TD 18
Familles libres -génératrices -bases-dimension.

Exercice 1 Dans des ensembles de fonctions

1. Déterminer le rang de $(ch, sh, f : (x \mapsto 1), g : (x \mapsto ch(2x)), ch^2, sh^2)$
2. Soit $f_1 = \exp$, $f_2 : \left(t \mapsto \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}}\right)$ $et\ f_3 : \left(t \mapsto \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}}\right)$. Et $F = vect(f_1, f_2, f_3)$
   a) Déterminer la dimension de F.
   b) Déterminer le rang de la famille $\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ où
   $g_1 : (t \to 3e^{-\frac{t}{2}}(sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - 2cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right))$
   $g_2 : (t \to e^t - e^{-\frac{t}{2}}(sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right))$
   $g_3 : (t \to e^{-\frac{t}{2}}(2sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + e^{3t/2})$
   $g_4 : (t \to e^{-\frac{t}{2}}(-sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 3cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)) + 4e^t$

Exercice 2 Dans des ensembles des polynômes ou fonctions polynomiales.

1. Quel est le rang de $(P_1, P_2, .., P_5)$ tel que $P_1 = 1 - 2X + X^3$, $P_2 = -2X - X^4$, $P_3 = X^2 - 2X^3 + 2X^4$, $P_4 = 3 + 2X - 3X^4$, $P_5 = 1 - X^2 - X^3 - X^4$? Déterminer une base de $vect(P_1, P_2, .., P_5)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(x \mapsto (x+1)^{n-k}x^k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base du $\mathbb{R} - e - v$ des fonctions polynomiles de degré inférieur à n.
3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}/n \geq 3$. Déterminer la dimension du $\mathbb{C}$-e-v $F = \{P \in \mathbb{C}_n[X]/(X+i)^2 divise\ P\}$.
   b. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}_n[X]$.
   c. Montrer que $H = \left\{P \in \mathbb{C}_n[X]/\widetilde{P}(i) = 0\right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}_n[X]$. Trouver un supplémentaire de H dans $\mathbb{C}_n[X]$.
   d. Montrer que $H + F = \mathbb{C}_n[X]$.
   e. H et F sont-ils en somme directe ?
   f. Donner une base de $F \cap H, F + H, F \cap K, F + K$.
4. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{X}^2\mathrm{P}(\mathrm{X})\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/\tilde{P}(-1) = \tilde{P}(2)\}$.
   a. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}_3[X]$ et préciser leur dimension.
   b. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.
5. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $P_0 = 1\ et\ \forall k \in [\![1,n]\!], P_k = \frac{1}{k!}X(X-k)^{k-1}$.
   a. Montrer que $(P_k)_{k=0\dots n}$est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b. Montrer que $\forall j \in [\![0,n]\!], \forall k \in [\![0,j]\!], P_j^{(k)}(X) = P_{j-k}(X-k)$.
   c. En déduire que $P_j^{(k)}(k) = 0$ pour tous j et k distincts dans $[\![0,n]\!]$.
   d. Déterminer les composantes d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 3 Dans un ensemble de suites.

1. Calculer le $rg(u, v, w, z)$ où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln^2(n+1), v_n = \sqrt{n}, w_n = (-1)^n, z_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$.
2. Quelle est la dimension du $\mathbb{C}$-e-v des suites complexes 4-périodiques ?
3. Objectif : montrer que la famille $((k^n)_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Fixons $m \in \mathbb{N}$.

On pose $\forall i \in [\![0,m]\!], L_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m} \frac{X-k}{i-k}$.

   a. Montrer que la famille $B = (L_0, L_1, \dots, L_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.
   b. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_m[X], (P(0), P(1), \dots, P(m))$ sont les composantes de P dans cette base B.
   c. Soit $B_c = (1, X, X^2, \dots, X^m)$ la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$. Déterminer la matrice de passage de B à B_c.
   d. En déduire que la famille $((k^n)_{n \in \mathbb{N}})_{k \in [\![0,\dots,m]\!]}$est libre.
   e. Qu'en déduit-on sur le $\mathbb{R}$-e-v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Exercice 4 Dans un K-e-v E de dimension quelconque.

1. Ici E est de dimension finie p ,de base $\mathscr{B} = (\vec{e_i})_{i=1..p}$. On pose : $\forall i \in [\![1, n-1]\!], \vec{\varepsilon_i} = \vec{e_i} - \left(\vec{e}_{i+1} + \vec{e}_{i+2} + .. + \vec{e_p}\right)$ et $\vec{\varepsilon_p} = \vec{e_p}$. Montrer que $\mathscr{B}' = (\vec{\varepsilon_i})_{i=1..p}$est une base de E . Soit $\vec{x} \in E$. Exprimer les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{B}'$ en fonction des composantes de $\vec{x}$ dans B.
2. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}\ et\ \mathscr{L} = (\vec{u}_i)_{i=1..n}$une famille libre de vecteurs d'un K- espace vectoriel E .
   a. Etudier la liberté de la famille $\mathscr{F} = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_2 - \vec{u}_3, .., \vec{u}_{n-1} - \vec{u}_n, \vec{u}_n)$.
   b. Etudier la liberté de la famille $\mathscr{F} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, .., \vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n, \vec{u}_1 + \vec{u}_n)$.
   c. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. Justifier que $vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p)\ et\ vect(\vec{u}_{p+1}, .., \vec{u}_n)$ sont en somme directe.
   d. Soit $G = vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ et F un ss-e-v de E tels que : $F \oplus G = E$.
      i. Justfier qu'il existe un vecteur non nul $\vec{a}$ dans F .
      ii. $G_a = vect(\vec{a} + \vec{u}_1, \vec{a} + \vec{u}_2, \dots, \vec{a} + \vec{u}_p)$. Montrer que G_a et F sont supplémentaires dans E.

3. Soit E un K –espace vectoriel admettant une base $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On pose: $\begin{cases} \vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k} \\ \vec{v} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k} \\ \vec{w} = -2\vec{\imath} + \vec{k} \\ \vec{t} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k} \end{cases}$ $et\ F = \{a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k} / (a,b,c) \in K^3 et\ a + b = c = \frac{a}{2}\}$ et $G = vect(\vec{u}, \vec{v})$.

- **a.** Vérifier que F est un ss-e-v de E et $F \oplus G = E$.
- **b.** La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$est-elle libre ? Est-elle génératrice de E ?
- **c.** Extraire de cette famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$une base de E . Et exprimer $\vec{t}$ comme $c.l.$ de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
- **d.** Déterminer un système d'équations de $G\ dans\ B$
- **e.** Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trois vecteurs de E tels que $mat_B(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1+x & x & x \\ y & 1+y & y \\ z & z & 1+z \end{pmatrix}$ où $(x,y,z) \in K^3$.
  - i. Exprimer $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ en fonction de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.
  - ii. $H = \{(x,y,z) \in K^3 / (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une famille libre$\}$ est -il un ss-e-v de K^3?

Exercice 5 dans $\mathbb{R}^n$.

1. Déterminer une $\mathbb{R}$-base du $\mathbb{R}$-e-v $\mathbb{C}^n$.
2. Etudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = ((1,2,3,4,1), (2,3,1,2,1), (0,-1-5,-6,-1), (3,3,-6,-6,0))$ et déterminer un supplémentaire de vect $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}^5$.
3. Etudier la liberté de la famille $((a,1,0,a), (0,a,2a+2,0), (1,0,a,0), (2a,0,1,a))$ $où\ a$ paramètre réel .
4. Montrer que $((1,0,1), (-1,-1,1), (-2,1,-2))$est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire $X = (x,y,z)$ dans cette nouvelle base
5. $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2y = 0\ et\ y - 2z = 0\}$ et $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x + z = y + t\}$
   - **a.** Donner une base de $V \cap W\ et\ de\ V + W$.
   - **b.** Donner un supplémentaire H de $V \cap W$ dans W.
   - **c.** Montrer que $V\ et\ H$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
6. $E = \mathbb{R}^n$ et $F = vect((1,1,..,1,1))$ et $G = \{(x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$.
   - **a.** Justifier que F et G sont des ss-e-v de E de dimension finie et déterminer leur dimension.
   - **b.** Montrer que $F\ et\ G$ sont supplémentaires dans E .
7. $F = \{(x_1, .., x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} / \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 = \sum_{i=n+1}^{2n} x_i\}$. Montrer que F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^{2n}$.Déterminer la dimension de F et un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^{2n}$

Exercice 6 dans $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la dimension de $AS_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A = diag(2,2,1)$.Trouver la dimension de $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$. Déterminer un supplémentaire de E dans $M_3(\mathbb{R})$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.Trouver la dimension de $E = \{AM / M \in M_2(\mathbb{R})\}$. Déterminer un supplémentaire de E dans $M_{3,2}(\mathbb{R})$.
4. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre et la compléter pour obtenir une base de $M_{3,2}(\mathbb{R})$.
5. La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est -elle une base de $M_2(\mathbb{R})$? Si oui, donner les composantes de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 7 Soit E un Ke v de dimension finie $n \geq 2$.

1. Soit $(m,p) \in \mathbb{N}^{*^2}$tel que $p \leq m$. Soit $(\vec{x}_1, .., \vec{x}_m)$ une famille de vecteurs de E .
   Montrer que, $rg(\vec{x}_1, .., \vec{x}_p) \geq rg(\vec{x}_1, .., \vec{x}_m) + p - m$.
2. Soit $F\ et\ G$ deux ss-e-v de E de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$. On cherche à prouver que $F\ et\ G$ ont un supplémentaire H dans E commun.
   - a) Trouver H dans le cas où $F = G$.
   - b) On suppose que $F \neq G$.
     - i) Montrer que $F \not\subset G\ et\ G \not\subset F$.
     - ii) Construire un vecteur $\vec{u_1} \notin F \cup G$. On pose $F_1 = F + vect(\vec{u_1})$ et $G_1 = G + vect(\vec{u_1})$.
     - iii) Trouver H dans le cas où $F \neq G$ et $p + 1 = n$.
     - iv) Si $p + 1 < n$, montrer que $F_1 \neq G_1\ et$ poursuivre le raisonnement pour trouver H .