Espaces vectoriels et sous-espaces-vectoriels.
Familles de vecteurs dans un espace vectoriel.

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n *et* p désignent des entiers naturels non nuls et m un entier naturel.

1 NB :

1) **deux fonctions sont égales sietssi elles ont le même domaine de définition et associent la même image à chaque élément de ce domaine de définition.**
2) **deux ensembles sont égaux sietssi ils contiennent exactement les mêmes éléments sietssi tout élément de l'un est élément de l'autre et réciproquement (i.e. l'un est inclus dans l'autre et l'autre est inclus dans l'un-double inclusion).**
3) **un ensemble F est inclus dans un ensemble E lorsque $\forall x \in F, x \in E$.**

I Généralités

1. Définition

2 Def : Un **espace vectoriel sur K** (K-e-v) est un ensemble non vide E muni de deux lois(opérations) : $(+)$ addition interne *et* $(\,.\,)$ multplication par un scalaire appelée aussi multiplication externe, qui vérifient :

P1 $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \vec{x}+\vec{y} \in E \quad et \quad \forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K,\ \alpha.\vec{x} \in E$ **(E est stable par addition interne et multiplication externe).**

P2. (+) est ASSOCIATIVE et COMMUTATIVE i.e. $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in E^3,\ (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ et $\vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$

P3. (+) a un élément NEUTRE noté $\overrightarrow{O_E}$ ou $\vec{O}$ qui vérifie : $\forall \vec{x} \in E,\ \vec{x}+\vec{O} = \vec{x}$.

P4. Tout élément $\vec{x}$ de E a un unique SYMETRIQUE pour $(+)$. $\forall \vec{x} \in E, \exists! \vec{y} \in E / \vec{x}+\vec{y} = \vec{O}$. Alors, $\vec{y}$ *est noté* $-\vec{x}$ et appelé l'opposé de $\vec{x}$.

P5. $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \forall(\alpha,\beta) \in K^2, \alpha.(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha.\vec{x}+\alpha.\vec{y} \ \ et \ \ (\alpha+\beta).\vec{x} = \alpha.\vec{x}+\beta.\vec{x}$ ((.) est distributive sur (+))

P6. $\forall \vec{x} \in E, \forall(\alpha,\beta) \in K^2, \alpha.(\beta.\vec{x}) = \alpha\beta.\vec{x} = \beta.(\alpha.\vec{x})$ (associativité mixte)

P7. $\forall \vec{x} \in E, 1.\vec{x} = \vec{x}$ (1 élément neutre pour (.))

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs**, $\overrightarrow{O_E}$ ou $\vec{O}$ est le vecteur nul de E. Les éléments de K sont des **scalaires**.

3 NB : En maths, un vecteur peut être une matrice, un polynôme, une fonction, une suite, un vecteur du plan ou de l'espace…*Cf* espaces vectoriels de référence.

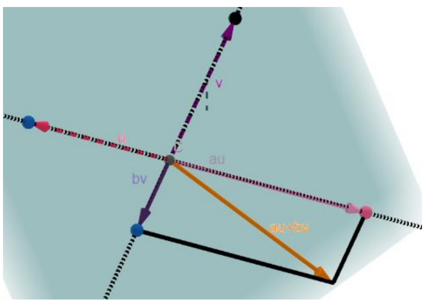
4 RQUE : On note $\alpha\vec{x}$ au lieu de $\alpha.\vec{x}$ et $\underbrace{\vec{x}+(-\vec{y})}_{\substack{somme\ de\ \vec{x}\ et \\ de\ \ l'opposé\ de\ \vec{y}}}$ est noté $\vec{x}-\vec{y}$.

5 Généralisation : Soient $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_p$ des scalaires, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ *des* vecteurs d'un K-e-v E. Alors la somme de tous les vecteurs $\vec{u}_k$ tel que $k \in [\![1,p]\!]$ est un vecteur de E . Cette somme peut être calculée dans l'ordre que l'on souhaite en vertu de l'associativité et la commutativité de l'addition sur les vecteurs. Cette somme est notée $\sum_{k=1}^{p} \vec{u}_k$. De plus, $\forall k \in [\![1,p]\!], \alpha_k\vec{u}_k \in E$ et la somme de tous les vecteurs $\alpha_k\vec{u}_k$ tel que $k \in [\![1,p]\!]$ est un vecteur de E noté $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k\vec{u}_k$.

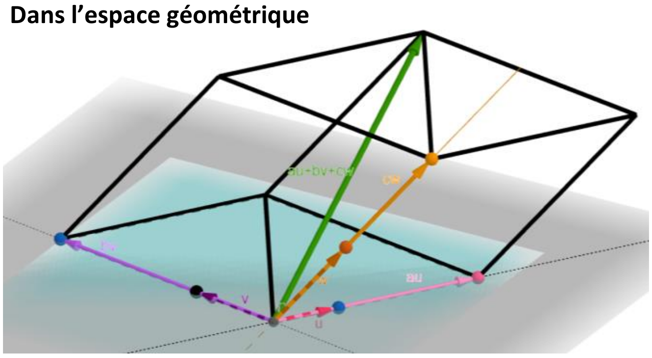
6 Def. : Soit x *et* y deux vecteurs d'un K-e-v E et α *et* β deux scalaires. Alors **une combinaison linéaire de $\vec{x}$** est tout vecteur de E de la forme $\alpha\vec{x}$. Deux vecteurs sont **colinéaires** lorsque l'un des vecteurs est combinaison linéaire de l'autre.
Une **combinaison linéaire de $\vec{x}$ et $\vec{y}$** est tout vecteur de E de la forme : $\alpha.\vec{x}+\beta.\vec{y}$ où α *et* β deux scalaires. Trois vecteurs sont **coplanaires** lorsque l'un d'eux est combinaison linéaire des deux autres.
Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ *des* vecteurs de E . Le vecteur $\vec{u}$ est une **combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$** lorsqu'il existe *des* scalaires $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_p$ tels que $\vec{u} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k\overrightarrow{v_k}$. $\vec{u}$ est alors un vecteur de E .
Soit X un ensemble de vecteurs de E . Une **combinaison linéaire de vecteurs de X** est tout vecteur de la forme $\sum_{k=1}^{q} \alpha_k\overrightarrow{x_k}$ où $q \in \mathbb{N}^*$ *et* $\overrightarrow{x_1}, .., \overrightarrow{x_q}$ sont des vecteurs de X. **UNE COMBINAISON LINEAIRE EST UNE SOMME FINIE**.

7 Illustrations d'une combinaison linéaire de deux vecteurs

Dans le plan



Dans l'espace géométrique



8 RQUE : 0) Une combinaison linéaire est toujours une somme finie.

1) $\vec{x}+\vec{y} = 1.\vec{x}+1.\vec{y}$, $\vec{x}-\vec{y} = 1.\vec{x}+(-1).\vec{y}$ et $\alpha.\vec{x} = \alpha.\vec{x}+0.\vec{y}$ sont des combinaisons linéaires de $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$.
2) Le vecteur nul est combinaison linéaire de tous vecteurs car $\vec{O} = \sum_{k=1}^{p} 0.\overrightarrow{u_k}$.

2. Exemples de référence

Ensemble $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$ *et* $m\in\mathbb{N}$	Addition interne	Multiplication externe	Combinaison linéaire
P l'ensemble des vecteurs du plan $\mathbb{R}$-e-v	Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de P. Soient A , B *et* C trois points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. Alors, par déf., $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. relation de Chasles ou règle du parallélogramme **Elément neutre** : $\vec{0}=\overrightarrow{AA}$ le seul vecteur de norme nulle.	Soient $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ un vecteur de P et α un réel Si $\alpha\neq0$ alors $\alpha\vec{u}$ est le vecteur de direction (AB) , de norme $\|\alpha\|AB$ et de sens : A *vers* B si $\alpha>0$ et B *vers* A si $\alpha<0$. Si $\alpha=0$ alors $\alpha\vec{u}=\vec{0}=\overrightarrow{AA}$	
E l'ensemble des vecteurs de l'espace géométrique $\mathbb{R}$-e-v	Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E. Soient A , B *et* C trois points de E tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. Alors par définition : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ relation de Chasles ou règle du parallélogramme. **Elément neutre** : $\vec{0}=\overrightarrow{AA}$ le seul vecteur de norme nulle .	Soient $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ un vecteur de E et α un réel Si $\alpha\neq0$ alors $\alpha\vec{u}$ est le vecteur de direction (AB) , de norme $\|\alpha\|AB$ et de sens : A *vers* B si $\alpha>0$ et B *vers* A si $\alpha<0$. Si $\alpha=0$ alors $\alpha\vec{u}=\vec{0}=\overrightarrow{AA}$	
$\mathbb{R}$, l'ensemble des réels $\mathbb{R}$-e-v	Addition dans $\mathbb{R}$	Multiplication dans $\mathbb{R}$	
$\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{R}$-e-v	Pour tous $z=a+ib$ et $w=x+iy$ complexes , par définition, $z+w=(a+x)+i(b+y)$ **Elément neutre**: $0=0+i0$	Pour tout $z=a+ib$ complexe et tout réel α , $\alpha.(a+ib)=\alpha a+i\alpha b$	$\alpha z+\beta w=(\alpha a+\beta x)+i(\alpha b+\beta y)$ avec α,β *réels*.
$\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$-e-v	Pour tous $z=a+ib$ et $w=\alpha+i\beta$ complexes , par définition, $z+w=(a+\alpha)+i(b+\beta)$ **Elément neutre**:$0=0+i0$	Pour tout $z=a+ib$ complexe et tout complexe $w=\alpha+i\beta$, $w.(a+ib)=(\alpha+i\beta).(a+ib)$ $=\alpha a-\beta b+i(\alpha b+a\beta)$	
K^p, l'ensemble des p-uplets d'éléments de K K-e-v (pour $p=1$, on retrouve $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$)	Soit $X=(x_1,x_2,\dots,x_p)$ et $Y=(y_1,y_2,\dots,y_p)$ deux p-uplets .Par def, $X+Y=$ $(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_p+y_p)$. **Elément neutre** :$\vec{0}=(0,\dots,0)$	Soit $X=(x_1,x_2,\dots,x_p)$ un p-uplet et α un scalaire. Par définition, $\alpha X=(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots,\alpha x_p)$	$\alpha X+\beta Y=$ $(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\dots,\alpha x_p+\beta y_p)$ avec $\alpha,\beta\in K$
$M_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à coefficients dans K de type (n,p) K-e-v	Soit $A=(a_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$ *et* $B=(b_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$ deux matrices n lignes p colonnes à coefficients dans K. Par déf , $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$ **Elément neutre** :$\vec{0}=O_{np}$	Soit $A=(a_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$ une matrice n lignes p colonnes à coefficients dans K et k un scalaire . Par définition, $k.A=(k\times a_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$	$\alpha A+\beta B=(\alpha a_{ij}+\beta b_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$ avec $\alpha,\beta\in K$
$M_n(K)$ l'ensemble des matrices à coefficients dans K de type (n,n) K-e-v	Soit $A=(a_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$ *et* $B=(b_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$ deux matricescarrées d'ordre n à coefficients dans K. Par déf , $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$ **Elément neutre** :$\vec{0}=O_n$	Soit $A=(a_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K et k un scalaire . Par définition, $k.A=(k\times a_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$	$\alpha A+\beta B=(\alpha a_{ij}+\beta b_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$ avec $\alpha,\beta\in K$
$K[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans K K-e-v	Soit $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{q}b_kX^k$ deux éléments de $K[X]$ Alors, $P+Q=\sum_{k=0}^{\max(p,q)}(a_k+b_k)X^k$ **Elément neutre** : $0=\sum_{k=0}^{p}0.X^k$	Soit $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ un élément de $K[X]$ et β un élément de K . Alors, $\beta.P=\sum_{k=0}^{p}\beta a_kX^k$	$\alpha P+\beta Q=\sum_{k=0}^{\max(p,q)}(\alpha a_k+\beta b_k)X^k$ avec $\alpha,\beta\in K$
$K_m[X]$ où $m\in\mathbb{N}$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans K de degré inferieur	Soit $P=\sum_{k=0}^{m}a_kX^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{m}b_kX^k$ deux éléments de $K[X]$ Alors,	Soit $P=\sum_{k=0}^{m}a_kX^k$ un élément de $K[X]$ et β un élément de K . Alors,	

ou égal à m **K-e-v.**	$P+Q=\sum_{k=0}^{\max(p,q)}(a_k+b_k)X^k$ **Elément neutre** : $0=\sum_{k=0}^{m}0.X^k$	$\beta.P=\sum_{k=0}^{m}\beta a_k X^k$	
$\boldsymbol{F(I,K)}$ l'ensemble des applications de I dans K où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ fixé. **K-e-v**	pour toutes fonctions f *et* g de I dans K , $f+g:(x\mapsto f(x)+g(x))$ **Elément neutre**:$\omega:(x\mapsto 0)$	pour toute fonction f de I dans K et tout scalaire , $\alpha.f:(x\mapsto \alpha f(x))$	$\alpha f+\beta g:(x\mapsto \alpha f(x)+\beta g(x))$ avec $\alpha,\beta\ \in K$
$\boldsymbol{K^{\mathbb{N}}}$ l'ensemble des suites de nombres réels si $K=\mathbb{R}$ et complexes si $K=\mathbb{C}$ **K-e-v**	Pour toutes suites $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par définition , $u+v=(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **Elément neutre** : $0=(0)_{n\in\mathbb{N}}$	Pour toute suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et tout scalaire* α $\alpha.u=(\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\alpha u+\beta v=(\alpha u_n+\beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\alpha,\beta\ \in K$

DESORMAIS $(E,+,.)$ est un K-e-v.

3. Règles de calcul

10 Prop : Soit α,β des scalaires *et* $\vec{x},\vec{y}$ des vecteurs de E .
C1 $\alpha.\vec{x}=\vec{0}$ **si et ssi** $\alpha=0$ *ou* $\vec{x}=\vec{0}$
C2 $-(\alpha.\vec{x})=(-\alpha).\vec{x}=\alpha.(-\vec{x})$
C3 $(\alpha-\beta).\vec{x}=\alpha\vec{x}-\beta\vec{x}$ *et* $\alpha.(\vec{x}-\vec{y})=\alpha\vec{x}-\alpha\vec{y}$

11 Généralisation des propriétés *P2* à 7 : Soit $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p$ des vecteurs d'un $K-e-v\ \ E$ et $\alpha,\alpha_1,\dots,\alpha_p$ des éléments de K .
1. $\sum_{k=1}^{p}\vec{u}_k=\sum_{k=1}^{r}\vec{u}_k+\sum_{k=r+1}^{p}\vec{u}_k$ où $r\in[\![1,p-1]\!]$.
2. $\sum_{k=1}^{p}\vec{u}_k=\sum_{i=0}^{p-1}\vec{u}_{p-i}$
3. $\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}\vec{u}_{kj}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p}\vec{u}_{kj}\right)$
4. $\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\vec{x}=\left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\right)\vec{x}$
5. $\alpha\sum_{k=1}^{p}\vec{u}_k=\sum_{k=1}^{p}\alpha\vec{u}_k$

12 Prop : Dans un K –e-v E , si les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ *de* E sont combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p$ alors pour tous scalaires α *et* β, $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p$.

13 NB : Tout espace vectoriel contient toutes les combinaisons linéaires de ses éléments, toutes les sommes (finies) de ses éléments et tous les vecteurs produits d'un de ses éléments par un scalaire. Cela signifie que :
TOUT ESPACE VECTORIEL EST STABLE PAR ADDITION, MULTIPLICATION EXTERNE ET COMBINAISONS LINEAIRES.

4. Espace produit et espace vectoriel $\mathcal{F}(T,E)$ des fonctions d'un ensemble T dans un K-e-v E

13 Théo : Soit($E,+,.$) *et* ($F,+,.$) deux K-e-v. On note $E\times F=\{(x,y)/x\in E\ et\ y\in F\}$
On définit deux opérations sur $E\times F$ une addition $(+)$ et une multiplication externe $(\,.\,)$ par :
$\forall(X,Y)\in(E\times F)^2$ tel que $X=(x_1,x_2)$ *et* $X=(y_1,y_2)$, $X+Y=(x_1+y_1,x_2+y_2)$ et ,$\forall\alpha\in K$, $\boldsymbol{\alpha}.X=(\boldsymbol{\alpha}.x_1,\boldsymbol{\alpha}.x_2)$
Alors $E\times F$, muni de ces deux opérations $(+)$ ***et*** $(.)$, est un K-e-v.

13bis Théo : Soit($E,+,.$) *un* K-e-v et T un ensemble quelconque. On note $\mathcal{F}(T,E)$l'ensemble des applications de T dans E . On définit deux opérations sur $\mathcal{F}(T,E)$une addition $(+)$ et une multiplication externe $(\,.\,)$ par : $\forall(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\in\mathcal{F}(T,E)^2,\forall\alpha\in K$,
$$f+g:(t\mapsto f(t)+g(t))\ \text{et}\ \ \alpha.f:(t\mapsto\alpha.f(t))\ .$$
Alors $\mathcal{F}(T,E)$muni de ces deux opérations $(+)$ ***et*** $(.)$, est un K-e-v.

Démo : Il faut vérifier que $\mathcal{F}(T,E)$muni de ces deux opérations $(+)$ ***et*** $(.)$, vérifie $P1$, $P2,..P7$.

P1 Soit $(f,g)\in\mathcal{F}(T,E)^2$*et* $\alpha\in K.\forall t\in T,(f+g)(t)=\underbrace{f(t)}_{\in E}+\underbrace{g(t)}_{\in E}\underbrace{\in}_{\substack{car\ E\\ stable\\ par\ (+)}}E$ et $(\alpha.f)(t)=\underbrace{\alpha.f(t)}_{\in E}\underbrace{\in}_{\substack{car\ E\\ stable\\ par\ (.)}}E$.

Donc, $f+g$ *et* $\alpha.f$ sont éléments de $\mathcal{F}(T,E)$.

P2. Soit $(f,g,h)\in\mathscr{F}(T,E)^3. Alors\ (f+g)+h\ et\ f+(g+h)$ sont définies sur T et $\forall t\in T$,
$((f+g)+h)(t)=(f+g)(t)+h(t)=\big(f(t)+g(t)\big)+h(t)=f(t)+\big(g(t)+h(t)\big)=f(t)+\big(g(t)+h(t)\big)=(f+(g+h))(t).$
Donc, $(f+g)+h=f+(g+h)$. OK !
$De\ même, (f+g) et\ (g+f)$ sont définies sur T et $\forall t\in T, (f+g)(t)=f(t)+g(t)=g(t)+f(t)=(g+f)(t).$
Donc, $(f+g)=(g+f)$. OK !
P3. Soit $w\ \ définie\ sur\ T\ par:\ \forall t\in T, w(t)=\vec{0}_E$. Soit $f\in\mathscr{F}(T,E)$.
Alors $(f+w)\ et\ f$ sont définies sur T et $\forall t\in T, (f+w)(t)=\ f(t)+w(t)=f(t)+\vec{0}_E=f(t)$. Donc $(f+w)=\ f$
Donc w est l'élément neutre de $\mathscr{F}(T,E)$. pour $(+)$.
P4. . Soit $f\in\mathscr{F}(T,E)$.. Posons $g:(t\mapsto -f(t))\in\mathscr{F}(T,E)$
Alors $\forall t\in T$,$(f+g)(t)\ \underbrace{=}_{\substack{\text{par def}\\ \text{de }(+)}}\ f(t)+g(t)\ \underbrace{=}_{\substack{\textbf{car }(+)\textbf{et }(+)\\ \textbf{vérifient P4}}}\ f(t)-f(t)\ \underbrace{=}_{\substack{\text{par def}\\ \text{de }\vec{0}}}\ \vec{0}_E=w(t)$.OK!
Donc, $f+g=w\ et\ \ g$ est l'opposé de f dans $\mathscr{F}(T,E)$pour $(+)$.
P5. Soit $(f,g)\in\mathscr{F}(T,E)^2 et\ (\alpha,\beta)\in K^2. Alors\ \ \alpha.(f+g)\ et\ \alpha.f+\alpha.g$ sont définies sur T et $\forall t\in T$,
$\big(\alpha.(f+g)\big)(t)\ \underbrace{=}_{\substack{\text{par def}\\ \text{de }(+)}}\ \alpha.\big(f(t)+g(t)\big)\ \underbrace{=}_{\substack{\textbf{car }(.)\\ \textbf{vérifie P5}}}\ \alpha.f(t)+\alpha.g(t)\ \underbrace{=}_{\substack{\textbf{par déf de}\\ (.)\textbf{ et }(+)}}\ (\alpha.f+\alpha.g)(t)$. Donc, $\alpha.(f+g)=\alpha.f+\alpha.g\ OK!$
De même, $(\ \alpha+\beta).f\ et\ \alpha.f+\beta.f$ sont définies sur T et $\forall t\in T$
$((\alpha+\beta).f)(t)\ \underbrace{=}_{\substack{\text{par def}\\ \text{de }(.)}}\ (\alpha+\beta).f(t)\ \underbrace{=}_{\substack{\text{car }(.)\\ \text{vérifie P5}}}\ \alpha.f(t)+\beta.f(t)\ \underbrace{=}_{\substack{\text{par déf de}\\ (.)\text{ et }(+)}}\ (\alpha.f+\beta.f)(t)$. Donc, $(\alpha+\beta).f=\alpha.f+\beta.f\ OK!$
P6. Soit $f\in\mathscr{F}(T,E)$ et $(\alpha,\beta)\in K^2$.Alors, $\alpha.(\beta.f),\ (\alpha\beta).f,\ \beta.(\alpha.f)$sont définies sur T et $\forall t\in T$,
$\big(\alpha.(\beta.f)\big)(t)\ \underbrace{=}_{\substack{\text{par def}\\ \text{de }(.)}}\ \alpha.\big(\beta.f(t)\big)\ \underbrace{=}_{\substack{\textbf{car }(.)\textbf{et }(.)\\ \textbf{vérifient P6}}}\ \alpha\beta.f(t)\ \underbrace{=}_{\substack{\textbf{car }(.)\textbf{et }(.)\\ \textbf{vérifient P6}}}\ \beta.(\alpha.f)(t)$. Donc, $\alpha.(\beta.f)=(\alpha\beta).f=\beta.(\alpha.f)$OK !
P7. Soit $f\in\mathscr{F}(T,E)$. Alors, $(1.f) et\ \ f$ sont définies sur T et $\forall t\in T$, $(1.f)(t)=f(t). Donc, (1.f)=f.$

14 Exemples : 1) Pour $E=\mathbb{R}$ et $T=I$=un intervalle de $\mathbb{R}$, on retrouve le $\mathbb{R}$-e-v $F(I,\mathbb{R})$ donné dans les exemples de référence.
2) On peut grâce à ce théorème construire un $K-e-v$ de fonctions très facilement. Il suffit de choisir un ensemble T quelconque par exemple $T=\{1\,;2\,;3\}$ et un $\mathbb{R}$-e-v E quelconque par exemple : $E=M_2(\mathbb{R})$ et on est capable de créer une structure de $\mathbb{R}$-e-v sur l'ensemble des applications de $\{1\,;2\,;3\}$ dans $M_2(\mathbb{R})$

II Sous-espaces-vectoriels

1. Définition

15 Déf : Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur K et F un ensemble.
F est un **sous – espace - vectoriel** (ss-e-v) de E lorsque :
$D1)\ F\subset E$
$D2)\ \overrightarrow{0_E}\in F$
$D3)\ \forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2,\ \ \vec{x}+\vec{y}\in F\quad et\quad \forall\vec{x}\in F,\forall\alpha\in K,\ \ \alpha.\vec{x}\in F$. ($F$ est stable par addition et multiplication externe).

16 Déf. équivalente : Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur K et F un ensemble.
F est un **sous – espace- vectoriel** de E lorsque :
$D1)$ Fest un sous-ensemble de E
$D2b)$ F non vide ou $\overrightarrow{O_E}\in F$
$D3b)\ \forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2,\forall(\alpha,\beta)\in K^2,\ \ \alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in F$ (F est stable par $c.l$

17 Prop : E et $\{\overrightarrow{O_E}\}$ sont des sous-espaces-vectoriels de E.

18 NB : Tout ss-e-v de E vérifie donc les propriétés $P1$et $P3\ et\ P4$(par définition d'un sous-e-v) et $P2$, $P5$ à $P7$ (par hérédité de E). Ainsi, **TOUT SS-E-V D'UN K-E-V EST DONC LUI-MEME UN K –e-v.**
Par conséquent, si $G\ et\ F$ sont deux ss-e-v de E et $G\subset F$ alors G est un ss-e-v de F.

19 En pratique : lorsqu'il faut prouver qu'un ensemble F est un K-e-v , il suffit donc de montrer que F est un ss-e-v d'un e-v de référence . Construire un ss-e-v est une autre manière de construire un e-v.

20 Conséquences :
- **TOUT SS-E-V F EST STABLE PAR COMBINAISONS LINEAIRES** : tout ss-e-v contient toutes les combinaisons linéaires de ses éléments. Autrement dit si F est un ss-e-v et $\forall k\in[\![1,p]\!],\vec{u}_k\in F\ et\ \alpha_k\in K, alors\ \sum_{k=1}^{p}\alpha_k\vec{u}_k\in F$.

- En particulier, si F, un ss-e-v de E, contient un vecteur $\vec{u}$ non nul alors F contient tous les vecteurs $\alpha\vec{u}$ tels que $\alpha \in K$ (ie. tous les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$) et F contient donc une infinité de vecteurs. Ainsi, $\{\overrightarrow{O_E}\}$ est le seul espace vectoriel contenant un nombre fini d'éléments … tout autre e-v contient une infinité de vecteurs.

2. Exemples de référence.

21 Des ss-e-v qui sont de nouveaux e-v- de référence :

1. $D_n(K), TS_n(K), TI_n(K), S_n(K)$ *et* $AS_n(K)$ sont des ss-e-v *de* $M_n(K)$.
2. $GL_n(K)$ n'est pas un ss-e-v *de* $M_n(K)$ car il ne contient pas la matrice nulle.
3. $K_m[X]$ est un ss-e-v de $K[X]$ où $m \in \mathbb{N}$ *fixé*.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$. $D^k(I,\mathbb{R})$ (resp . $C^k(I,\mathbb{R})$, *ou* $C^\infty(I,\mathbb{R})$) est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
5. L'ensemble des solutions d'une *edl* homogène d'ordre $k \in \{1,2\}$ à coefficients continues sur I et à valeurs dans K est un ss-e-v de $D^k(I,K)$.

21 bis D'autres exemples (pas de référtence) ou non exemple faciles à justifier :

- L'ensemble des fonctions bijectives de K sur K **n'est pas un ss-e-v** de $\mathcal{F}(K,K)$car il ne contient pas la fonction nulle.
- L'ensemble des fonctions de I dans K bornées est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,K)$.
- Soit a un bord de I. L'ensemble des fonctions de I dans K de limite finie en a est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,K)$.
- L'ensemble des suites bornées est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

22 UN Exemple à savoir faire : $\boldsymbol{F}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ \underbrace{\mathbf{5x - 3y + 7z = 0}}_{\text{équation cartésienne de } F}\}$. Montrer que $\boldsymbol{F}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

D1 F contient bien des triplets de réels donc $F \subset \mathbb{R}^3$. $D2$ De plus, $W = (0,0,0) \in F$ car $5\times 0 - 3\times 0 + 7\times 0 = 0$
$D3$ Soit $(X,Y) \in F^2$et $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $X = (x_1,x_2,x_3)$ *et* $Y = (y_1,y_2,y_3)$. Montrons que $X+Y \in F$ *et* $\alpha X \in F$.
$X + Y = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ et $\alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$. Regardons si les composantes de $X+Y$ et αX vérifient l'équation de F sachant que celles de X et celles de Y vérifient cette équation.

$$5(x_1+y_1)-3(x_2+y_2)+7(x_3+y_3)=\left(\underbrace{5x_1-3x_2+7x_3}_{\substack{=0\\ car\ X\in F}}\right)+\left(\underbrace{5y_1-3y_2+7y_3}_{\substack{=0\\ car\ Y\in F}}\right)=0$$

et $5\alpha x_1 - 3\alpha x_2 + 7\alpha x_3 = \alpha(5x_1 - 3x_2 + 7x_3) = 0$. J'en conclus que $X+Y$ et αX sont éléments de F.
Ainsi F vérifie $D1, D2$ et $D3$ donc F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^3$.

23 Exercice: Soit $A \in M_{np}(K)$. $Ker(A) = \{X \in M_{p,1}(K)/AX = O\}$ et $Im(A) = \{Y \in M_{n,1}(K)/\ le\ système\ AX = Y\ est\ compatible\}$. Montrer que $Ker(A)$ est un ss-e-v de $M_{p,1}(K)$ *et* e $Im(A)$ est un ss $-$ e $-$ v de $M_{n,1}(K)$

24 Exercice Soit a un réel. Montrer que : $F = \left\{f \in C^0([0,1],\mathbb{R})/\ \int_0^1 f = a\right\}$ est un ss-e-v de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ sietssi $a = 0$.

25 Exercice Indiquer pour chaque ensemble F ci-dessous dans quel e-v- de référence il est inclus et si il est un ss-e-v de cet e-v de référence.

- Soit $Q \in K[X]$. F est l'ensemble des polynômes divisibles par Q.
- F est l'ensemble des suites réelles négligeables devant $\sqrt{n}$.
- F est l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ monotones (sur $[0,1]$).
- F est l'ensemble des suites réelles et géométriques.
- F est l'ensemble des suites réelles et arithmétiques.
- F est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodiques de période commune T où T réel strictement positif fixé.
- F est l'ensemble des suites complexes périodiques.
- On munit le plan d'une repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit F l'ensemble des vecteurs du plan de norme inférieure à 1.

3. Sous espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.

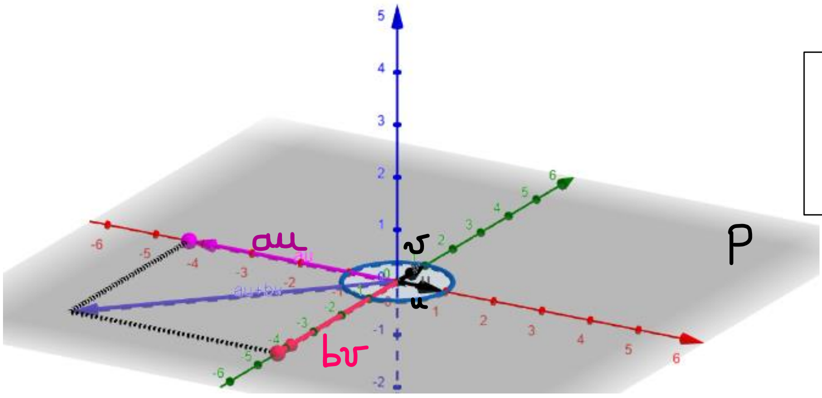
26 Théo et def. : Soient $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p$ *des* vecteurs d'un K-e-v E.
L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p$ est un ss-e-v de E appelé le sous **espace vectoriel engendré par** la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)$ et noté $vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)$.
$vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p) = \{\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\overrightarrow{u_k}\ /\alpha_1,\alpha_2,.,\alpha_p\ scalaires\} = \{\vec{v} \in E/\exists(\alpha_1,\alpha_2,.,\alpha_p) \in K^p; \vec{v} = \sum_{k=1}^{p}\alpha_k\overrightarrow{u_k}\}$ est un ss-e-v de E.

27 Def. : Lorsque $F = vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)$, on dit que la **famille** $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)$ **engendre** *le ss* $-$ *e* $-$ *v* F ou encore que la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)$ est une **famille génératrice** du ss-e-v F.

28 NB : les vecteurs générateurs sont des éléments de F ….. Si F contient des fonctions alors les vecteurs générateurs de F, s'ils existent, sont des fonctions, si F est un ensemble de suites alors les vecteurs générateurs de F sont des suites …

29 Rque : Lorsque qu'il y a ambiguïté (très rare) , on notera $vect_{\mathbb{R}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) = \{\vec{v} \in E / \exists(\alpha_1, \alpha_2, ., \alpha_p) \in \mathbb{R}^p ; \vec{v} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \overrightarrow{u_k}\}$ et $vect_{\mathbb{C}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) = \{\vec{v} \in E / \exists(\alpha_1, \alpha_2, ., \alpha_p) \in \mathbb{C}^p ; \vec{v} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \overrightarrow{u_k}\}$

30 Deux cas particuliers : Le sous-e-v engendré par un seul vecteur $\vec{u}$ non nul est appelé la **droite vectorielle** engendrée par $\vec{u}$. Le sous-e-v engendré par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ <u>non colinéaires</u> est appelé le **plan vectoriel** engendré par la famille $(\vec{u}, \vec{v})$.



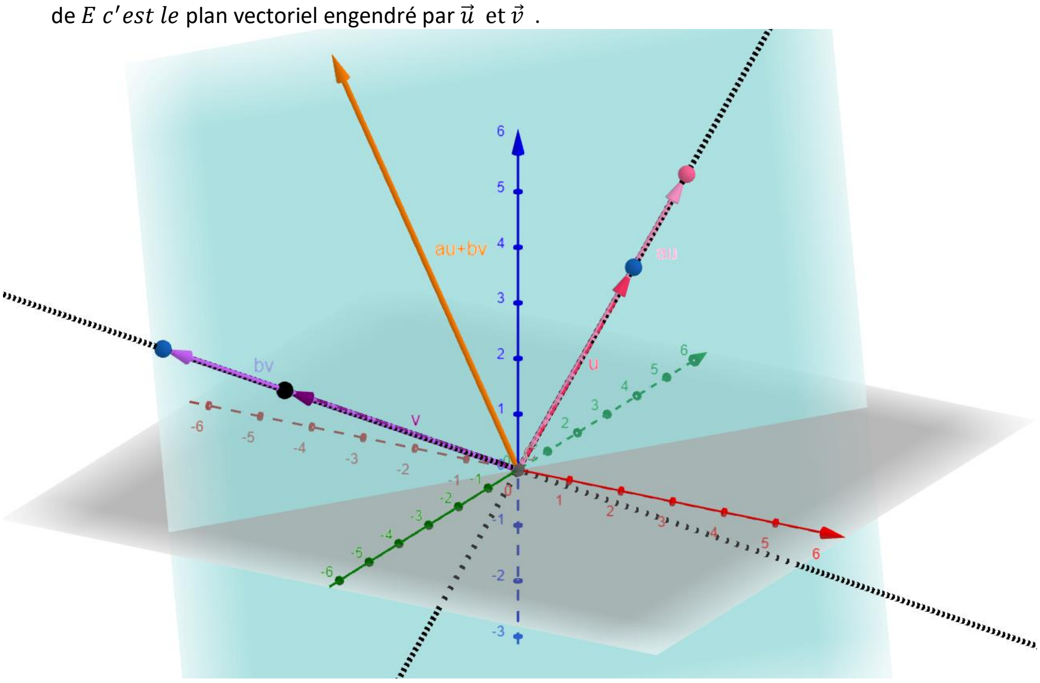
31Exercice : Montrons que

$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\} = vect\left(\underbrace{(1,0,0)}_{u}, \underbrace{(0,1,0)}_{v}\right)$

autrement dit que P est le plan vectoriel engendré par u et v.

32 Exemples :

1) Dans le plan P (ou l'espace géométrique E), l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur fixé non nul $\vec{u}$ est un ss-e-v de P (ou E) qui est la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$.
2) Dans l'espace géométrique E ,l'ensemble des vecteurs combinaisons linéaires de deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un ss-e-v de E $c'est\ le$ plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



3) L'ensemble des solutions sur I de l'$edlh$: $y' + a(x)y = 0$ où a fonction continue sur l'intervalle I est la droite vectorielle engendrée par la fonction $\varphi : (x \mapsto e^{-A(x)})$où $A\ primitive\ de\ a\ sur\ I\ car\ Sol(EH) = \{k\varphi / k \in \mathbb{R}\} = vect(\varphi)$
4) L'ensemble des solutions de l'$edlh$: $ay'' + by' + cy = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 et\ a \neq 0$ est le plan vectoriel (sur $\mathbb{R}$) engendré par les fonctions $\varphi_1\ et\ \varphi_2$ telles que :
   $\varphi_1 : (x \to e^{r_1 x}) et\ \ \varphi_2 : (x \to e^{r_2 x})$ avec $r_1\ et\ r_2$ solutions de $(e.c)$ si $\Delta > 0$
   $\varphi_1 : (x \to e^{r_0 x}) et\ \ \varphi_2 : (x \to x e^{r_0 x})$ avec r_0 solution de $(e.c)$ si $\Delta = 0$
   $\varphi_1 : (x \to \cos(\omega x) e^{\rho x}) et\ \ \varphi_2 : (x \to \sin(\omega x) e^{\rho x})$ avec $r_1 = \rho + i\omega\ et\ \overline{r_1}$ solutions de $(e.c)$ si $\Delta > 0$.
   Car $Sol(EH) = \{k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 / (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2\} = vect(\varphi_1, \varphi_2)$.
5) L'ensemble F des suites arithmétiques est le plan vectoriel engendré par les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ (n)_{n\in\mathbb{N}}$ car
$$F = \{(rn + a)_{n\in\mathbb{N}} / (r, a) \in \mathbb{R}^2\} = \{r(n)_{n\in\mathbb{N}} + a(1)_{n\in\mathbb{N}} / (r, a) \in \mathbb{R}^2\} = vect((n)_{n\in\mathbb{N}}, (1)_{n\in\mathbb{N}})$$
6) Soit b un complexe non nul fixé. L'ensemble F des suites géométriques de raison b est la droite vectorielle engendrée par la suite $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $F = \{(ab^n)_{n\in\mathbb{N}} / a \in \mathbb{R}\} = \{a(b^n)_{n\in\mathbb{N}} / a \in \mathbb{R}\} = vect((b^n)_{n\in\mathbb{N}})$.
7) L'ensemble des suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2 vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 et\ a \neq 0$ est le plan vectoriel (sur $\mathbb{R}$) engendré par les suites $u\ et\ v$ telles que :
   $u_n = r_1^n\ \ et\ \ v_n = r_2^n$ avec $r_1\ et\ r_2$ solutions de $(e.c)$ si $\Delta > 0$
   $u_n = r_0^n\ \ et\ \ v_n = n r_0^n$ avec r_0 solution de $(e.c)$ si $\Delta = 0$
   $u_n = \cos(n\theta)\rho^n et\ \ v_n = \sin(n\theta)\rho^n$ avec $r_1 = \rho e^{i\theta}\ et\ \overline{r_1}$ solutions de $(e.c)$ si $\Delta < 0$.

33 Prop :
1. $vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est inclus dans tout ss-e-v de E contenant les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$.
2. Soit $F = vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ et G un ss-e-v de E alors,

$$F \text{ est un ss-e-v de } G \iff \forall k \in [\![1,p]\!], \overrightarrow{u_k} \in G.$$

34 En particulier, si $\vec{a}$ est un vecteur non nul d'un ss-e-v G alors la droite engendré(e) par $\vec{a}$ est inclus dans G. si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs non colinéaires d'un ss-e-v G alors le plan engendré par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est inclus dans G.

35 Exercice : Montrer que : $vect\big((1,2,3),(-2,1,0)\big) = vect\big((-1,3,3),(-5,0,-3)\big)$ par double inclusion.

36 Conséquence : Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs d'un K-e-v E . Alors, $vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace-vectoriel de E contenant $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$.

4. Intersection de sous-espaces vectoriels

37 Prop Intersection quelconque de ss-e-v : Soit $(F_i)_{i\in I}$une famille de sous-espaces-vectoriels d'un K-e-v E.
Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$, l'intersection de tous les F_i, est un sous espace vectoriel de E.

38 Application : *Soit* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$des vecteurs de E. $vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) = \bigcap_{\substack{F \text{ ss-e-v de } E \\ \text{contenant tous} \\ \text{les } \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p}} F$ = l'intersection de tous les ss-e-v de E qui contiennent les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$.

39 Exemple : Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ x - y + z - t = 0 \ \ et \ 2x + 3y + 4t = 0\}$. Alors $F = G \cap H$ *où* $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ 2x + 3y + 4t = 0\}$ et $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ x - y + z - t = 0 \ \}$.

5. Somme de deux sous-espaces vectoriels

40 Def-Prop Somme finie de ss-e-v : Soient F *et* G deux sous espaces vectoriels de E . L'ensemble $F + G = \{\vec{x} + \vec{y} / \vec{x} \in F \ \ et \ \ \vec{y} \in G\}$ est un sous espace vectoriel de E appelé sous espace somme de F *et* G .

41 NB : La réunion de deux ss-e-v de E n'est pas un ss-e-v de E .
Contre-exemple : prenons $E = \mathbb{R}^2$, $F = vect((1,0))$ et $G = vect((0,1))$. Alors $F \cup G = \{(x,0);(0,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \ \ ou \ y = 0\}$ n'est pas stable par addition car $\underbrace{(1,0)}_{\in F\cup G} + \underbrace{(0,1)}_{\in F\cup G} = \underbrace{(1,1)}_{\notin F\cup G}$ donc n'est pas un ss-e-v de $\mathbb{R}^2$.

42Prop : Si F et G sont des ss-e-v de E alors F et G sont des ss-e-v de $F + G$ et $F + G = vect(F \cup G)$.

43 Prop. famille génératrice $F + G$: Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q$ des vecteurs de E.
Si $F = vect\big(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\big)$ et $G = vect\big(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\big)$ alors $F + G = vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q)$.

44 Def. : Soient F *et* G deux sous espaces vectoriels d'un K-e-v E .
F *et* G sont **en somme directe** lorsque tout vecteur de $F + G$ s'écrit de manière unique comme combinaison comme d'un éément de F et d'une élément de G.

45 Prop: Soient F *et* G deux sous espaces vectoriels d'un K-e-v E. F *et* G sont en somme directe **<u>sietssi</u>** $F \cap G = \{\vec{O}\}$.

46 Def. : Soient F *et* G deux sous espaces vectoriels d'un K-e-v E .
F *et* G sont **supplémentaires** dans E lorsque tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . On note alors $E = F \oplus G$.

47Rque: lorsque F *et* G sont en somme directe alors F *et* G sont supplémentaires dans $F + G$. i.e. $F \oplus G = F + G$.

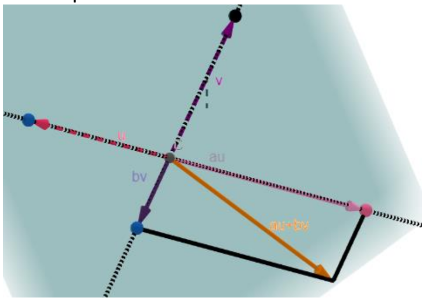
48 Caractérisation : Soient F *et* G deux sous espaces vectoriels d'un K-e-v E.
F *et* G sont supplémentaires dans E **<u>sietssi</u>** $F + G \underbrace{=}_{\supset} E$ et $F \cap G \underbrace{=}_{\subset} \{\vec{O}\}$. On note alors $E = F \oplus G$.

$E = F \oplus G \Leftrightarrow$ *F et G sont des ss-e-v de E et* $\forall \vec{u} \in E, \exists! \, (\vec{x}, \vec{y}) \in F \times G / \vec{u} = \vec{x} + \vec{y} \iff F + G \underbrace{=}_{\supset} E$ et $F \cap G \underbrace{=}_{\subset} \{\vec{O}\}$.

NB : $\vec{x}, \vec{y}$ dépendent *de* $\vec{u}$.

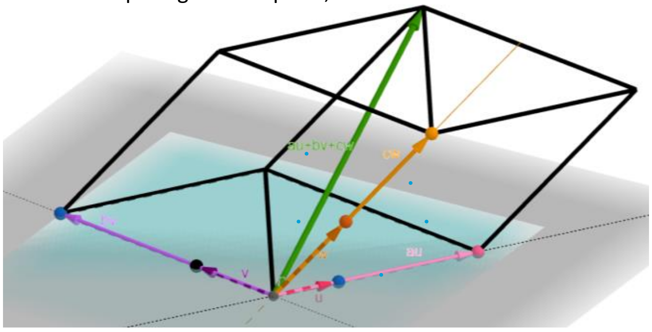
49 Exemples :

1. dans un plan P



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de P.
Les droites vectorielles $vect(\vec{u})$ et $vect(\vec{v})$ sont supplémentaires dans P
si et ssi
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

dans l'espace géométrique E,



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ trois vecteurs de E tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Le plan $vect(\vec{u},\vec{v})$ et la droite $vect(\vec{w})$ sont supplémentaires dans E
si et ssi
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires
si et ssi
$\vec{w}$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $m \in [\![0, n-1]\!]$.Soit $F = vect(1, X, X^2, \dots, X^m) = K_m[X]$, $G = vect(X^{m+1}, X^{m+2}, .., X^n)$ *et* $H = vect((X^k)_{k\geq m+1})$. Alors, F et G sont supplémentaires $K_n[X]$. Et, F et H sont supplémentaires $K[X]$. En effet, soit $P \in K_n[X]$. Alors $\exists! \, (a_0, a_1, .., a_n) \in K^n / P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} a_k X^k}_{\in F} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} a_k X^k}_{\in G}$. Donc, P s'écrit de manière unique comme somme d'une vecteur de F et d'un vecteur de G. Ainsi, F *et* G sont deux ss-e-v de $K_n[X]$. supplémentaires dans

2. $S_n(\mathbb{R})$ et $AS_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$ car toute matrice $M \in$ … e matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique et la décomposition est

3. *Dans* $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le ss-e-v des fonctions paires et celui des fonctions impa

III. Familles libres, génératrices et bases d'un K-e-v E.

1. Famille libre, famille liée.

50Def. : Soit $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E .

1. $\mathscr{F}$ est **libre lorsque :** la seule manière d'écrire $\overrightarrow{O_E}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ est l'écriture (ou la combinaison linéaire) dite triviale $\overrightarrow{O_E} = 0\overrightarrow{u_1} + 0\overrightarrow{u_2} + .. + 0\overrightarrow{u_n}$; **autrement dit , lorsque** : l'équation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_i} = \vec{O}$ d'inconnue $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$ admet $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0,0, \dots, 0)$ comme unique solution .

On dit aussi que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ sont **linéairement indépendants.**

2. $\mathscr{F}$ est **liée lorsque** $\mathscr{F}$ *n'*est pas libre i.e. lorsqu'il existe une écriture non triviale de $\overrightarrow{O_E}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ i.e. lorsqu'il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0,0, \dots, 0)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_i} = \vec{O}$. On dit aussi que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ sont **linéairement dépendants**.

51Caractérisation (ou déf. équivalente) :

1. La famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ est liée si et ssi l'un de ces vecteurs est une combinaison linéaire des autres vecteurs.
2. La famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ est libre si et ssi aucun de ses n vecteurs n'est une combinaison linéaire des autres.

52Conséquence :

1. Une famille contenant le vecteur nul est toujours liée.
2. Une famille dont deux vecteurs sont égaux est liée.
3. Soit $\mathscr{F}$ famille constituée d'un seul vecteur $\vec{u}$. $\mathscr{F} = (\vec{u})$ est libre sietssi $\vec{u} \neq \vec{O}$. Par conséquent, tout K −e-v contenant un vecteur non nul contient au moins une famille libre.
4. $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont (non) colinéaires sietssi la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée (libre).
5. $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ sont (non) coplanaires sietssi $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée (libre).

53 Exemples :

1) Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&1&-2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2&-4&-6\\b&-2&+4\end{pmatrix}$. (A,B) est libre sietssi $b\neq 6$.
2) Une matrice A carrée d'ordre n est (non) inversible sietssi la famille formée par ses n colonnes (resp. lignes) est libre (liée).
3) $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\cos(2x), g(x)=sin^2(x)$ et $h(x)=1$. La famille (f,g,h) est liée car $f=h-2g$.
4) Soit a et b deux nombres complexes distincts. $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas colinéaires et de même pour $f:(t\mapsto e^{at})$ et $g:(t\mapsto e^{bt})$ Démo : cherchons ttes les manières d'écrire la suite nulle comme c.l de $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $(\lambda,\beta)\in\mathbb{C}^2$.

$$\lambda(a^n)_{n\in\mathbb{N}}+\beta(b^n)_{n\in\mathbb{N}}=0 \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \lambda a^n+\beta b^n=0 \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{n=0\\ puis\, n=1}} \begin{cases}\lambda+\beta=0\\ \lambda a+\beta b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda=-\beta\\ \lambda\underbrace{(a-b)}_{\neq 0}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=0\\ \lambda=0\end{cases}$$

De même, cherchons ttes les manières d'écrire la fonction nulle comme $c.l$ de f et g. soit $(\lambda,\beta)\in\mathbb{C}^2$.

$$\lambda(t\mapsto e^{at})+\beta(t\mapsto e^{bt})=0 \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}, \lambda e^{at}+\beta e^{bt}=0 \begin{cases}\forall t\in\mathbb{R}, \lambda e^{at}+\beta e^{bt}=0\\ \forall t\in\mathbb{R}, \lambda a e^{at}+\beta b e^{bt}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda+\beta=0\\ \lambda a+\beta b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda=-\beta\\ \lambda(a-b)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=0\\ \lambda=0\end{cases}.$$

54 Théorème

1) Echanger deux vecteurs (op1) d'une famille libre, ajouter à un vecteur de cette famille libre un autre vecteur de la famille multiplié par un scalaire (op2) et multiplier un vecteur de cette famille libre par un scalaire non nul (op3) sont trois opérations qui conserve la liberté de la famille (idem avec une famille liée).

2) Toute famille extraite d'une famille libre est libre (Toute famille contenant une famille liée est liée).

3) Si j'ajoute à une famille libre un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs déjà présents dans la famille alors la famille obtenue est encore libre.

NB Je ne peux pas ajouter n'importe quel vecteur si je souhaite garder la liberté !!!!

Démo de 1) : Soit $\mathscr{L}=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ une famille libre de vecteurs de E .

1) **Op1)** Echanger deux vecteurs dans cette famille donnera une famille avec exactement les mêmes vecteurs donc cette nouvelle famille ne contient aucun vecteur combinaison linéaire des autres et est donc encore libre.

Op2) Soit $\beta\in K$ et $\mathscr{L}'=(\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$. Montrons que $\mathscr{L}'$est libre. Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in K^n$.

$\overrightarrow{O_E}=\alpha_1(\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2})+\alpha_2\overrightarrow{u_2}+..+\alpha_n\overrightarrow{u_n} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_E}=\alpha_1\overrightarrow{u_1}+(\alpha_1\beta+\alpha_2)\overrightarrow{u_2}+\alpha_3\overrightarrow{u_3}+..+\alpha_n\overrightarrow{u_n}$ ←**une écriture de $\overrightarrow{O_E}$ comme c.l. de $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$**

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{\overrightarrow{O_E}=0\overrightarrow{u_1}+0\overrightarrow{u_2}..+0\overrightarrow{u_n}\\ est\ l'unique façon\\ d'écrire\ \overrightarrow{O_E} comme\ c.l. de\ \overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}}} \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_1\beta+\alpha_2=0\\ \alpha_3=0\\ \vdots\\ \alpha_n=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\\ \vdots\\ \alpha_n=0\end{cases}$$

Ainsi, la seule manière d'écrire $\overrightarrow{O_E}$ comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{L}'$est la manière triviale. J'en conclus que $\mathscr{L}'$ est libre. Quitte à changer l'ordre des vecteurs en utilisant op1) je peux affirmer la preuve faite en ajoutant $\beta\overrightarrow{u_2}$ à $\overrightarrow{u_1}$ permet de conclure plus généralement que op2) conserve la liberté d'une famille.

Op3) Soit $\beta\in K^*$ et $\mathscr{L}'=(\beta\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$. Montrons que $\mathscr{L}'$est libre. Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in K^n$.

$\overrightarrow{O_E}=\alpha_1(\beta\overrightarrow{u_1})+\alpha_2\overrightarrow{u_2}+..+\alpha_n\overrightarrow{u_n} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_E}=\beta\alpha_1\overrightarrow{u_1}+\alpha_2\overrightarrow{u_2}+\alpha_3\overrightarrow{u_3}+..+\alpha_n\overrightarrow{u_n}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\\ \vdots\\ \alpha_n=0\end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ \beta\neq 0} \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\\ \vdots\\ \alpha_n=0\end{cases}$$

Ainsi, la seule manière d'écrire $\overrightarrow{O_E}$ comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{L}'$est la manière triviale. J'en conclus que $\mathscr{L}'$ est libre. Quitte à changer l'ordre des vecteurs en utilisant op1) je peux affirmer la preuve faite en multipliant $\overrightarrow{u_1}$ par β permet de conclure plus généralement que op3) conserve la liberté d'une famille.

55 Conséquence : Soit $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ une famille libre et $\vec{u}_{n+1}$ un vecteur de E . Alors $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n},\vec{u}_{n+1})$ est libre sietssi $\vec{u}_{n+1}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$.

56 Prop. : Familles libres de référence

1) Toute famille de polynômes non nuls et tous de degrés différents (famille dite échelonnée en degré) est libre.
2) Toute famille d'éléments de K^n ou de $M_{n,1}(K)$ « échelonnée » sans vecteur nul est libre.

57 Des exercices classiques à savoir faire!!

1. Soit $N\in M_n(K)$ tel que N nilpotente d'indice p . Montrer que $(I,N,N^2,..,N^{p-1})$est libre.
2. Soit $\forall k\in[\![0,n]\!], P_k(X)=X^k(X+1)^{n-k}$. Montrer que $(P_0,P_1,..,P_n)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $a_0,..,a_n$ des complexes distincts et$\forall k\in[\![0,n]\!], L_k(X)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{1}{a_k-a_j}(X-a_j)$ Montrer que $(L_0,L_1,..,L_n)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{C}_n[X]$.
4. Soit $a_0,..,a_n$ des réels distincts et $\forall k\in[\![0,n]\!], f_k:(t\mapsto e^{a_k t})$. Montrer que $(f_0,f_1,..,f_n)$ est une famille libre dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
5. Soit $a_0,..,a_n$ des réels distincts et $\forall k\in[\![0,n]\!], f_k:(t\mapsto|t-a_k|)$. Montrer que $(f_0,f_1,..,f_n)$ est une famille libre dans $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
6. Soit $b_1,..,b_p$ des nombres complexes distincts et $\forall k\in[\![1,p]\!], u_k$ est la suite géométrique de raison b_k et de premier terme 1 . Montrer que $(u_1,..,u_p)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

58 Méthode :

1) Pour montrer qu'une famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ est libre, je vais considérer des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_i} = \vec{O}$. Et par déduction, je vais montrer que ces scalaires sont nécessairement nuls.
2) Pour étudier la liberté d'une famille de vecteurs ou pour trouver toutes les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de la famille, je vais
   a) Regarder s' il existe une relation de dépendance linéaire évidente entre les vecteurs de cette famille.
   b) Résoudre l'équation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_i} = \vec{O}$ d'inconnue $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$.

   Les solutions de cette équation sont

   soit uniquement $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0,0, \dots ,0)$ ce qui signifie que la famille étudiée est libre.

   soit d'autres solutions apparaissent qui signifie que la famille étudiée est liée et les solutions me donnent toutes les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de la famille, c'est-à-dire toutes les manières d'écrire certains vecteurs comme combinaison linéaire d'autres.

59 Exemple : Soit E un K –espace vectoriel et $\mathscr{L} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$une famille libre de vecteurs de E.

On pose: $\begin{cases} \vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k} \\ \vec{v} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k} \\ \vec{w} = -2\vec{\imath} + \vec{k} \\ \vec{t} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k} \end{cases}$. Etudions la liberté de $\mathscr{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$.

Soit $(a, b, c, d) \in K^4$.

$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} + d\vec{t} = \overrightarrow{O_E} \Leftrightarrow a(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}) + b(-\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}) + c(-2\vec{\imath} + \vec{k}) + d(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}) = \overrightarrow{O_E}$

$\Leftrightarrow (a - b - 2c + d)\vec{\imath} + (-2a - b + 2d)\vec{\jmath} + (-3a + 3b + c - d)\vec{k} = \overrightarrow{O_E}$ ←**une écriture de $\overrightarrow{O_E}$comme c.l. de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$**

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{par\ unicité \\ de\ l'écriture\ de\ \vec{O} \\ comme\ c.l.des \\ vecteurs\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}.}} \begin{cases} a - b - 2c + d = 0 \\ -2a - b + 2d = 0 \\ -3a + 3b + c - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - 2c + d = 0 \\ -3a + 2c + d = 0 \\ -5c + 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{5}d - \frac{4}{5}d + d = \frac{4}{5}d \\ a = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}d + d\right) = \frac{3}{5}d \\ c = \frac{2}{5}d \end{cases} \text{ et } d \text{ quelconque.}$$

Donc, $\forall d \in K, \frac{3}{5}d\vec{u} + \frac{4}{5}d\vec{v} + \frac{2}{5}d\vec{w} + d\vec{t} = \overrightarrow{O_E}$ et ce sont les seules relations de dépendance linéaires entre les vecteurs de $\mathscr{F}$.

En particulier, en prenant $d = 1$, on obtient : $\vec{t} = -\frac{3}{5}\vec{u} - \frac{4}{5}\vec{v} - \frac{2}{5}\vec{w}$. Donc l'une des vecteurs de $\mathscr{F}$ est $c.l.$ des autres. La famille $\mathscr{F}$est donc liée.

60 Prop. : Si la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ est libre alors toute combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ et on peut utiliser l'identification des coefficients de la manière suivante :

$$\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + .. + \alpha_n\overrightarrow{u_n} = \beta_1\overrightarrow{u_1} + \beta_2\overrightarrow{u_2} + .. + \beta_n\overrightarrow{u_n} \underbrace{\Longrightarrow}_{car\ (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})\ libre.} \alpha_1 = \beta_1 \text{ et } \alpha_2 = \beta_2 \text{ et } \dots \text{ et } \alpha_n = \beta_n.$$

2. Familles génératrices

61ef. Caractérisation (Rappel) : Soit $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E.

1) $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ est une **famille génératrice** de F (ou engendre F) lorsque $F = vect\ (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$.

62 Caractérisation d'une famille génératrice : Soit <u>F un ss-e-v du K-e-v E</u> et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs de E .
La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est génératrice de F ***si et ssi*** $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ sont éléments de F et tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$.

63Exemple : Soit $F = \{\begin{pmatrix} x & z \\ y & x \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$. Montrons que F est un ss-e-v de $M_2(\mathbb{R})$ engendré par trois vecteurs.

$$F = \{\begin{pmatrix} x & z \\ y & x \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + +z\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Donc, F est le ss-e-v de $M_2(\mathbb{R})$ engendré par les trois vecteurs$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

64Exercice : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Déterminer une famille génératrice de $Ker(A)$ et une famille génératrice de $Im(A)$

65Exercice Dans $\mathbb{R}^n$ ...

1) Soit F le ss-e-v de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1,0,1,3)$, $(1,1,1,1)$ et $(1,1,0,0)$. Déterminer une équation cartésienne de F.
2) Soit $F = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 / x + 5z - 2t = 0, x - y + z - w - t = 0\ \ et\ 2x + 3y + z - w + 4t = 0\}$. Montrer que F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^5$.
3) Soit $F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$. Montrer que F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^n$ et en trouver une famille génératrice.

66 Méthode: En exercice, l'énoncé décrit un sous- ensemble F d'un K-e-v E donné. Pour prouver que F est un ss-e-v de E et en trouver une famille génératrice. On a alors deux possibilités :

1) Le « tout en un » : montrer directement que $F = vect\ (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ avec $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E. Alors on peut conclure que F est un ss-e-v de E et $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ est une famille génératrice de F.
2) En deux temps : montrer que F est un ss-e-v de E puis prouver que chaque vecteur de F est une combinaison linéaire de vecteurs de $\boldsymbol{F}$: $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$, connus et fixés.
3) On peut aussi utiliser les deux résultats suivants :

67Prop (Rappel).R Si $F = vect(\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p})$ et Si $G = vect(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$ alors $F + G = vect(\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p}, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$

68 Théorème

1) Echanger deux vecteurs (op1) d'une famille génératrice, ajouter à un vecteur de cette famille un autre vecteur de la famille multiplié par un scalaire (op2) et multiplier un vecteur de cette famille par un scalaire non nul (op3) sont trois opérations qui conserve le caractère générateur de la famille.

2) Toute famille de vecteurs de E contenant une famille génératrice de E est génératrice de E.

3) Si j'ôte à une famille génératrice de E un vecteur qui est combinaison linéaire des autres, la famille obtenue est encore génératrice de E .

NB Je ne peux pas ôter n'importe quel vecteur si je souhaite garder la genèse !!!!

69 Conséquence : $vect(\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p}) = vect(\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p}, \vec{f_{p+1}})$ si et ssi $\vec{f_{p+1}}$ est combinaison linéaire de $\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p}$.

3. Bases

70 Def. : Soit E un K-e-v. Une famille de vecteurs est une **base** de E lorsque cette famille est une famille de vecteurs de E, libre et génératrice de E .

71NB : cette définition s'applique au ss-e-v puisqu'un ss-e-v est un e-v.

72 Théorème ou caractérisation : Soit $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E.
$(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ est une base de E **si et seulement si** tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$.

L'existence est donnée par le caractère générateur.
L'unicité est donnée par la liberté.

73 NB lorsque E peut être un $\mathbb{R}$-e-v et un $\mathbb{C}$-e-v, on précisera s'il s'agit d'une base sur le $\mathbb{R}$-e-v appelée $\mathbb{R}$-base ou sur le $\mathbb{C}$-e-v appelée $\mathbb{C}$-base.

74Def. : Lorsque $B = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$est une base de E alors $\forall \vec{x} \in E, \exists! \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_{dépendente\ \vec{x}} \in K^n / \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_i}$.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont les **composantes** de $\vec{x}$ dans la base B et pour chaque $k \in [\![1, n]\!], \alpha_k$ est sa **composante** selon $\overrightarrow{u_k}$.
$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est le n-uplet des **composantes** de $\vec{x}$ dans la base B.
$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ est la matrice des composantes de $\vec{x}$ dans la base B , on note : $mat_B\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

75Exemples de référence :

- Un vecteur $\vec{u}$ non nul forme une base de la droite vectorielle $D = vect(\vec{u})$.
- Deux vecteurs d'un plan vectoriel P non colinéaires forment une base de P.
- Trois vecteurs de l'espace géométrique E non coplanaires forment une base de l'espace géométrique E .
- (1) est une $\mathbb{R}$- base de $\mathbb{R}$. (1) est une $\mathbb{C}$- base de $\mathbb{C}$.

  Car, tout réel (resp. complexe) x s'écrit de manière unique sous la forme $x = \lambda.1$ où $\lambda \in \mathbb{R}(resp. \mathbb{C})$ (nécessairement $\lambda = x$); donc, (1) est $\mathbb{R}$- base de $\mathbb{R}$ *et une* $\mathbb{C}$- base de $\mathbb{C}$.
- $(1, i)$ est une $\mathbb{R}$- base de $\mathbb{C}$.

  car, tout complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a.1 + b.i$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (nécessairement $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$); donc, $(1, i)$ est une $\mathbb{R}$- base de $\mathbb{C}$.
- $\mathscr{B}_c = ((1,0, \dots,0), (0,1,0, ..,0), \dots, (0, \dots,0,1))$est une base de K^n appelée base canonique.

  car prenons $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$. Alors $X = x_1(1,0, \dots,0) + x_2(0,1,0, \dots,0)+..+x_n(0,0, \dots,1)$. Donc, X est c.l. de $(1,0, \dots,0), (0,1,0, ..,0), \dots, (0, \dots,0,1)$. Ainsi $\mathscr{B}_c$ est génératrice de K^n. De plus, $\mathscr{B}_c$ est échelonnée dans vecteur nul donc est libre. Donc, $\mathscr{B}_c$ est une base de K^n.

- Dans $M_{n,p}(K)$, notons E_{ij} la matrice de type (n,p) dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne i et colonne j qui vaut 1. La famille $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ est une base de $M_{n,p}(K)$ appelée base canonique.
- Soit n un entier naturel. la famille $(1,X,X^2,\dots,X^n)$est la base canonique de $K_n[X]$. Soit a un scalaire. La famille $(1,X-a,(X-a)^2,\dots,(X-a)^n)$ est la base de taylor de $K_n[X]$ en a et les composantes d' un polynôme P de $K_n[X]$ dans cette base de Taylor sont $\left(\frac{P^{(0)}(a)}{0!},\frac{P^{(1)}(a)}{1!},\frac{P^{(2)}(a)}{2!},\dots,\frac{P^{(n)}(a)}{n!}\right)$(pour $a=0$ on retrouve la base canonique). La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de $K[X]$ et $((X-a)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la base Taylor en a de $K[X]$.

  car tout polynômes de $K_n[X]$ s'écrit de manière unique comme $c.l.$ des polynômes$(1,X-a,(X-a)^2,\dots,(X-a)^n)$ d'après la formule de Taylor sur les polynômes. Et par conséquent, tout polynôme de $K[X]$ s'écrit de manière unique comme $c.l.$ des polynômes$((X-a)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'après la formule de Taylor sur les polynômes.
- Posons $f_n:(x\mapsto x^n)$. Alors la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de l'ensemble des fonctions polynomiales de réelles.

  Car toute fonction polynomiale s'écrit de manière unique come $c.l.$ des fonctions f_n tq $n\in\mathbb{N}$.

76 D'autres exemples déjà rencontrés.

- L'ensemble S des solutions de l'équa. diff. $y'+a(x)y=0$ où a $continue$ sur I a pour base (f_0) où $f_0:(x\to e^{-A(x)})$ tq A primitive de a sur I .

  car (f_0) est génératrice de S et libre car constituée d'un seul vecteur non nul.
- Soit a , b des réels. L'ensemble S des solutions de l'équa. diff. $y''+ay'+by=0$ est un espace vectoriel de base (f_1,f_2) où

$f_1:(x\to e^{r_1x})et$ $f_2:(x\to e^{r_2x})$ avec r_1 et r_2 solutions de $(e.c)$ si $\Delta>0$

$f_1:(x\to e^{r_0x})et$ $f_2:(x\to xe^{r_0x})$ avec r_0 solution de $(e.c)$ si $\Delta=0$

$f_1:(x\to \cos(\omega x)e^{\rho x})et$ $f_2:(x\to \sin(\omega x)e^{\rho x})$ avec $r_1=\rho+i\omega$ et $\overline{r_1}$ solutions de $(e.c)$ si $\Delta<0$

car (f_1,f_2) est génératrice de S et libre. En effet, les deux fonctions ne sont pas colinéaires.

- Soit r cpxe non nul fixé. $((r^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de la droite vectorielle des suites cpxes géométriques de raison r.
- $((1)_{n\in\mathbb{N}},(n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de l'ensemble des suites réelles arithmétiques.
- Soit a , b des réels. L'ensemble S des suites u vérifiant $u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n=0$ est un plan vectoriel de base (u,v) où

$u=({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec r_1 et r_2 solutions de $(e.c)$ si $\Delta>0$

$u=({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(n{r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec r_0 solution de $(e.c)$ si $\Delta=0$

$u=(\cos(n\theta)r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(\sin(n\theta)r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $r_1=re^{i\theta}$ $(r\neq 0$ et $\theta\not\equiv 0[\pi])$ et $\overline{r_1}$ solutions de $(e.c)$ si $\Delta<0$

car (u,v) est génératrice de S et vérifions que (u,v) est libre. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$tq : $au+bv=0$.
Alors $\forall n\in\mathbb{N},au_n+bv_n=0$ i.e. $\forall n\in\mathbb{N},a\cos(n\theta)r^n+b\sin(n\theta)r^n=0$.
Comme $r^n\neq 0$, on a: $\forall n\in\mathbb{N},a\cos(n\theta)+b\sin(n\theta)=0$. En particulier, pour $n=0$, on obtient $a=0$ et par conséquent, $\forall n\in\mathbb{N},b\sin(n\theta)=0$. En particulier pour $n=1$, $b\sin(\theta)=0$.Or, $\theta\not\equiv 0[\pi],\sin(\theta)\neq 0$. Donc $b=0$. J'en déduis que $0u+0v=0$ est la seule manière d'écrire la suite nulle comme $c.l.$ de u et v.

- Soit $p\in\mathbb{N}^*$. L'ensemble des suites u périodiques de période p fixée admet pour base la famille $\left(u^{(0)},u^{(1)},..,u^{(p-1)}\right)$ où $\forall k\in[\![0,p-1]\!],u^{(k)}=(\underbrace{0}_{rang\ 0},\dots,0,\underbrace{1}_{rang\ k},0,\dots\dots..0,\underbrace{1}_{rang\ k+p},0,\dots..,0,\underbrace{1}_{rang\ k+2p},0,\dots.)$

  Car Soit v une suite p-périodique. $v=\lambda_0u^{(0)}+\lambda_1u^{(1)}+..+\lambda_{p-1}u^{(p-1)}\Leftrightarrow v=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_{p-1},\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_{p-1},\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\dots)$ $\Leftrightarrow\lambda_0=v_0,\lambda_1=v_1,..,\lambda_{p-1}=v_{p-1}$. Donc toute suite p-périodique s'écrit de manière unique comme $c.l.$ de $u^{(0)},u^{(1)},..,u^{(p-1)}$.

77 Méthode : pour trouver une base d'un K-e-v E, une méthode consiste
1)à trouver une famille génératrice de cet espace.
2) d'étudier toutes les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de cette famille.
3) d'éliminer les vecteurs qui s'écrivent comme combinaison linéaire des autres. Ainsi, je conserve le caractère générateur de ma famille et je gagne de la liberté !!

78 Exercices :

1. Déterminer une base de F=$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ 2x-3y+4z=0\}$.
2. M_1=$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, M_2=$\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, et M_3=$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Montrons que (M_1,M_2) est une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ et déterminons les composantes de M_3 dans cette base.
3. $\boldsymbol{F}=\{\boldsymbol{P}\in\mathbb{R}_{\boldsymbol{n}}[X]/(X^2-1)P''-2XP'=0\}$. Déterminons une base de F.
4. Déterminer une base de $F=vect((f_k)_{k=0..6})$où $f_0=1,f_1:(x\to cosx),f_2:(x\to sinx),f_3:(x\to cos^2x),f_4:(x\to sin^2x),f_5:(x\to \cos(2x))$, $f_6:(x\to sin2x)$.