Corrigé du DS 5

Exercice 1 Généralisation du théorème de Rolle.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f: [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, continue sur $[a,+\infty[$ et dérivable sur $]a,+\infty[$ n non constante et telle que : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. on cherche à prouver que f' s'annule sur $]a,+\infty[$.

1. Illustrer ce résultat.

2. **Première preuve :** On définit $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que : $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}+a-1\right) & si\ x \neq 0 \\ f(a) & si\ x = 0 \end{cases}$.

2.1. Vérifier que g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle .

2.2. En déduire qu'il existe un réel $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

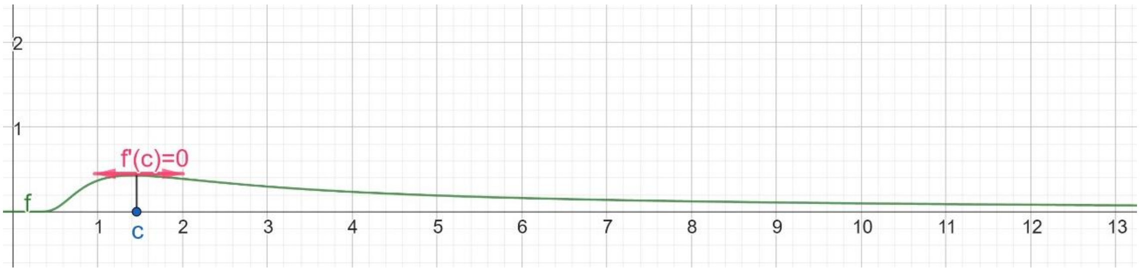
3. **Deuxième preuve :** f n'est pas constante donc il existe donc un réel $b \in]a,+\infty[$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Supposons, par exemple, que : $f(b) > f(a)$.

3.1. Montrer qu'il existe $A \in]b,+\infty[$ tel que : $\forall t \geq A, f(t) < f(b)$.

3.2. Montrer que f admet un maximum M sur $[a,A]$ atteint en un réel $c \in]a,A[$.

3.3. Justifier que $f'(c) = 0$.

1.Illustration :



2. On définit $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que : $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}+a-1\right) & si\ x \neq 0 \\ f(a) & si\ x = 0 \end{cases}$.

2a. $\forall x \in]0,1], \frac{1}{x}+a-1 \in [a,+\infty[$ et $\forall x \in]0,1[, \frac{1}{x}+a-1 \in]a,+\infty[$. Comme f est continue sur $[a,+\infty[$ et dérivable sur $]a,+\infty[$, g est continue sur $]0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

De plus, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}+a-1 = +\infty$ donc $\lim_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}+a-1\right) = f(a)$. Donc g est continue en 0. Ainsi, g est continue sur $[0,1]$.

2b. g est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ et $g(1) = f(0) = g(0)$. Donc g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Alors il existe $d \in]0,1[$ tel que $g'(d) = 0$.

2c. $\forall x \in]0,1[, g'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}+a-1\right)$. Donc, $-\frac{1}{d^2} f'\left(\frac{1}{d}+a-1\right) = g'(d) = 0$ et par suite, $f'\left(\frac{1}{d}+a-1\right) = 0$. Posons $c = \frac{1}{d}+a-1$. Alors $c \in]a,+\infty[\ et\ f'(c) = 0$.

3a. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$ et $f(b) > f(a)$. Donc, d'après la propriété « caractère borné d'une fonction ayant une limite finie », il existe un réel B tel que $\forall x \in [B,+\infty[\cap [a,+\infty[, f(x) < f(b)$. Posons $A = \max(a, B, b+1)$. Alors $\forall x \in [A,+\infty[, f(x) < f(b)$.

3b. f est continue sur le segment $[a,A]$ donc le théorème de fonctions continues sur un segment assure que f admet un maximum M et un minimum sur $[a,A]$. Il existe donc un réel $c \in [a,A]$tel que $M = f(c)$.

Comme $b \in [a,A], f(b) \leq M = f(c)$ et par suite, $f(A) < f(b) \leq f(c) et\ f(a) < f(b) \leq f(c)$. Donc $c \neq a\ et\ c \neq A$. Ainsi, $c \in]a,A[$.

3c. Comme f admet un extremum en un point c intérieur à $[a,A]$ et f est dérivable en c (puisque f est dérivable sur $]a,+\infty[$)Le théorème de condition nécessaire d'extremum assure que $f'(c) = 0$.

Exercice 2 polynômes de Tchebychev

On étudie (existence, unicité, propriétés) les polynômes $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \widetilde{T_n}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

1. Montrer que si T_n existe alors il est unique.
2. Vérifier que $T_0 = 1, T_1 = X\ et\ T_2 = 2X^2 - 1$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n, T_{n+1}, T_{n+2}\ existent\ et\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
4. En déduire la parité et le terme dominant de T_n.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines de T_n et factoriser T_n en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.En déduire que $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} & si\ n\ pair \\ 0 & si\ n\ impair \end{cases}$.
7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (X^2-1)T_n''(X) + XT_n'(X) = n^2 T_n(X)$.
8. Résoudre, sur $]1,+\infty[$, l'équation différentielle $(x^2-1)y''(x) + xy'(x) = 4y(x)$ en posant $y(x) = z(x)T_2(x)$.

1. Supposons qu'il existe deux polynômes T_n *et* Q_n tels que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \widetilde{T_n}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) = \widetilde{Q_n}(\cos(\theta))$.
Posons $H = T_n - Q_n$. Alors H est un polynôme qui vérifie : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \widetilde{H}(\cos(\theta)) = 0$. Donc H admet tous les réels compris entre -1 et 1 comme racine. H admet donc une infinité de racines . Ainsi H est le polynôme nul et par suite $T_n = Q_n$. J'en conclus que si T_n existe alors il est unique.

2. S' il existe, $T_0 \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\forall \theta \in \mathbb{R}, \widetilde{T_0}(\cos(\theta)) = \cos(0) = 1$. Donc, $T_0(X) = 1$ convient.
S' il existe, $T_1 \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\forall \theta \in \mathbb{R}, \widetilde{T_1}(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$. Donc, $T_1(X) = X$ convient.
S' il existe, $T_2 \in \mathbb{R}[X]$ vérifie : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \widetilde{T_1}(\cos(\theta)) = \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$. Donc, $T_2(X) = 2X^2 - 1$ convient.

3. Posons $H(n)$: " T_n, T_{n+1}, T_{n+2} *existent et* $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$".
Initialisation : T_0, T_1, T_2 *existent et* $T_2 = 2X^2 - 1 = 2XT_1 - T_0$. Donc $H(0)$ est vraie.
Propagation : Soit un entier naturel n.Supposons que $H(n)$ est vraie. Alors T_{n+1}, T_{n+2} *existent* .
Posons $Q = 2XT_{n+2} - T_{n+1}$. Alors pour tout réel θ,
$\tilde{Q}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\, T_{n+2}(\cos(\theta)) - T_{n+1}(\cos(\theta))$
$= 2\cos(\theta)\cos((n+2)\theta) - \cos((n+1)\theta)$
$= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta + \theta) - \cos((n+1)\theta)$
$= 2\cos(\theta)\,[\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)] - \cos((n+1)\theta)$
$= [2\cos^2(\theta) - 1]\cos((n+1)\theta) - 2\sin(\theta)\cos(\theta)\sin((n+1)\theta)$
$= \cos(2\theta)\cos((n+1)\theta) - \sin(2\theta)\sin((n+1)\theta)$
$= \cos((n+1)\theta + 2\theta)$
$= \cos((n+3)\theta)$
Donc $T_{n+3} = Q$ convient. Alors, T_{n+3} existe et vérifie : pour tout réel θ, $\widetilde{T_{n+3}}(\cos(\theta)) = \cos((n+3)\theta)$ et $T_{n+3} = 2XT_{n+2} - T_{n+1}$. Donc $H(n+1)$ est vérifiée dès que $H(n)$ est vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel n , $H(n)$ est vraie d'après le théorème de récurrence simple.

4. Alors $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$. D'après les expressions de T_1, T_2, T_3, on peut conjecturer que pour tout entier naturel n non nul, $[\,T_n$ a la même parité que n *et* le terme dominant de T_n est $2^{n-1}X^n]_{=H(n)}$.
<u>Initialisation :</u> $H(1), H(2)$ *et* $H(3)$ sont vraies.
<u>Propagation</u> : Soit n un entier naturel non nul. Supposons $H(n)$ et $H(n+1)$ vraies.
- Alors il existe deux polynômes R_n *et* R_{n+1} tels que : $T_{n+1} = 2^n X^{n+1} + R_{n+1}$ *et* $\deg(R_{n+1}) < n+1$.

Alors, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n = 2X(2^n X^{n+1} + R_{n+1}) - T_n = 2^{n+1}X^{n+2} + 2XR_{n+1} - T_n$.
Or, $\deg(2^{n+1}X^{n+2}) = n+2$ *et* $\deg(2XR_{n+1}) = \deg(2X) + \deg(R_{n+1}) < 1 + (n+1) = n+2$ et $\deg(T_n) = n < n+2$. Donc $\deg(T_{n+2}) = n+2$ et le terme dominant de T_{n+2} est $2^{n+1}X^{n+2}$.
- Supposons $n+2$ pair. Alors n est pair donc T_n est pair et $n+1$ est impair donc T_{n+1} est impair. Alors

$T_{n+2}(-X) = 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) = 2(-X)(-T_{n+1}(X)) - T_n(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X) = T_{n+2}(X)$ donc T_{n+2} est pair.
- Supposons $n+2$ *impair*. Alors n est impair donc T_n est impair et $n+1$ est pair donc T_{n+1} est pair. Alors

$T_{n+2}(-X) = 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) = 2(-X)(T_{n+1}(X)) - (-T_n(X)) = -2XT_{n+1}(X) + T_n(X) = -T_{n+2}(X)$ donc T_{n+2} est impair.
Donc $H(n+2)$ est vraie dès que $H(n)$*et* $H(n+1)$ sont vraies.
<u>Conclusion</u> : le théorème de récurrence double assure alors que pour tout entier naturel n non nul, $H(n)$ est vraie.

5. Soit n un entier natruel non nul. Cherchons d'abord les racines de $T_n$qui se trouvent dans $[-1,1]$.
Soit $y \in [-1,1]$. ALors il existe un unique $\theta \in [0,\pi]$ tel que $y = \cos(\theta)$ (il s'agit de $\theta = Arccos(y)$). Par conséquent,
$\widetilde{T_n}(y) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{T_n}(\cos(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \underset{\substack{car \\ \theta\in[0,\pi]}}{\Leftrightarrow} \exists k \in [\![0, n-1]\!]/\ \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$.

Donc les réels $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ *tq* $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont les racines de T_n qui se trouvent dans $[-1,1]$. Ces n réels sont tous distincts puisque Les réels $\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ *tq* $k \in [\![0, n-1]\!]$sont n réels distincts compris entre 0 *et* π et que la fonction cosinus est injective sur $[0,\pi]$. Donc, les réels $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ *tq* $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont n racines distinctes de $T_n$qui est de degré n. J'en conclus que T_n n' a pas d'autres racines , que ces n racines sont toutes simples dans T_n et T_n est scindé sous la forme :

$$T_n = codom(T_n)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ *est le produit des racines de* T_n.
Donc le cours assure que $\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = (-1)^n \frac{terme\ constant\ de\ T_n}{codom(T_n)}$.
On repaque d'abord que **le *terme constant de* T_n est égal à $\widetilde{T_n}(0)$.**

1^er cas : n est impair. Alors $T_n$est impair donc $(terme\ constant\ de\ T_n) = \widetilde{T_n}(0) = 0$ *et* par suite $\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = 0$

2^er cas : n est pair, $n = 2p$. Montrons par récurrence sur p que "$(terme\ constant\ de\ T_{2p}) = (-1)^p$"(*propriété* $H(p)$).
<u>Initialisation</u> : $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies.
<u>Propagation</u> : Soit p un entier naturel. Supposons $H(p)$ vraie.
Alors $T_{2(p+1)} = T_{2p+2} = 2XT_{2p+1} - T_{2p}$.
Donc $(terme\ constant\ de\ T_{2(p+1)}) = \widetilde{T_{2p+2}}(0) = 2 \times 0 \times \widetilde{T_{2p+1}}(0) - \widetilde{T_{2p}}(0) = -(terme\ constant\ de\ T_{2p}) = -(-1)^p = (-1)^{p+1}$.
Donc, $H(p+1)$ est vraie dès que $H(p)$ est vraie.

Conclusion : le théorème de récurrence simple assure alors que $H(p)$ est vraie pour tout entier naturel p.

J'en déduis que $\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = (-1)^{2p}\frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}$.

7. $\forall\theta \in \mathbb{R}, \widetilde{T_n}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Or, $\widetilde{T_n}$ et cos sont infiniment dérivable, donc, en dérivant une puis deux fois dans cette égalité, j'obtiens : $\forall\theta \in \mathbb{R}, -\sin(\theta)\,\widetilde{T_n}'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$

puis $-\cos(\theta)\,\widetilde{T_n}'(\cos(\theta)) + \sin^2(\theta)\,\widetilde{T_n}''(\cos(\theta)) = -n^2\cos(n\theta)$.

Autrement dit, $\forall\theta \in \mathbb{R}, -\cos(\theta)\,\widetilde{T_n}'(\cos(\theta)) + (1-\cos^2(\theta))\widetilde{T_n}''(\cos(\theta)) = -n^2\widetilde{T_n}(\cos(\theta))$.

J'en déduis que, $\forall y \in [-1,1], -y\widetilde{T_n}'(y) + (1-y^2)\widetilde{T_n}''(y) = -n^2\widetilde{T_n}(y)$.

Posons $Q = -n^2T_n(X) + (X^2-1)T_n''(X) + XT_n'(X)$.

Alors Q est un polynôme qui vérifie $\forall y \in [-1,1], \tilde{Q}(y) = 0$. Donc Q admet une infinité de racines et ainsi $Q = 0$. J'en conclus que : $(X^2-1)T_n''(X) + XT_n'(X) = n^2T_n(X)$.

8.

8a. $\widetilde{T_n}$ est une solution particulière que l'équation différentielle étudiée (E_n) qui ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$.

Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]1,+\infty[$. Posons $\forall x \in]1,+\infty[, z(x) = \frac{y(x)}{\widetilde{T_n}(x)}$.

Alors z est une fonction deux fois dérivable sur $]1,+\infty[$ car y et $\widetilde{T_n}$ le sont et $\widetilde{T_n}$ *ne* s'annule pas sur cet intervalle et $\forall x \in]1,+\infty[$,

$y(x) = z(x)\widetilde{T_n}(x)$,

$y'(x) = z'(x)\widetilde{T_n}(x) + z(x)\widetilde{T_n}'(x)$,

$y''(x) = z''(x)\widetilde{T_n}(x) + 2z'(x)\widetilde{T_n}'(x) + z(x)\widetilde{T_n}''(x)$.

Par conséquent,

y est solution de l'equa.diff. (E_n)

$\Leftrightarrow \forall x \in]1,+\infty[, (x^2-1)[z''(x)\widetilde{T_n}(x) + 2z'(x)\widetilde{T_n}'(x) + z(x)\widetilde{T_n}''(x)] + x[z'(x)\widetilde{T_n}(x) + z(x)\widetilde{T_n}'(x)] - n^2[z(x)\widetilde{T_n}(x)] = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]1,+\infty[, [\underbrace{(x^2-1)\widetilde{T_n}''(x) + x\widetilde{T_n}'(x) - n^2\widetilde{T_n}(x)}_{=0 \text{ car } \widetilde{T_n} \text{ est solution de } (E_n)}]z(x) + [2(x^2-1)\widetilde{T_n}'(x) + x\widetilde{T_n}(x)]z'(x) + (x^2-1)\widetilde{T_n}(x)z''(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]1,+\infty[, [2(x^2-1)\widetilde{T_n}'(x) + x\widetilde{T_n}(x)]z'(x) + [(x^2-1)\widetilde{T_n}(x)]z''(x) = 0$

$\Leftrightarrow z'$ est solution de l'équa. diff. d'ordre 1 homogène(D_n) : $[(x^2-1)\widetilde{T_n}(x)]Y'(x) + [2(x^2-1)\widetilde{T_n}'(x) + x\widetilde{T_n}(x)]Y(x) = 0$.

8b. Cherchons une primitive de la fonction continue $\left(x \mapsto \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right)$ sur $]1,+\infty[$:

$$\int^y \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx \underset{\substack{CV \\ x=ch(t) \\ t=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ dx=sh(t)dt}}{=} \int^{\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)} \frac{ch^2(t)}{ch^2(t)sh(t)}sh(t)dt = \int^{\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)} \frac{1}{ch^2(t)}dt = \left[\frac{sh(t)}{ch(t)}\right]^{\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)} = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} + cste$$

8c. y est solution de l'equa.diff. $(E_1) \Leftrightarrow z'$ est solution de l'équa. diff. d'ordre 1 homogène(D_1) : $(x^2-1)xY'(x) + [3x^2-2]Y(x) = 0$.

Résolvons (D_1):

Posons $a(x) = \frac{3x^2-2}{(x^2-1)x}$. Décomposons a en éléments simples. Sa partie entière est nulle (car le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur) . Il existe donc troiqs uniques réels u, v, w tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1, 0\}, a(x) = \frac{3x^2-2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{u}{x-1} + \frac{v}{x+1} + \frac{w}{x}$$

Alors $u = \lim_{x\to 1}(x-1)a(x) = \frac{1}{2}$

$v = \lim_{x\to -1}(x+1)a(x) = \frac{1}{2}$

$w = \lim_{x\to 0} xa(x) = \frac{-2}{-1} = 2$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1, 0\}, a(x) = \frac{x^2+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{2}{x}$.

Par conséquent, $A : (x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + 2\ln(x))$ est une primitive de a sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[$,

$$e^{-A(x)} = e^{\frac{-1}{2}\ln(x^2-1) - 2\ln(x)} = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}x^{-2} = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

Alors les solutions de $(D1)$ sont toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto k\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right)$ telles que $k \in \mathbb{R}$.

Par suite, y est solution de l'equa.diff. $(E_1) \Leftrightarrow$il existe k réel tel que $z'(x) = k\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

Alors par 8b., y est solution de l'equa.diff. $(E_1) \Leftrightarrow$il existe k et c deux réels tels que : $\forall x \in]1,+\infty[\ z(x) = k\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c$.

Ainsi y est solution de l'equa.diff. $(E_1) \Leftrightarrow$il existe k et c deux réels tels que : $\forall x \in]1,+\infty[\ y(x) = k\left(\sqrt{x^2-1}\right) + cx$.

Exercice 3 Intégrales de Wallis- Intégrale de Gau$\boldsymbol{\beta}$.

A. Intégrales de Wallis.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(t))^n dt}$.

1. Monter que : $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin(t))^n dt$.

$\forall n \in \mathbb{N}, (t \mapsto (\cos(t))^n)$est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc W_n existe et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(t))^n dt \underset{\substack{CV \\ u=\frac{\pi}{2}-t}}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)^n (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin(u))^n du.$

2. Montrer que la suite (W_n) est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}. \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos(t) \in [0,1]$ donc, $0 \le (cos(t))^{n+1} \le (cos(t))^n \le 1$.

Par conséquent, $0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(t))^{n+1} dt \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(t))^n dt \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt$ i.e. $0 \le W_{n+1} \le W_n \le \frac{\pi}{2}$.

J'en déduis que la suite W est décroissante et minorée par 0 donc convergente.

3. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, W_n \neq 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}. (t \mapsto (\cos(t))^n)$est continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et prend une valeur non nul sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (en 0) donc la contraposée du lemme d'annulation assure que $W_n \neq 0$. Et par suite $W_n > 0$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}. W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(t))^{n+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(t))^n (cos(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \left(1 - sin^2(t)\right) dt$

$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\underbrace{-\sin(t) \cos^n(t)}_{u'(t)}\right] \underbrace{\sin(t)}_{v(t)} dt = W_n + \left[\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1} \sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1} \cos(t)\, dt = W_n - \frac{W_{n+2}}{n+1}$.

Donc, $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) W_{n+2} = W_n$ *et* ainsi, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

5. Montrer que $(nW_n W_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = nW_n W_{n-1}$ et montrons que la suite t est constante.
Soit $n \in \mathbb{N}^*. t_{n+1} = (n+1) W_{n+1} W_n = (n+1) \frac{n}{n+1} W_{n-1} W_n = nW_{n-1} W_n = t_n$.

La suite t est donc constante égale à $t_1 = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, nW_{n-1} W_n = \frac{\pi}{2}$.

6. En déduire la limite de la suite (W_n).

D'après $a.$, on sait que W est convergente. Notons L sa limite.
Alors en passant à la limite dans l'égalité $W_{n-1} W_n = \frac{\pi}{2n}$, on obtient $L^2 = 0$ soit $L = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$.

7. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \le \frac{W_{n+1}}{W_n} \le 1$.

W est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{n+2} \le W_{n+1} \le W_n$ *donc* $\frac{W_{n+2}}{W_n} \le \frac{W_{n+1}}{W_n} \le 1$ *i.e.* $\frac{n+1}{n+2} \le \frac{W_{n+1}}{W_n} \le 1$.

8. En déduire que : $W_{n+1} \sim_{n \to +\infty} W_n$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, l'encadrement précédent permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$et ainsi que $W_{n+1} \sim_{n \to +\infty} W_n$.

9. En déduire que : $W_n \sim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Alors, $(n+1) W_{n+1} W_n \sim_n n W_n^2$ *et par suite* $n W_n^2 \sim_n \frac{\pi}{2}$. Alors, $W_n{}^2 \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2n}$ et enfin, $W_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

10. Intégrale de Gauss.

Soit F : $\left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt \end{array}\right)$.

1. Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Comme $f : (t \mapsto e^{-t^2})$ est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème fondamental de l'intégration assure que F est la primitive de de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Donc F est définie et de classe C^1sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. Donc $F' > 0$. J'en déduis que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, F admet une limite en $+\infty$.

2. $\forall t \in [1, +\infty[, e^{-t^2} \le e^{-t}$. En déduire que F est majorée.

$\forall t \in [1,+\infty[,\ t^2 \geq t$ donc $-t^2 \leq -t$ et par croissance de la fonction exponentielle, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

Soit $x \in [1,+\infty[$. D' après ce qui précède, $\forall t \in [1,x], e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Alors par croissance de l'opérateur intégral sur $[1,x]$ appliquée aux fonctions continues f et $(t \mapsto e^{-t})$, $\int_1^x e^{-t^2}\,dt \leq \int_1^x e^{-t}\,dt$.

Or $\int_1^x e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_1^x = 1 - e^{-x} \leq 1$. *Donc*, $\int_1^x e^{-t^2}\,dt \leq 1$.

Donc $F(x) = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^x e^{-t^2}\,dt \leq \int_0^1 e^{-t^2}\,dt + 1 = \underbrace{F(1)+1}_{cste\ indépendante\ de\ x}$. J'en conclus que F est majorée.

3. Déduire de ce qui précède que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe et est finie.

F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, F admet une limite L en $+\infty$. Comme F est majorée, cette limite L est finie.

4. Montrer que $\forall u \in]-1,+\infty[, \ln(1+u) \leq u$.

La fonction $h: (u \mapsto \ln(1+u))$ est concave sur $Dh =]-1,+\infty[$, car $\forall u \in Dh, h''(u) = -\frac{1}{(1+u)^2} < 0$. Donc, C_h est en -dessous de toutes ses tangentes. Or la droite d'équation $y = u$ est la tangente à C_h en 0. Ainsi, $\forall u \in]-1,+\infty[, \ln(1+u) \leq u$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

5.1. Montrer que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$.

$\forall t \in [0,\sqrt{n}], -\frac{t^2}{n} \in]-1,0[$ donc $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n > 0$ et par suite, $\ln\left[\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right] = n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)$.

Or $\forall t \in [0,\sqrt{n}], -\frac{t^2}{n} \in]-1,0[$ donc $ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n}$ et par conséquent, $\ln\left[\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right] \leq -t^2$. J'en déduis par stricte croissance de l'exponentielle que : $\forall t \in [0,\sqrt{n}], \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$. Alors par croissance de l'intégrale sur $[0,\sqrt{n}]$ appliquée aux fonctions continues f et $\left(t \mapsto \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right)$, $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$.

5.2. Montrer, en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$, que: $\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$.

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \underbrace{=}_{\substack{CV\\ t=\sqrt{n}\cos(u)\\ dt=-\sqrt{n}\sin(u)du\\ t=\sqrt{n}\Leftrightarrow u=0\\ t=0\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-cos^2(u))^n[-\sqrt{n}\sin(u)\,du] = \sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (sin^2(u))^n \sin(u)\,du = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$

Donc l'ingélité obtenue au 5.1 s'écrit : $\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

6.1. Montrer que : $\forall t \in [0,\sqrt{n}], e^{-t^2} \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

$\forall t \in [0,\sqrt{n}], \frac{t^2}{n} \in]-1,+\infty[$ donc $ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$ donc $nln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \leq t^2$ et $-t^2 \leq -nln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)$ et finalement, par croissance de l'exponentielle, $e^{-t^2} \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$. Et par croissance de l'opérateur intégral, $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$.

6.2. Montrer, en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$, que :

$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n}\int_0^B \cos^{2p}(u)du$ où $B \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *et* $p \in \mathbb{N}$ sont à déterminer.

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \underbrace{=}_{\substack{CV\\ t=\sqrt{n}\tan(u)\\ dt=\frac{\sqrt{n}}{cos^2(u)}du=\\ t=0\Leftrightarrow u=0\\ t=\sqrt{n}\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{4}}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+tan^2(u))^{-n}\frac{\sqrt{n}}{cos^2(u)}du \underbrace{=}_{\substack{car\\ 1+tan^2(u)=\frac{1}{cos^2(u)}}} \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2(u)}\right)^{-n}\frac{1}{\cos^2(u)}du = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\,du$$

Ainsi, $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n}\int_0^B \cos^{2p}(u)du$ tq $B = \frac{\pi}{4}$ *et* $p = n-1$.

6.3. Montrer que : $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u)\,du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\,du + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u)\,du}_{\substack{\geq 0\ car\ \forall u\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right],\\ \cos^{2n-2}(u)\geq 0}} \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\,du \geq 0$. Par conséquent,

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\, du \leq \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u)\, du = \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

7. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n}W_{2n+1} \leq F(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$. Donc $\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \leq \frac{F(\sqrt{n})}{\sqrt{n}W_{2n}} \leq \frac{W_{2n-2}}{W_{2n}}$.

Or, $W_{2n+1} \sim W_{2n} \sim W_{2n-1} \sim W_{2n-2}$. Donc les deux suites qui encadrent $\frac{F(\sqrt{n})}{\sqrt{n}W_{2n}}$ tendant vers 1, et j'en déduis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{F(\sqrt{n})}{\sqrt{n}W_{2n}} = 1$.

Alors $F(\sqrt{n}) \sim \sqrt{n}W_{2n} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. J'en conclus que $\lim\limits_{n\to+\infty} F(\sqrt{n}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = L\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}$, par le théorème de caractérisation séquentielle de la limite (ou par composition) assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} F(\sqrt{n}) = L$. Alors par unicité de la limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

FIN