démontrer que dans le $K - e - v$ $(E, +, .)$, $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K.$ $(\alpha.\vec{x} = \vec{O}$ **si et ssi** $\alpha = 0 \; ou \; \vec{x} = \overrightarrow{O_E}$)

QDC 2 Soit E un $K - e - v$ et $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E. Montrer que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ est un ss-e-v de E.

QDC 3 Soit E un $K - e - v$ .Démontrer que l'intersection de ss-e-v de E est un ss-e-v de E.

QDC 4 Démontrer la caractérisation de deux espaces en somme directe ~~et celle de deux ss-e-v supplémentaires~~.