

TD 17

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels. Familles libres-génératrices-bases .

I Sous-espace vectoriel . Famille génératrice

Ex 1 vect(...)

- Montrer que $\text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
- Soit $P(X) = 1 + 2X + X^2$, $Q(X) = 2 - X - 2X^2$ et $R(X) = -1 + 2X + kX^2$.
Déterminer les réels k tels que : $\text{vect}(P, Q) = \text{vect}(P, Q, R)$.

Ex 2 Espace vectoriel quelconque

Soit $(E, +, \cdot)$ un $K - e - v$.

- Soit F et G deux ss-e-v d'un $K - e - v$ E tq : F et G distincts de E et de $\{\vec{0}_E\}$.
 $E \setminus F$ est-il un ss-e-v de E ? $E \setminus F \cup \{\vec{0}_E\}$ est-il un ss-e-v de E ? $(F \cup G)$ est-il un ss-e-v de E ?
- Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E .
 - Soit F un ss-e-v de E contenant $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$. Quelle propriété fondamentale de G justifie $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) \subset F$?
 - Soit $F = \{\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p / (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p\}$ et $G = \{\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p / (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p \text{ et } \alpha_1 + \dots + \alpha_p = 0\}$. Lequel de ces deux ensembles F ou G est $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$? Justifier.
 - Montrer que F et G sont deux ss-e-v de E et en donner des familles génératrices.
 - Donner une écriture de \vec{u}_2 puis de $\vec{0}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$. Ces écritures sont-elles uniques ? A quelle condition sur \mathcal{B} , cette écriture est-elle unique ?
 - Compléter et justifier : $\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{w}) = \text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ si et seulement si $\vec{w} \dots \dots \dots$
 - Déterminer plusieurs familles génératrices de F et de G .

Ex 3 Ensembles de fonctions

Barrer dans la liste suivante les ensembles F qui ne sont pas des ss-e-v. Expliquer pourquoi ils n'en sont pas et pourquoi les autres sont des ss-e-v. Dans les cas (*), chercher une famille génératrice puis une base et la dimension de F . On précisera quand F est un plan ou une droite vectoriel(le).

- F est l'ensemble des fonctions réelles et constantes. (*)
- F est l'ensemble des fonctions réelles et polynomiales et de degré n . (*)
- F est l'ensemble des solutions de : $y' = xy + 1$.
- F est l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} positives.
- $F = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) / f'' = (1 + 2i)f' - 2if\}$. (*)
- Soit L un réel fixé. F est l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de limite L en $+\infty$.
- $F = \{(x \mapsto (ax^2 + bx + c)\cos(x)) / a, b, c \text{ réels}\}$. (*)
- $F = \{(x \mapsto \tilde{P}(x)ch(x) + \tilde{Q}(x)sh(x)) / (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]\}$. (*)
- $F = \{f \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, (x^3 - 1)f'(x) = xf(x)\}$. (*)
- Soit $F = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \exists (a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\cos(x - \alpha) + b\cos(x - \beta)\}$. (*)
- Soit φ une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . F est l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} négligeables devant φ au voisinage de 0.
- $F = \{f \in C^0([-1, 1], \mathbb{R}) / f|_{[-1, 0]}$ et $f|_{[0, 1]}$ sont affines $\}$. (*)

Ex 4 Ensembles de n -uplets Mêmes questions....

- $F = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } xz = y\}$
- $F = \left\{ (x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 / \begin{cases} 2x + y + 3z + t - 2w = 0 \\ 3x - y + z + 2t + w = 0 \\ 5x - 2y - z + t + 3w = 0 \end{cases} \right\}$. (*)
- Soit $n \geq 3$ et $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^n kx_k = \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$. (*)
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - y)^2 = (x + y)^2\}$.

Ex 5 Ensembles de vecteurs de l'espace géométrique E Mêmes questions....

Soit $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trois vecteurs de E non coplanaires (ils forment donc une base de E)

- $F = \{\vec{u} \in E / \exists (\mu, \gamma) \in \mathbb{R}^2; \vec{u} = \mu\vec{i} + \gamma\vec{j}\}$. (*)
- $F = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } a + b + c = 0\}$. (*)
- $D = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ a + 4b - 2c = 0 \end{cases}\}$. (*)
- Soit t un réel. $F_t = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } a + b + c = t\}$

5. $F = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } a^2 + bc = 0\}$

6. Soit a un réel fixé. $F_a = \{\vec{u} \in E / \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{i}}_{\substack{\text{produit} \\ \text{scalaire}}} = a\}$.

Ex 6 Ensembles de suites Mêmes questions....

1. Soit a un réel fixé. F est l'ensemble des suites réelles vérifiant : $\forall n, u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = a$. (*)
2. F est l'ensemble des suites vérifiant : $\forall n, u_{n+1} = u_n^2$.
3. Soit r un complexe non nul fixé. F est l'ensemble des suites arithmétiques de raison r .
4. F est l'ensemble des suites complexes et bornées.
5. Soit u une suite réelle fixée. F est l'ensemble des suites équivalentes à u .

Ex 7 Ensembles de polynômes Mêmes questions....

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. $F = \{a + (a + b + c)X + (2c - b)X^2 / a, b, c \text{ réels}\}$. (*)
2. $F = \{a + bX + cX^2 + dX^3 / a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ et } \begin{cases} a + b - c + 2d = 0 \\ 2a + b - c + d = 0 \end{cases}\}$. (*)
3. $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / (X^2 + 1)P'' - 6P = 0\}$. (*)
4. F est l'ensemble des polynômes de degré 5.
5. F est l'ensemble des polynômes constants. (*)
6. $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = P''(1) = 1\}$.
7. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \int_0^1 \tilde{P}(t)dt = 0\}$. (*)
8. $F = \{P \in \mathbb{R}_5[X] / \tilde{P}(1) = \tilde{P}(-1) = \tilde{P}'(-1)\}$. (*)
9. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \tilde{P}(3) + 2\tilde{P}''(3) = \tilde{P}'(3)\}$. (*)
10. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(X+1) = P(X)\}$. (*)
11. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / XP(X+1) = (X+3)P(X)\}$. (*)
12. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0) = 0\}$. (*)

Ex 8 Ensembles de matrices Mêmes questions....

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & y+z & x+z \\ -y & z & -x \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \right\}$ (*)
2. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \text{ et } \begin{cases} a + d = b - c \\ 2a + 3b = c + d \end{cases} \right\}$ (*)
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ (*) dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.
4. F est l'ensemble des matrices complexes carrées d'ordre 2 de déterminant nul.
5. Soit $A \in M_n(K)$ et $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / \exists P \in GL_n(K), M = PAP^{-1}\}$ (F est l'ensemble des matrices semblables à A).
6. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} / xy = 0 \right\}$ puis $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} / xy \neq 0 \right\}$
7. $F = S_3(\mathbb{R})$ (*) puis $F = AS_3(\mathbb{R})$ (*) puis $F = D_n(\mathbb{R})$. (*) puis $F = TI_n(\mathbb{R})$. (*)
8. F est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n nilpotentes.

II Somme, intersection, supplémentaires, somme directe or nothing

Ex 9 dans K^n

1. Soit $F = \{(a + 2b, a, 2a + b, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z = 0 \text{ et } x + y - t = 0\}$
 - a. Montrer que F et G sont deux plans vectoriels de \mathbb{R}^4 .
 - b. Justifier que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^4 .
 - c. Ecrire $X = (1, 2, 3, 4)$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .
2. $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \text{vect}((1, 1, \dots, 1, 1))$ et $G = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$.
 - a. Justifier que F et G sont des ss-e-v de E et en déterminer une famille génératrice puis une base.
 - b. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
3. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\}$ et $G = \{(a, 3a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
 - a. Montrer que G et F sont deux plans vectoriels. On en donnera une base et on donnera une équation de G .
 - b. Donner une famille génératrice de $F + G$, de $F \cap G$.
 - c. Trouver un vecteur $X \in G$ tel que F et $\text{vect}(X)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
4. Soit $F = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 / \begin{cases} 3x - y + z - t + w = 0 \\ 2x - y - 2z - t - w = 0 \end{cases}\}$ et $G = \{(a, a + 2b, b - a, 2a + b, a + b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
 - a. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de \mathbb{R}^5 . F et G sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^5 ?
 - b. Montrer que $F = \text{vect}((-2, -6, 0, 1, 1), (3, 9, -1, -1, 0), (1, 4, -1, -1, 1))$
 - c. Pour quelles valeurs du réel x , $(2x, 0, 3, -3, x) \in G$?
 - d. Donner un système d'équations décrivant G (comme pour F).

Ex 10 dans $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$

1. Soit E l'espace vectoriel des applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} continues sur $[0, 1]$. Soit F l'ensemble des applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} constantes et $G = \{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) / \int_0^1 f(t)dt = 0\}$
 - a. Justifier que F est une droite vectorielle.
 - b. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de E supplémentaires dans E . Que peut-on alors dire de G ?
 - c. Décomposer $(x \mapsto x^2 \ln(1 + x))$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

2. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$, G l'ensemble des applications affines et H l'ensemble des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à n et $V = \text{vect}(ch, sh)$
- Montrer que F , G et H sont des ss-e-v de E tels que $F \oplus G = E$ et $F \oplus V = E$.
 - Déterminer $f \in F$ et $g \in G$ telles que $\exp = f + g$. Donner une expression intégrale à f .
 - Déterminer une base de G et une base de H .
 - Décrire $F \cap H$ et $G \cap H$. Montrer que $(F \cap H) \oplus G = H$.

Ex 11 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- Soit $p \in \mathbb{N}$ et $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n, u_{n+4} = u_n\}$ et $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_3 = u_2 = u_1 = u_0 = 0\}$.
 - Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 - Déterminer une base de F .
- Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$, $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0\}$ et G l'ensemble des suites géométriques de raison 2.
 - Montrer que E est un \mathbb{R} -e-v.
 - Montrer que F est un plan vectoriel de E et G une droite vectorielle de E .
 - Prouver que F et G sont supplémentaires dans E . En déduire une famille génératrice de E .
 - Si l'on définissait une équation caractéristique de E , quelle serait-elle ? Quelles seraient ses solutions ? Est-ce cohérent avec le résultat de la question 3. et le cours sur les suites récurrentes d'ordre 2 ?

Ex 12 dans $\mathbb{R}[X]$.

- Soit $F = \{aX + bX^2 / a, b \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / \tilde{P}(1) = \tilde{P}'(2) = 0\}$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.
- Soit Q un polynôme réel fixé non nul et de degré p . Soit F l'ensemble des polynômes divisibles par Q . Montrer que F et $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ sont deux sous-e-v supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
- $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / \tilde{P}(1) = 0\}$ et $G = \{aX / a \in \mathbb{R}\}$.
 - Montrer que G est une droite vectorielle.
 - Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
 - Donner un sous espace vectoriel de E qui ne soit pas supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une famille génératrice de $F \cap \mathbb{R}_n[X]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et a_0, a_1, \dots, a_n des réels tous distincts.
 - Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer l'unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}, \tilde{L}_i(a_k) = 0$ et $\tilde{L}_i(a_i) = 1$.
 - Montrer que (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner les composantes du polynôme constant 1 dans cette base.
 - En déduire que $\varphi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par : $\varphi(P) = (\tilde{P}(a_0), \tilde{P}(a_1), \dots, \tilde{P}(a_n))$ est bijective.
 - On définit $F = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ polynomiale et } \deg(f) \leq n\}$ et $G = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0\}$. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ supplémentaires dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \tilde{P}(1) = \tilde{P}(0)\}$.
 - Montrer que F est un ss-e-v de $\mathbb{R}[X]$ et en trouver une base de F .
 - Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$ supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.
 - Trouver une base de G .

Ex 13 dans $M_n(\mathbb{R})$.

- $E = M_n(\mathbb{R})$. Soit F l'ensemble des matrices de E de trace nulle.
 - Démontrer que F et $\text{vect}(I_n)$ sont deux sous-e-v de $M_n(\mathbb{R})$ supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.
 - Trouver une base de F .
- $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.
 - Montrer que le système $(S_\lambda): AX = \lambda X$ est de Cramer si et seulement si $\lambda \notin \{-2, 1\}$.
 - Soit $H = \text{Sol}((S_1))$ et $K = \text{Sol}((S_{-2}))$. Montrer que $H \oplus K = M_{3,1}(\mathbb{R})$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / AM = O_3\}$ et $G = \{M \in F / AM = MA\}$.
 - Montrer que F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ et G est un ss-e-v de F .
 - Trouver une base de F et une base de G .
 - A est-elle inversible ? Les éléments de F sont-ils inversibles ?
 - Déterminer toutes les matrices M de F telles que $A + M$ est inversible.
 - Prouver que F et G sont stables par produit matriciel.
- Soit $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / DM = MD\}$. Soit (e) l'équation $M^3 = D$ d'inconnue $M \in M_2(\mathbb{R})$.
 - Montrer que F est un ss-e-v de $M_2(\mathbb{R})$ et en trouver une base.
 - Montrer que si M est solution de (e) alors $M \in F$. En déduire les solutions de (e) .

III Familles libres, familles liées. Bases.

Ex 14 Liberté ou liaison d'une famille de fonctions

- Soit $f_0 = 2$, $f_1 : (x \mapsto \ln(3x))$, $f_2 : (x \mapsto \frac{1}{x})$, $f_3 : (x \mapsto \ln(9x))$, $f_4 : (x \mapsto \frac{1}{x^2+x})$, $f_5 : (x \mapsto \frac{1}{x+1})$, $f_6 : (x \mapsto \frac{\ln(x)}{x})$. Déterminer une base de $\text{vect}(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, $f_1 = \sin$, $f_2 : (t \mapsto \sin(t+a))$ et $f_3 : (t \mapsto \cos(t+a))$. (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ?
- Soit $f_1 = \exp$, $f_2 : (t \mapsto \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)e^{-\frac{t}{2}})$ et $f_3 : (t \mapsto \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)e^{-\frac{t}{2}})$ et $G = \text{vect}(f_1, f_2, f_3)$.
 - Soit a, b, c trois réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$. Montrer que $a = b = c = 0$ par deux méthodes.
 - Prendre des valeurs de t et conclure.
 - Utiliser un développement limité de $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0 et conclure.
 - Quelle est $\dim(G)$?
 - Soit $F = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f'' + f' + f = 0\}$. Montrer que $G = F \oplus \text{vect}(f_1)$.
 - Déterminer une base de $\text{vect}(g_1, g_2, g_3, g_4)$ où

$$g_1 : (t \mapsto 3e^{-\frac{t}{2}}(\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - 2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)))$$

$$g_2 : (t \mapsto e^t - e^{-\frac{t}{2}}(\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)))$$

$$g_3 : (t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}(2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)) + e^{3t/2})$$

$$g_4 : (t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}(-\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + 3\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)) + 4e^t).$$
- Montrer que ces familles sont libres
 - $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $f_k : (x \mapsto \text{Arctan}^k(x))$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(f_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est libre.
 - $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $h_k : (x \mapsto \cos(kx))$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(h_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est libre.
 - $\forall a \in I$, on pose $f_a : (x \mapsto x^a)$. Soit a_1, a_2, \dots, a_n des réels distincts. Montrer que la famille $(f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n})$ est libre dans $C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.
 - $\forall a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_a : (x \mapsto \sqrt{|x-a|})$. Soit a_1, a_2, \dots, a_n des réels distincts. Montrer que la famille $(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, \dots, \varphi_{a_n})$ est libre dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 - $\forall a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_a : (x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases})$. Soit a_1, a_2, \dots, a_n des réels distincts. Montrer que la famille $(\varphi_a)_{a \in I}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_k : (t \mapsto e^{kt})$. Montrer que (f_0, f_1, \dots, f_n) est libre.

Ex 14 Famille de polynômes.

- Etudier la liberté de la famille (P_1, P_2, \dots, P_5) tel que $P_1 = 1 - 2X + X^3$, $P_2 = -2X - X^4$, $P_3 = X^2 - 2X^3 + 2X^4$, $P_4 = 3 + 2X - 3X^4$, $P_5 = 1 - X^2 - X^3 - X^4$.
- Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tq $a \neq b$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $((X+a)^{n-k}(X+b)^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est libre.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et pose pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X-k}{i-k}$. Montrer que la famille $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Quelles sont les composantes du polynôme 1 puis de X dans cette base ?
- Déterminer une \mathbb{R} -base du \mathbb{R} -e-v $\mathbb{C}_3[X]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\deg(P) = n$. Justifier que $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 15 Famille de suites.

- Montrer que la famille de suites (u, v, w, z) est libre lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln^2(n+1), v_n = \sqrt{n}, w_n = (-1)^n, z_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

- $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_k = (n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ (on note $v_k(n) = n^k$). Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_0, v_1, \dots, v_m) est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Déterminer est une base du \mathbb{C} -e-v des suites complexes 4-périodiques.
- Soit $u = (1, 10, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)$, $v = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots)$, $w = (1, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 0, \dots)$ et $t = (0, 0, 3, 1, 0, 0, 3, 1, 0, 0, \dots)$. Montrer que (u, v, w, t) est une base du \mathbb{C} -e-v des suites 4-périodiques.

Exercice 16 Dans un K-e-v E de dimension quelconque.

- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\mathcal{L} = (\vec{u}_i)_{i=1..n}$ une famille libre de vecteur d'un K-espace vectoriel E.
 - Etudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n, \vec{u}_1 + \vec{u}_n)$.
 - Soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Justifier que $\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ et $\text{vect}(\vec{u}_{p+1}, \dots, \vec{u}_n)$ sont en somme directe.
 - Soit F et G deux ss-e-v de E tels que : $F \oplus G = E$ et $G = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$. Soit $\vec{a} \in F$ et $G_a = \text{vect}(\vec{a} + \vec{u}_1, \vec{a} + \vec{u}_2, \dots, \vec{a} + \vec{u}_p)$. Montrer que G_a et F sont supplémentaires dans E.
- Justifier que G_a est de dimension finie et déterminer sa dimension.
- Ici E est de dimension finie p, de base $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i=1..p}$. On pose : $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \vec{e}_i = \vec{e}_i - (\vec{e}_{i+1} + \vec{e}_{i+2} + \dots + \vec{e}_p)$ et $\vec{e}_p = \vec{e}_p$. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{e}_i)_{i=1..p}$ est une base de E. Soit $\vec{x} \in E$. Exprimer les composantes de \vec{x} dans la base \mathcal{B}' en fonction les composantes de \vec{x} dans B.

