Corrigé du DS 6

Exercice 1 Ensemble de triplets

Soit $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/\begin{cases} x+y+z+t=0\\ x-y+2z-3t=0\end{cases}\}$ et $G=\{(a,a,b,b)/a,b\ réels\}$ et $D=vect(1,1,1,1)$

1. Montrer que F et G sont des ss-e-v de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension de F et celle de G.
2. Montrer que $F\oplus G=\mathbb{R}^4$.
3. Montrer que $F=vect\big((-8,1,6,1),(2,1,-2,-1)\big)$.
4. Justifier que D est un ss-e-v de G.
5. Déterminer un supplémentaire D' de D dans G et un supplémentaire H de D dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\begin{cases} x+y+z+t=0\\ x-y+2z-3t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+y+z+t=0\\ -2y+z-4t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-y-2y-4t-t=-3y-5t\\ z=2y+4t\end{cases}$.

Donc, $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/\begin{cases} x=-3y-5t\\ z=2y+4t\end{cases}\}=\{(-3y-5t,y,2y+4t,t)/y,t\ réels\}$.Ainsi,

$F=\{y(-3,1,1,0)+t(-5,0,4,1)/y,t\ réels\}$=$vect((-3,1,1,0),(-5,0,4,1))$. Comme $(-3,1,1,0),(-5,0,4,1)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$, F est le ss-e-v de $\mathbb{R}^4$ engendré par le vecteurs $(-3,1,1,0)$ et $(-5,0,4,1)$. Ces deux vecteurs étant clairement non colinéaires, $((-3,1,1,0),(-5,0,4,1))$ est une base de F et par suite, $\dim(F)=2$.

$G=vect((1,1,0,0),(0,0,1,1))$. Donc de même, G est un ss-e-v de $\mathbb{R}^4$de dimension 2.

2. $dimF+dimG=4=dim\,\mathbb{R}^4$. Donc pour prouver que $F\oplus G=\mathbb{R}^4$, il suffit de prouver que $F\cap G=\{(0,0,0,0)\}$.

Soit $X=(a,a,b,b)$ un élément quelconque de G. Alors,

$(a,a,b,b)\in F\Leftrightarrow\begin{cases} a+a+b+b=0\\ a-a+2b-3b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2a+2b=0\\ -b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=0\\ b=0\end{cases}\Leftrightarrow X=(0,0,0,0)$.

Donc $F\cap G=\{(0,0,0,0)\}$. J'en déduis que $F\oplus G=\mathbb{R}^4$.

3. $(-8,1,6,1),(2,1,-2,-1)$ sont deux vecteurs de Fcar ils vérifient les deux équations définissant F. De plus, ces deux vecteurs sont linéairement indépendants (non-colinéaires). Alors comme $dimF=2$, cette famille libre de deux vecteurs de F est donc une nouvelle base de F.

4. Supplémentaire de D dans G :

D et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}^4$. De plus, $(1,1,1,1)\in G$ (il suffit de prendre $a=b=1$). Comme G est stable par combinaison linéaire, $D=vect(1,1,1,1)\subset G$. J'en déduis que D est un ss-e-v de G.

Le vecteur $(1,1,0,0)$ est un autre vecteur de G non colinéaire à $(1,1,1,1)$ donc, par les mêmes arguments que dans la question précédente, on peut affirmer que $((1,1,1,1),(1,1,0,0))$ est une autre base de G. Alors le cours assure que $D'=vect((1,1,0,0))$ est un supplémentaire de D dans G.

Supplémentaire de D dans $\mathbb{R}^4$:

Complétons $V=(1,1,1,1)$ par trois vecteurs de $B_c=(\underbrace{(1,0,0,0)}_{=A},\underbrace{(0,1,0,0)}_{=B},\underbrace{(0,0,1,0)}_{=C},\underbrace{(0,0,0,1)}_{=D})$ obtenir une nouvelle base de $\mathbb{R}^4$.

$P=mat_{B_c}(V,B,C,D)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$ est clairement inversible (car $rg(P)=4$). Donc (V,B,C,D) est une base de $\mathbb{R}^4$. Alors le cours assure que $H=vect(B,C,D)$ est un supplémentaire de D dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2 Ensembles de fonctions

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On considère deux réels distincts a et b et les ensembles :

$$F=\{f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})/f(a)=0\}\ \text{ et }\ G=\{g\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})/g(b)=0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Construire une droite vectorielle D de F.
3. Montrer que $E=D\oplus G$.
4. En déduire que $E=F+G$. F et G sont-ils en somme direct ?
5. Soit n un entier naturel non nul.

On pose $\forall k \in [\![1,n]\!],\ f_k : (x \mapsto (x-a)^k(x-b)^{n+1-k})$ et $g_k : \left(x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{-k}{(x-a)^2}}\ si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = a \end{cases}\right)$.

a. Montrer que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une famille de vecteurs de $F \cap G$, libre.

b. Qu'en déduit-on sur les espaces vectoriels F et G ?

c. Montrer que la famille $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ est une famille de vecteurs de F , libre.

1. $F = \{f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) / f(a) = 0\}$.

- $F \subset C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- La fonction nulle est continue sur $\mathbb{R}$ et s'annule partout donc en a donc la fonction nulle est élément de F.
- Soit f et g deux éléments de F et α et β sont deux réels.

Alors f et g sont continue sur $\mathbb{R}$ et s'annule en a. Par conséquent, $\alpha f + \beta g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha \underbrace{f(a)}_{=0} + \beta \underbrace{g(a)}_{=0} = 0$.

Donc F est stable par combinaison linéaire et ainsi Fest un ss-e-v de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Idem pour G qui est défini exactement de la même manière que F.

2. Soit $h: (x \mapsto x - a)$. Alors h est continue sur $\mathbb{R}$ et s'annule en a. Donc $h \in F$.

Par conséquent, $D = vect(h)$ est une droite vectorielle de F.

3. Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Cherchons $f \in D\ et\ g \in G$ telles que $\varphi = f + g$.

Analyse : supposons que de telles f et g existent. Donc, $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = f(x) + g(x) \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda(x-a) \\ g(b) = 0 \end{cases}$.

Alors $\varphi(b) = \lambda(b-a) + g(b) = \lambda(b-a)$. Donc $\lambda = \frac{\varphi(b)}{b-a}$. Par suite, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\varphi(b)}{b-a}(x-a)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \varphi(x) - \frac{\varphi(b)}{b-a}(x-a)$.

J'en conclus que si f et g existent, elles sont uniques et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\varphi(b)}{b-a}(x-a)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \varphi(x) - \frac{\varphi(b)}{b-a}(x-a)$.

Synthèse : Posons $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\varphi(b)}{b-a}(x-a)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \varphi(x) - \frac{\varphi(b)}{b-a}(x-a)$.

Alors $f \in D\ et\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) + g(x) = \frac{\varphi(b)}{b-a}(x-a) + \varphi(x) - \frac{\varphi(b)}{b-a}(x-a) = \varphi(x). Donc\ f + g = \varphi$

Enfin , $g \in G$ car $g(b) = \varphi(b) - \frac{\varphi(b)}{b-a}(b-a) = 0$.

Ainsi, f et g conviennent et d'après l'analyse, sont les seules qui conviennent.

J'en conclus que toute fonction φ, continue sur $\mathbb{R}$, s'écrit de manière unique sous la forme : $\varphi = f + g$ tq $f \in D\ et\ g \in G$

J'en conclus que $E = D \oplus G$.

4. $D + G = E$. Or , $D \subset F$ donc $E = D + G \subset F + G$. Or F et G sont des ss-e-v de E donc $F + G$ est un ss-e-v de E et $F + G \subset E$. J'en conclus que : $F + G = E$.

Cette somme n'est pas directe car $F \cap G$ contient $(x \mapsto (x-a)(x-b))$ qui n'est pas la fonction nulle.

5. Soit n un entier natruel non nul et $\forall k \in [\![1,n]\!],\ f_k : (x \mapsto (x-a)^k(x-b)^{n+1-k})\ et\ g_k : \left(x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{-k}{(x-a)^2}}\ si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = a \end{cases}\right)$.

a. $\forall k \in [\![1,n]\!], k \geq 1\ et\ n + 1 - k \geq 1\ donc\ \ f_k(a) = 0 = f_k(b)$. De plus, toute fonction f_k est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, $\forall k \in [\![1,n]\!],\ f_k \in F \cap G$.

Montrons que $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1(x-a)^1(x-b)^n + \lambda_2(x-a)^2(x-b)^{n-1} + \cdots + \lambda_n(x-a)^n(x-b)^1 = 0$. Donc,

$\forall x \in \mathbb{R},\ (x-a)(x-b)[\lambda_1(x-b)^{n-1} + \lambda_2(x-a)^1(x-b)^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-1}(x-a)^{n-2}(x-b) + \lambda_n(x-a)^{n-1}] = 0$.

$Donc, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{a,b\},\ \underbrace{\lambda_1(x-b)^{n-1} + \lambda_2(x-a)^1(x-b)^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-1}(x-a)^{n-2}(x-b) + \lambda_n(x-a)^{n-1}}_{=\theta(x)} = 0(**)$

Alors $\lambda_1(a-b)^{n-1} = \lim_{x \to a} \theta(x) = 0$. Comme $a \neq b, (a-b)^{n-1} \neq 0$ et par suite $\lambda_1 = 0$. Et de même,

Alors $\lambda_n(b-a)^{n-1} = \lim_{x \to b} \theta(x) = 0$. Comme $a \neq b, (b-a)^{n-1} \neq 0$ et par suite $\lambda_n = 0$.

Alors $(**)$ s'écrit: $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{a,b\},\ \lambda_2(x-a)^1(x-b)^{n-2}+\cdots+\lambda_{n-1}(x-a)^{n-2}(x-b)=0$. Puis, en divisant par $(x-a)(x-b)$ non nul, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{a,b\},\ \underbrace{\lambda_2(x-b)^{n-3}+\cdots+\lambda_{n-1}(x-a)^{n-3}+\lambda_{n-1}(x-a)^{n-3}}_{=\mu(x)}=0.$

On calcule $\lim_{x\to a}\mu(x)$ *et* $\lim_{x\to b}\mu(x)$ pour obtenir $\lambda_{n-1}=0=\lambda_2$....On itère ce précédé...on montre ainsi $\lambda_0=\lambda_n=\lambda_1=\lambda_{n-1}=\cdots=0$. Alors, suivant la parité de n, à la dernière étape, $(**)$ s'écrit (après simplification de $(x-a)(x-b)$) :

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{a,b\},\ \lambda_{\frac{n}{2}}=0$ si n pair et $\lambda_{\frac{n-1}{2}}(x-a)+\lambda_{\frac{n+1}{2}}(x-b)=0$ si n impair. En passant à la limite quand $x\to a$ puis $x\to b$, dans le deuxième cas, on obtient : $\lambda_{\frac{n-1}{2}}=\lambda_{\frac{n+1}{2}}=0$. J'en conclus que la famille $(f_1,\ldots,f_n)$ est libre. Ainsi, la famille $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ est une famille de vecteurs de $F\cap G$, libre.

b. Ceci étant vrai pour tout vrai pour tout entier naturel n non nul, la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$est libre dans $F\cap G$. Comme cette famille est infinie, $F\cap G$ est de dimension infinie. Or , $F\cap G$ est un ss-e-v de F et un ss-e-v de G , F et G sont eux-mêmes de dimension infinie.

c. Soit $g_k:\left(x\mapsto\begin{cases}e^{\frac{-k}{(x-a)^2}}\ si\ x\neq a\\ 0\ si\ x=a\end{cases}\right)$. $\left(x\mapsto e^{\frac{-k}{(x-a)^2}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$. De plus, $\lim_{x\to a}e^{\frac{-k}{(x-a)^2}}=0$. Donc, g_k est continue en a. Ainsi, g_k est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, $g_k(0)=0$. Donc, $g_k\in F$.

Montrons que $(g_k)_{k=1\ldots n}$est libre. Soit $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ des réels tels que $\lambda_1g_1+\lambda_2g_2+\cdots+\lambda_ng_n=0$.

Donc, $\forall x\neq a,\lambda_1e^{\frac{-1}{(x-a)^2}}+\lambda_2e^{\frac{-2}{(x-a)^2}}+\cdots+\lambda_ne^{\frac{-k}{(x-a)^2}}=0(**)$. Posons $P(X)=\lambda_1X+\lambda_2X^2+\cdots\lambda_nX^n$. Alors $(**)$ s'écrit :

$\forall x\neq a,\tilde{P}\left(e^{\frac{-1}{(x-a)^2}}\right)=0$. Cela signifie que tous les réels de la forme $e^{\frac{-1}{(x-a)^2}}$ tq $x\neq a$ sont racines de P. Etudions la fonction w: $\left(x\mapsto e^{\frac{-1}{(x-a)^2}}\right)$ sur $]a,+\infty[$. w est dérivable sur $]a,+\infty[$. et $\forall x>a, w'(x)=\frac{2}{(x-a)^3}e^{\frac{-1}{(x-a)^2}}>0$. Donc w est continue et strictement croissante sur $]a,+\infty[$. Alors le théorème des bijections continue set strictement monotones assure que $w(]a,+\infty[)=]\lim_{x\to a^+}w(x),\lim_{x\to+\infty}w(x)[=]0,1[$. Par conséquent, P admet au moins tous les réels de]0,1[comme racines, P a donc une infinité de racines et est nécessairement le polynôme nul. Ces coefficients sont donc nuls i.e. $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. La famille $(g_k)_{k=1..n}$est donc une famille libre de vecteurs de F.

Problème Espaces vectoriels, bases, systèmes linéaires et matrices

On note $H=\left\{M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&-c&-b\\b&a&-c\\c&b&a\end{pmatrix}/(a,b,c)\in\mathbb{C}^3\right\}$ et

$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ et $A'=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-j&0\\0&0&-j^2\end{pmatrix}$

1. Calculer A^2et A^3. En déduire A^n tel que $n\in\mathbb{N}$.
2. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{C})$.
3. Déterminer une base et la dimension de H . (justifier).
4. Montrer que H est stable par produit matriciel et que dans $\mathcal{H}$ le produit matriciel est commutatif.
5. En utilisant A^3+I, le produit matriciel dans $\mathcal{H}$ est-il intègre ?

1.

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}^{A} & \overbrace{\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}^{A}\\ \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}_{A} & \underbrace{\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}}_{A^2=B} & \underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}}_{A^3}\end{array}$$

$.\ A^2=B,\ A^3=-I\ donc\ A^4=-A,A^5=-A^2=-B\ et\ A^6=I\ et\ A^7=A\ldots$

J'en déduis que $\forall n\in\mathbb{N},\ A^{6n}=I,A^{6n+1}=A,A^{6n+2}=B,A^{6n+3}=-I,A^{6n+4}=-A,A^{6n+5}=-B$.

2. $\mathcal{H}=\{aI+bA+cB/(a,b,c)\in\mathbb{C}^3\}=\{aI+bA+cA^2/(a,b,c)\in\mathbb{C}^3\}=vect(I,A,A^2)$. Comme I,A, et A^2 sont des éléments de $M_3(\mathbb{C}),H$ est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{C})$.

3. (I, A, A^2) est génératrice de H. Montrons que cette famille est libre : soit a, b, c des complexes tels que : $aI + bA + cA^2 = 0$. Cela s'écrit : $\begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc nécessairement, $a = b = c = 0$. La famille (I, A, A^2)est donc libre et est finalement une base de H. Donc $dimH = 3$.
4. Soit a, b, c, x, y, z des complexes.
$M(a,b,c)M(x,y,z) = (aI + bA + cA^2)(xI + yA + zA^2)$
$= axI + (ay + bx)A + (az + cx + by)A^2 + (bz + cy)A^3 + czA^4$
$= axI + (ay + bx)A + (az + cx + by)A^2 + (bz + cy)(-I) + cz(-A)$
$= (ax - bz - cy)I + (ay + bx - cz)A + (az + cx + by)A^2$
$= M(ax - bz - cy, ay + bx - cz, az + cx + by)$

Donc, $M(a,b,c)M(x,y,z) \in H$. Ainsi, H est stable par produit matriciel.
De plus, $M(a,b,c)M(x,y,z) = M(ax - bz - cy, ay + bx - cz, az + cx + by) = M(xa - yc - zb, xb + ya - zc, xc + za + yb) = M(x,y,z)M(a,b,c)$. Donc le produit matriciel dans H est commutatif.

5. $O = -I + I = A^3 + I = (A + I)(A^2 - A + I)$. De plus, $M(1,1,0) = A + I \neq 0$ et $M(1,-1,1) = A^2 - A + I \neq 0$ (car $0I + 0A + 0A^2$ est la seule manière d'écrire 0 comme $c.l.$ de I, A et A^2) .
$M(1,-1,1)$ et $M(1,1,0)$ sont donc deux éléments de H non nuls et dont le produit est nul. Cela prouve que le produit matriciel dans H n'est pas intègre.

6. Montrer que le système $AX = \lambda X$ admet une solution non nulle si et ssi $\lambda = -1$ ou $\lambda = -j$ ou $\lambda = -j^2$.
7. En déduire que A est inversible.
8. Donner :
   - la solution $X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ de $AX = -X$ telle que $a_1 = 1$.
   - une solution $X_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ non nulle de $AX = -j$ telle que $a_2 = 1$
   - une solution $X_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$ non nulle de $AX = -j^2X$ telle que $a_3 = 1$
9. On considère la matrice P carrée d'ordre 3 telle dont la première colonne est X_1, la deuxième colonne est X_2 et la troisième colonne est X_3. Autrement dit $P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.
   a. Justifier que $AP = PA'$.
   b. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   c. En déduire une nouvelle expression de A^n tel que $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que cette formule est encore valable pour $n = -1$.

6. le système $AX = \lambda X$ admet une solution non nulle $\Leftrightarrow$ le système $(A - \lambda I)X = 0$ est incompatible
$\Leftrightarrow A - \lambda I$ n 'est pas inversible $\Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0$.

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda^{+} & 0 & -1 \\ 1^{-} & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1.$$

$Or, -\lambda^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 = -1 \Leftrightarrow \lambda$ est racine $3^{\text{ième}}$ de $-1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,2]\!] / \lambda = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{\frac{2ik\pi}{3}} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$.

$Or, \quad pour\ k = 0, e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -j^2, \quad pour\ k = 1, e^{i\pi} = -1 \quad et\ pour\ k = 2,\ e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -j.$

Ainsi, le système $AX = \lambda X$ admet une solution non nulle$\Leftrightarrow \lambda = -1$ ou $\lambda = -j$ ou $\lambda = -j^2$.

7. Par conséquent, le système $AX = 0$ est n'admet aucune solution non nulle et par conséquent, A est inversible.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -z = -x \\ x = -y \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -x \end{cases}$. . Donc $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -j\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -z = -jx \\ x = -jy \\ y = -jz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = jx \\ y = -\frac{1}{j}x = -j^2x \end{cases}$. Donc, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -j^2 \\ j \end{pmatrix}$ convient.

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-j^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-z=-j^2x\\x=-j^2y\\y=-j^2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=j^2x\\y=-\frac{1}{j^2}x=-jx\end{cases}.$$ Donc, $X_3=\begin{pmatrix}1\\-j\\j^2\end{pmatrix}$ convient.

8. a.Soit $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-j^2&-j\\1&j&j^2\end{pmatrix}$. Alors , $AP=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-j^2&-j\\1&j&j^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-j&-j^2\\1&1&1\\-1&-j^2&-j\end{pmatrix}$

$$et\ PA'=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-j^2&-j\\1&j&j^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-j&0\\0&0&-j^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-j&-j^2\\1&1&1\\-1&-j^2&-j\end{pmatrix}.$$

Donc $AP=PA'$.

$b.\bar{P}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-j&-j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}$ $donc\ \ P\bar{P}^T=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-j^2&-j\\1&j&j^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-j&j^2\\1&-j^2&j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=3I$. Donc $P\left(\frac{1}{3}\bar{P}^T\right)=I.$

Donc P est inversible et $P^{-1}=\frac{1}{3}\bar{P}^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-j&j^2\\1&-j^2&j\end{pmatrix}$.

9. $A=PA'^{P^{-1}}$. Donc , $A^n=PA'^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-j^2&-j\\1&j&j^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&(-j)^n&0\\0&0&(-j^2)^n\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-j&j^2\\1&-j^2&j\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^n&(-j)^n&(-j^2)^n\\(-1)^{n+1}&-j^{2(-j)^n}&-j(-j^2)^n\\(-1)^n&j(-j)^n&j^2(-j^2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-j&j^2\\1&-j^2&j\end{pmatrix}$$

$$A^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^n[1+j^n+j^{2n}]&(-1)^{n+1}[1+j^{n+1}+j^{2(n+1)}]&(-1)^n[1+j^{n+2}+j^{2n+1}]\\(-1)^{n+1}[1+j^{n+2}+j^{2n+1}]&(-1)^n[1+j^{n+3}+j^{2n+3}]&(-1)^{n+1}[1+j^{n+4}+j^{2n+2}]\\(-1)^n[1+j^{n+1}+j^{2(n+1)}]&(-1)^{n+1}[1+j^{n+2}+j^{2(n+2)}]&(-1)^n[1+j^{n+3}+j^{2n+3}]\end{pmatrix}$$

Prenons $n=-1$ dans l'expression précédente, on obtient $B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$ puisque $1+j^{-1}+j^{-2}=1+j+j^2=0$ et $j^3=1$. Alors $AB=I$ donc $A^{-1}=B$ et la formule précédente est vraie pour $n=-1$.

10. On considère l'application $\varphi:\begin{pmatrix}M_3(\mathbb{C})\to M_3(\mathbb{C})\\S\mapsto S'=P^{-1}SP\end{pmatrix}$.

a. Justifier que φ est bijective et donner un expression de φ^{-1}.

b. Montrer que $\forall(S,T)\in M_3(\mathbb{C})^2,\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2,$ $\begin{cases}\varphi(\alpha S+\beta T)=\alpha\varphi(S)+\beta\varphi(T)\\\varphi(ST)=\varphi(S)\varphi(T)\end{cases}$.

c. Montrer que $\forall S\in GL_3(\mathbb{C}),\varphi(S^{-1})=(\varphi(S))^{-1}$.

d. Soit $M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&-c&-b\\b&a&-c\\c&b&a\end{pmatrix}\in H$. Déterminer $M'=P^{-1}MP$.

e. Montrer que $\varphi(H)$ est l'ensemble $D_3(\mathbb{C})$ des matrices diagonales de $M_3(\mathbb{C})$.

10.a. Soit $Q\in M_3(\mathbb{C})$. Alors, $Q=P^{-1}SP\Leftrightarrow S=PQP^{-1}$. Donc, $S=PQP^{-1}$ est l'unique matrice de $M_3(\mathbb{C})$ telle que $\varphi(S)=Q$.

φ est bijective de $M_3(\mathbb{C})$ sur $M_3(\mathbb{C})$ et donner un expression de $\forall Q\in M_3(\mathbb{C}),\varphi^{-1}(Q)=PQP^{-1}$.

b. $Soit\ (S,T)\in M_3(\mathbb{C})^2\ et\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2,$

$$\begin{cases}\varphi(\alpha S+\beta T)=P^{-1}(\alpha S+\beta T)P=(P^{-1}\alpha S+P^{-1}\beta T)P=(\alpha P^{-1}S+\beta P^{-1}T)P=\alpha P^{-1}SP+\beta P^{-1}TP=\alpha\varphi(S)+\beta\varphi(T)\\\varphi(ST)=P^{-1}(ST)P=P^{-1}(SIT)P=P^{-1}(SPP^{-1}T)P=(P^{-1}SP)(P^{-1}TP)=\varphi(S)\varphi(T).\end{cases}$$

c. $Soit\ S\in GL_3(\mathbb{C}),I=P^{-1}IP=\varphi(I)=\varphi(SS^{-1})=\varphi(S)\varphi(S^{-1}).\ Donc\,\varphi(S)\ est\ inversible\ et\ \ et\ (\varphi(S))^{-1}=\varphi(S^{-1}).$

d. Soit $M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&-c&-b\\b&a&-c\\c&b&a\end{pmatrix}=aI+bA+cA^2$.

Donc, $M'=\varphi(M)\underbrace{=}_{d'après\ b.}a\varphi(I)+b\varphi(A)+c\varphi(A^2)\underbrace{=}_{d'après\ b.}a\varphi(I)+b\varphi(A)+c\varphi(A)^2=aI+bA'+cA'^2$

Ainsi, $M' = \begin{pmatrix} a-b+c & 0 & 0 \\ 0 & a-jb+j^2c & 0 \\ 0 & 0 & a-j^2b+jc \end{pmatrix}$.

e. D'après ce qui précède, $\varphi(H) = \{\begin{pmatrix} a-b+c & 0 & 0 \\ 0 & a-jb+j^2c & 0 \\ 0 & 0 & a-j^2b+jc \end{pmatrix} / \, a, b, c \text{ réels}\}$.

Donc, $\varphi(H) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}\right)$.

Les trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}$ étant diagonales, $\varphi(H)$ est un ss-e-v de $D_3(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices diagonales.

De plus, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants car,

$a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-b+c & 0 & 0 \\ 0 & a-jb+j^2c & 0 \\ 0 & 0 & a-j^2b+jc \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a-b+c=0 \\ a-jb+j^2c=0 \\ a-j^2b+jc=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -j & j^2 \\ 1 & -j^2 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3P^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre formée de 3 vecteurs de $D_3(\mathbb{C})$. Comme $\dim D_3(\mathbb{C}) = 3$, cette famille libre est une base de $D_3(\mathbb{C})$.

Ainsi, $D_3(\mathbb{C}) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}\right) = \varphi(H)$.