

Programme de colle 24

CHAPITRE 16 : Espaces vectoriels.

Cf programme précédent

CHAPITRE 17 : Espaces vectoriels de dimension finie.

I Dimension finie .

Définition d'un K-e-v de dimension finie (resp. infinie).

Un K-e-v E est de dimension finie lorsque E admet une famille génératrice finie.

Condition suffisante pour être un K-e-v de dimension infinie .

Si E contient une famille $(\vec{e}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est libre alors E est de dimension infinie.

Comparaison du cardinal d'une famille libre et cardinal d'une famille génératrice

Dans un K-e-v E de dimension finie, le cardinal de n'importe quelle famille libre de vecteurs de E est inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice de E .

Existence d'une base et définition de la dimension.

Tout K-e-v E de dimension finie et non réduit à $\{\vec{0}_E\}$ a une base de cardinal fini et toutes les bases de E ont le même cardinal.

Ce cardinal commun à toutes les bases de E est la dimension de E .

Bases et dimension des K-e-v de référence .

Une droite vectorielle est un e-v de dimension 1. Un plan vectoriel est un e-v de dimension 2.

Si P est le $\mathbb{R} - e - v$ des vecteurs du plan, alors une base de P est formée de 2 vecteurs de P non colinéaires et $\dim_{\mathbb{R}} P = 2$

Si E est le $\mathbb{R} - e - v$ des vecteurs de l'espace géométrique alors une base de E est formée de trois vecteurs de E non coplanaires et $\dim_{\mathbb{R}} E = 3$.

$\dim_K K = 1$. Base de K : (1) .

$\dim_K K^n = n$. Base canonique de K^n : $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1))$

$\dim_K M_{n,p}(K) = np$. Base canonique de $M_{n,p}(K)$: $(E_{ij})_{(i,j) \in [1,n] \times [1,p]}$

$\dim_K K_n[X] = n + 1$. Base canonique de $K_n[X]$: $(1, X, X^2, \dots, X^n)$. Base de Taylor en α de $K_n[X]$: $(1, X - \alpha, (X - \alpha)^2, \dots, (X - \alpha)^n)$.

$\dim_K K[X] = +\infty$.

$\dim_K \mathcal{F}(I, K) = +\infty, \dim_K C^k(I, K) = +\infty, \dim_K D^k(I, K) = +\infty, \dim_K C^\infty(I, K) = +\infty$.

$\dim_K K^{\mathbb{N}} = +\infty$.

II Famille de vecteurs dans un K-e-v de dimension finie

Comparaison de la dimension avec le cardinal d'une famille libre et avec le cardinal d'une famille génératrice

Dans un K-e-v E de dimension finie, si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E , $\mathcal{B}$ est une base de E et $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de E alors, $\text{card}(\mathcal{L}) \leq \text{card}(\mathcal{B}) \leq \text{card}(\mathcal{G})$.

Caractérisation d'une base : famille libre et maximale ou famille génératrice et minimale .

Soit E K-e-v de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E

$\mathcal{F}$ est une base de E si et si $\mathcal{F}$ est libre et $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$.

si et si $\mathcal{F}$ est génératrice et $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$.

Théorème de complétion d'une famille libre pour obtenir une base

Dans un K-e-v E de dimension finie, toute famille libre $\mathcal{L}$ peut être complétée par $\dim(E) - \text{card}(\mathcal{L})$ vecteurs bien choisis parmi les vecteurs **Tapez une équation ici** d'une base de E pour obtenir une nouvelle base de E .

Théorème d'extraction d'une base d'une famille génératrice .

Dans un K-e-v E de dimension finie, de toute famille génératrice $\mathcal{G}$ on peut ôter $\text{card}(\mathcal{G}) - \dim(E)$ vecteurs bien choisis parmi les vecteurs d'une base de $\mathcal{G}$ pour obtenir une nouvelle base de E .

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base finie.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base d'un K-e-v E de dimension finie n . Soit $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs de E .

$\forall j \in \{1, \dots, p\}$, notons $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj})$ les composantes de $\vec{v}_j$ dans $\mathcal{B}$ ie. $\vec{v}_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \vec{e}_i$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}$$

$\Delta: (E \rightarrow M_{n,1}(K))$ est une bijection.

Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de E , α, β deux scalaires. Alors $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha \text{mat}_{\mathcal{B}} \vec{x} + \beta \text{mat}_{\mathcal{B}} \vec{y}$.

Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ des vecteurs de E . $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p$ si et si $\text{mat}_{\mathcal{B}} \vec{x} = \alpha_1 \text{mat}_{\mathcal{B}} \vec{v}_1 + \alpha_2 \text{mat}_{\mathcal{B}} \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \text{mat}_{\mathcal{B}} \vec{v}_p$.

Caractérisation matricielle d'une base

Soit $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ des vecteurs de E . $\mathcal{V}$ base de E si et si $\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{V}$ est inversible. Et le cas échéant, $(\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{V})^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{V}} \mathcal{B}$.

Matrice de passage entre deux bases

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E alors $\text{mat}_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_2$ est appelée la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

$\text{mat}_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_2$ est inversible et $(\text{mat}_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_2)^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}_2} \mathcal{B}_1$.

Formule de changement de bases pour les vecteurs

Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E . Soit $\vec{v}$ un vecteur de E . Alors, $\text{mat}_{\mathcal{B}_1}(\vec{v}) = \text{mat}_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_2 \times \text{mat}_{\mathcal{B}_2}(\vec{v})$.

III Ss-e-v d' un K-e-v de dimension finie

Dimension d'un sous-e-v d'un K-e-v de dimension finie .

Si F est un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$ et $(F = E \Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F))$.

Caractérisation de ss-e-v supplémentaires .

Soit F et G un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie .

F et G sont supplémentaires dans $E \Leftrightarrow$ la concaténation d' une base de F et une base de G est une base de E .

Lorsque $F \oplus G = E$, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Existence et construction d'un supplémentaire .

Si F est un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie alors F admet un supplémentaire dans E et ce supplémentaire est engendré par les vecteurs qui complètent une base de F pour obtenir une base de E .

Formule de Grassmann .

Soit F et G un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie . $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)$.

IV Rang d'une famille de vecteurs

Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E alors $rg \mathcal{F} = \dim(\text{vect}(\mathcal{F}))$.

$rg \mathcal{F} \leq \min(\dim E, \text{card} \mathcal{F})$.

$\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow rg(\mathcal{F}) = \text{card}(\mathcal{F})$

$\mathcal{F}$ est génératrice de $E \Leftrightarrow rg(\mathcal{F}) = \dim(E)$.

Si $\mathcal{B}$ est une base de E alors $rg(\mathcal{F}) = rg(\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F})$.

Chapitre 18 : Applications linéaires.

I Généralités

1. Définition

$f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans F lorsque f est une application de E dans F et $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ et $\forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) \in E^n, \forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n, f(\sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{u}_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(\vec{u}_k)$.

2. Exemples.

Application linéaire nulle : $\omega: E \rightarrow F$ telle que $\omega(\vec{x}) = \vec{0}_F$

Endomorphisme nul $\omega: E \rightarrow E$ telle que $\omega(\vec{x}) = \vec{0}_E$. Identité $\text{id}_E: E \rightarrow E$ telle que $\text{id}_E(\vec{x}) = \vec{x}$.

Homothétie h vectorielle de rapport $\alpha \in K^* : h: E \rightarrow E$ telle que $h(\vec{x}) = \alpha \vec{x}$.

Endomorphisme de K^n canoniquement associé à la matrice A de $M_n(K)$: $f: ((x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \dots, y_n))$ telle que : $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Application linéaire de K^p dans K^n canoniquement associée à la matrice A de $M_{n,p}(K)$: $f: ((x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto (y_1, y_2, \dots, y_n))$ telle que :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Trace, transposition, opérateur Intégral, dérivation (...).

3. Propriété fondamentale

Soit $B = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E et $(\vec{y}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Il existe une unique application linéaire f de E vers F qui vérifie : $\forall i \in I, f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$.

Une application linéaire f de E dans F est entièrement caractérisée par la donnée des images par f des vecteurs d'une base de E .

Deux applications linéaires de E dans F qui associent la même image à tous les vecteurs d'une base de E sont égales (partout).

Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Il existe une unique application linéaire u de E vers F tq : $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

Question de cours : Savoir énoncer tout résultat de cours et savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :

- 1) Dans un K-e-v E de dimension finie, le nombre d'éléments d'une famille libre est inférieur ou égal au nombre d'éléments d'une famille génératrice de E .
- 2) La formule de changement de bases pour les vecteurs.
- 3) Dans un K-e-v E de dimension finie, tout ss-e-v F de E admet un supplémentaire dans E .
- 4) La formule de Grassmann.
- 5) Soit $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base du K-e-v E et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$ une famille de vecteurs du K-e-v F . Démontrer qu'il existe une et une seule application linéaire f de E dans F telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(\vec{e}_k) = \vec{y}_k$.