Programme de colle 23

Révisions : équa. diff. et suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coeff. constants.

Chapitre 16 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels . Familles finies de vecteurs.

I Généralités.

1. Définition et règles de calcul

P1 $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \vec{x} + \vec{y} \in E$ et $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K, \alpha \cdot \vec{x} \in E$ (**E est stable par addition interne et multiplication externe**).

P2 (+) est ASSOCIATIVE et COMMUTATIVE i.e. $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E^3, (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ et $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

P3. (+) a un élément NEUTRE noté $\vec{0}_E$ ou $\vec{0}$ qui vérifie : $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$.

P4. Tout élément $\vec{x}$ de E a un unique SYMETRIQUE pour (+) . $\forall \vec{x} \in E, \exists ! \vec{y} \in E / \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$. Alors, $\vec{y}$ est noté $-\vec{x}$ et appelé l'opposé de $\vec{x}$. ($\vec{z} + (-\vec{x})$ est désormais noté $\vec{z} - \vec{x}$)

P5. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$ et $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$ (.) est distributive sur (+)

P6. $\forall \vec{x} \in E, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = \alpha\beta \cdot \vec{x} = \beta \cdot (\alpha \cdot \vec{x})$ (associativité mixte)

P7. $\forall \vec{x} \in E, 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

C1 $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K. (\alpha \cdot \vec{x} = \vec{0}$ si et ssi $\alpha = 0$ ou $\vec{x} = \vec{0}_E$)

C2 $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K, -\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x}$ et $-(\alpha \cdot \vec{x}) = (-\alpha) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (-\vec{x})$

C3 $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2 (\alpha - \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \vec{x} - \beta \vec{x}$ et $\alpha \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \alpha \vec{x} - \alpha \vec{y}$

Généralisation des propriétés P2 à 7 : Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs d'un $K - e - v E$ et $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ des éléments de K .

$$\sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{k=1}^r \vec{u}_k + \sum_{k=r+1}^p \vec{u}_k \text{ où } r \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket.$$

$$\sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{i=0}^{p-1} \vec{u}_{p-i}$$

$$\sum_{k=1}^p (\sum_{j=1}^n \vec{u}_{kj}) = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^p \vec{u}_{kj})$$

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{x} = (\sum_{k=1}^p \alpha_k) \vec{x}$$

$$\alpha \sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{k=1}^p \alpha \vec{u}_k$$

Si $\vec{x}, \vec{y}$ et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ sont des vecteurs de E alors

tout vecteur de la forme $\alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y}$ tq $\alpha, \beta \in K$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et est élément de E.

tout vecteur de la forme $\sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{u}_k$ tq $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in K$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ et est élément de E.

Tout espace vectoriel est stable par combinaison linéaire.

2. Espaces vectoriels de référence.

On munit chacun des ensembles suivants d'une addition interne et d'une multiplication externe : P (l'ensemble des vecteurs du plan), E (l'ensemble des vecteurs de l'espace géométrique) $K, K^n, M_{n,p}(K), K^{\mathbb{N}}, F(\Omega, K), K[X], K_m[X]$, ainsi parés ces ensembles sont des K-e-v (P et E sont des $\mathbb{R}$ -e-v).

le $\mathbb{R}$ -e-v des vecteurs du plan (resp. de l'espace géométrique).

3. Espace de fonctions.

Structure de K-e-v. de $\mathcal{F}(T, E)$ où E est un K-e-v et T un ensemble.

II Sous-espaces vectoriels.

1. Définition

Deux définitions équivalentes d'un sous-e-v.

Soit $(E, +, \cdot)$ un K-e-v. F est un sous-espace-vectoriel de E lorsque

- $F \subset E$
- $\vec{0}_E \in F$ OU $F \neq \emptyset$
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, \forall \alpha \in K, \alpha \vec{x} \in F$ et $\vec{x} + \vec{y} \in F$ OU $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in F$.

Tout ss-e-v d'un K-e-v est un K-e-v et est stable par somme, multiplication par un scalaire, par combinaison linéaire.

2. Sous-e-v engendré par une famille de vecteurs.

Soit E un K-e-v et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs de E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ est un ss-e-v de E noté $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ et appelé ss-e-v engendré par la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille génératrice de $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$.

Exemples : droite vectorielle et plan vectoriel.

$\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est inclus dans tout ss-e-v de E contenant $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ et est donc le plus petit ss-e-v (au sens de l'inclusion) contenant la famille $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$.

3. Intersection et somme de ss-e-v

- Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de ss-e-v de E . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i = \{\vec{x} \in E / \forall i \in I, \vec{x} \in F_i\}$ est un sous-e-v de E .
- Soit F et G deux ss-e-v de E . Alors $F + G = \{\vec{x} + \vec{y} / \vec{x} \in F, \vec{y} \in G\} = \{\vec{u} \in E / \exists \vec{x} \in F, \vec{y} \in G, \vec{u} = \vec{x} + \vec{y}\}$ est ss-e-v de E appelé **ss-e-v somme de F et G** .

4. Somme directe et sous-espaces supplémentaires.

Soit F et G deux ss-e-v de E .

- F et G sont en somme directe lorsque tout élément de $F + G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .
- F et G sont supplémentaires dans E lorsque tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G . On note alors $E = F \oplus G$. (définition)
- F et G sont en somme directe si et si $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.
- F et G sont supplémentaires dans E si et si $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ et $F + G = E$. (caractérisation)

III Famille finie libre ou/et génératrice. Base.

1. Famille libre

Définition

Soit E un K -e-v et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E .

- $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille libre lorsque la seule manière d'écrire $\vec{0}_E$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ est la manière triviale $\vec{0}_E = 0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{u}_p$; autrement dit lorsque l'équation $\vec{0}_E = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in K^p$ admet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = (0, 0, \dots, 0)$ comme unique solution.
- $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille liée lorsque $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ n'est pas libre; autrement dit lorsqu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tel que $\vec{0}_E = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p$.

Caractérisation

- $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille libre si et si aucun vecteur de cette famille n'est combinaison linéaire des autres.
- $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille liée si et si l'un vecteur de cette famille est combinaison linéaire des autres.

Opérations

- La liberté d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs dans cette famille.
- Si l'on ajoute à une famille libre $\mathcal{L}$ un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$ alors la famille obtenue est encore libre.
- Toute famille extraite d'une famille libre est encore libre.
- Les opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille libre $\mathcal{L}$ conserve la liberté de $\mathcal{L}$.

Exemple

- Toute famille de polynômes non nuls et tous de degrés distincts est libre.
- Toute famille de n -uplets non nuls et échelonnés en zéros (par la droite ou la gauche) ou de matrices-colonnes non nulles et échelonnées en zéros (par le haut ou le bas) est libre.

Propriété

- Si $\mathcal{L}$ est une famille libre alors tout vecteur de $\text{vect}(\mathcal{L})$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{L}$

2. Familles génératrices.

Définition et caractérisation

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de F est génératrice de F lorsque $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) = F$.

Si F est un ss-e-v de E alors $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est génératrice de F si et si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \vec{u}_k \in F$ et tout vecteur de F est combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$.

Opérations

- Le caractère générateur d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs dans cette famille.
- Si l'on ôte à une famille génératrice $\mathfrak{G}$ de F un vecteur qui est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathfrak{G}$ alors la famille obtenue est encore génératrice de F . Et plus précisément, $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1}) = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) \Leftrightarrow \vec{u}_{p+1}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$.
- Si $\mathfrak{G}'$ est une famille de vecteurs de F qui contient une famille génératrice de F alors $\mathfrak{G}'$ est aussi génératrice de F .
- Les opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille génératrice $\mathfrak{G}$ conserve le caractère générateur de $\mathfrak{G}$.
- Si $F = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ et $G = \text{vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q)$ alors $F + G = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q)$.

3. Bases.

Définition.

Une base d'un K -e-v E (resp. d'un ss-e-v F de E) est une famille génératrice de E (resp. d'un ss-e-v F de E) et libre.

Caractérisation. Définition des composantes.

$\mathcal{B}$ est une base du K -e-v E si et si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base du K -e-v E alors $\forall \vec{x} \in E, \exists! (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n / \vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sont les composantes de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$.

4. Dimension.

Dans un K -e-v E , toutes les bases de E , s'il en existe, ont le même nombre d'éléments (même cardinal).

Ce nombre d'éléments commun à toutes les bases de E est la dimension de E noté $\dim(E)$.

Bases et dimension des K -e-v de référence .

Une droite vectorielle est un e-v de dimension 1. Un plan vectoriel est un e-v de dimension 2.

Si P est le $\mathbb{R} - e - v$ des vecteurs du plan, alors une base de P est formée de 2 vecteurs de P non colinéaires et $\dim_{\mathbb{R}} P = 2$.

Si E est le $\mathbb{R} - e - v$ des vecteurs de l'espace géométrique alors une base de E est formée de trois vecteurs de E non coplanaires et $\dim_{\mathbb{R}} E = 3$.

$\dim_K K = 1$. Base de K : (1) .

$\dim_K K^n = n$. Base canonique de K^n : $((1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,0,1))$.

$\dim_K M_{n,p}(K) = np$. Base canonique de $M_{n,p}(K)$: $(E_{ij})_{(i,j) \in [1,n] \times [1,p]}$.

$\dim_K K_n[X] = n + 1$. Base canonique de $K_n[X]$: $(1, X, X^2, \dots, X^n)$. Base de Taylor en α de $K_n[X]$: $(1, X - \alpha, (X - \alpha)^2, \dots, (X - \alpha)^n)$.

Questions de cours :

A) Bien connaître les DEFINITIONS et les énoncés des propriétés.

B) Retravailler les démonstrations des propriétés de cours suivantes :

QDC 1 Soit E un $K - e - v$ et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E . Montrer que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ est un ss-e-v de E .

QDC 2 Soit E un $K - e - v$. Démontrer que l'intersection de ss-e-v de E est un ss-e-v de E .

QDC 3 Démontrer la caractérisation de deux espaces en somme directe puis de deux ss-e-v supplémentaires dans E .

QDC 4 Démontrer la caractérisation d'une famille liée.

QDC 5 Démontrer qu'une famille de polynômes non nuls et échelonnés en degré est libre.

QDC 6 Démontrer la caractérisation d'une base.