DS 5

Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso). Les exercices et problèmes sont indépendants.

QUELQUES CONSIGNES :

- Traitez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. Ils sont indépendants.
- Justifiez toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :
- ✓ Vous n'avez pas affirmé d'emblée que le résultat à démontrer ou que l'équation à résoudre est toujours vraie…. Lorsque vous souhaitez transformer l'énoncé, raisonnez par équivalence. Lorsque vous résolvez une équation, raisonnez par équivalence.
- ✓ Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire.
- ✓ Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, …) sont utilisés et utilisés à bon escient.
- ✓ La phrase réponse, attendue et soulignée ou encadrée ou surlignée, répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé, n'hésitez pas à en faire part au professeur surveillant (moi !!!).

Exercice 1 Généralisation du théorème de Rolle.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, continue sur $[a,+\infty[$ et dérivable sur $]a,+\infty[$ n non constante et telle que : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. on cherche à prouver que f' s'annule sur $]a,+\infty[$.

1. Illustrer ce résultat.

2. **Première méthode :** On définit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que : $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x} + a - 1\right) & si\ x \neq 0 \\ f(a) & si\ x = 0 \end{cases}$.

2.1. Vérifier que g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle .

2.2. En déduire qu'il existe un réel $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

3. **Deuxième méthode :** f n'est pas constante donc il existe donc un réel $b \in]a,+\infty[$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Supposons, par exemple, que : $f(b) > f(a)$.

3.1. Montrer qu'il existe $A \in]b,+\infty[$ tel que : $\forall t \geq A, f(t) < f(b)$.

3.2. Montrer que f admet un maximum M sur $[a, A]$ atteint en un réel $c \in]a, A[$.

3.3. Justifier que $f'(c) = 0$.

Exercice 2 polynômes de Tchebychev

A. On étudie ici (existence, unicité, propriétés) les polynômes $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

1. Montrer que si T_n existe alors il est unique.
2. Vérifier que $T_0 = 1, T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n, T_{n+1}, T_{n+2}\ existent\ et\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
4. En déduire la parité et le terme dominant de T_n.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Déterminer les racines de T_n et factoriser T_n sous forme scindée dans $\mathbb{R}[X]$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} & si\ n\ pair \\ 0 & si\ n\ impair \end{cases}$.
7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (X^2-1)T_n''(X) + XT_n'(X) = n^2 T_n(X)$

B. Application à la résolution d'équations différentielles

8. Soit (E_n) l'équation différentielle $(x^2-1)y''(x) + xy'(x) = n^2 y(x)$. On veut résoudre (E_n) sur $]1,+\infty[$.

8.a. Soit $y :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$, deux fois dérivable. On pose $z(x) = \frac{y(x)}{T_n(x)}$. Montrer que :

y est solution de (E_n) sur $]1,+\infty[$ si et seulement si z' est solution sur $]1,+\infty[$ d'une équation différentielle linéaire (D_n) d'ordre 1.

8.b. En effectuant le changement de variable $t = ch(u)$ dans $\int^x \frac{1}{t^2\sqrt{t^2-1}}dt$, déterminer les primitives sur $]1,+\infty[$ de la fonction continue $\left(x \mapsto \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right)$. **Indication : on rappelle que la bijection réciproque de $ch_|$ est $(t \mapsto \ln(t + \sqrt{t^2-1})$ et que $\left(\frac{sh}{ch}\right)' = th' = \frac{1}{ch^2}$.**

8.c. Résoudre (D_1) puis (E_1) sur $]1,+\infty[$.

Exercice 3 Intégrales de Wallis- Intégrale de Gauβ.

A. Intégrales de Wallis. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(t))^n dt$.

1. Monter que : $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin(t))^n dt$..
2. Montrer que la suite (W_n) est convergente.
3. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, W_n \neq 0$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
5. Montrer que $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.
6. En déduire la limite de la suite (W_n).
7. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.
8. En déduire que : $W_{n+1} \sim_{n\to+\infty} W_n$.
9. En déduire que : $W_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

B. Intégrale de Gauss. Soit $F : \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt \end{array} \right)$. Le but de cette partie est de calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

1. Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. Justifier que : $\forall t \in [1, +\infty[, e^{-t^2} \leq e^{-t}$.
3. En déduire que F est majorée.
4. Déduire de ce qui précède que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe et est finie.
5. Montrer que $\forall u \in]-1, +\infty[, \ln(1+u) \leq u$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - 6.1. Montrer que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$.
   - 6.2. Montrer, en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$, que: $\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - 7.1. Montrer que : $\forall t \in [0, \sqrt{n}], e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.
   - 7.2. Montrer, en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$, que :
     $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^B \cos^{2p}(u) du$ où $B \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $p \in \mathbb{N}$ sont à déterminer.
   - 7.3. Montrer que : $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$.
8. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

FIN