Continuité et dérivation : rappels et compléments.

1 **Préliminaire : Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur D_h et a un réel.** Pour étudier la limite de h en a,

1) il faut que $h(x)$ existe quand x tend vers a ; pour cela, il faut et il suffit que $\forall r \in \mathbb{R}^{+*}, (]a-r, a+r[\setminus\{a\}) \cap D_h \neq \emptyset$. On dit, dans ce cas, que a est un point non isolé de D_h ou du bord de D_h.
2) il suffit de se placer au voisinage de a : il suffit d'étudier h sur un domaine de la forme $\underbrace{]a-r, a+s[\cap D_h}_{voisinage\ de\ a\ dans\ Df}$ où $r, s \in \mathbb{R}^{+*}$.
3) on peut étudier la limite à gauche et à droite en a lorsque h est définie à droite et à gauche de a. Lorsqu'on étudie la limite de h en a^+(resp. a^-), on étudie la limite de $h(x)$ quand x tend vers a avec la contrainte $x > a$ $(resp. x < a)$; on peut alors se placer sur un voisinage à droite (resp. gauche) de la forme $]a, a+s[\cap D_h$ (resp. $]a-r, a[\cap D_h$).

2 **Définition** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur Df . Soit a un réel élément de Df et non isolé dans Df.

1. f est **continue en a** lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Cela signifie graphiquement que le point $M(x, f(x))$ de Cf se rapproche du point $A(a, f(a))$ quand x se rapproche de a.
2. Soit $I \subset Df$. f est **continue sur I** lorsque f est continue en tout point de I. Si I est un intervalle, cela signifie que la portion de Cf correspondant aux points $M(x, f(x))$ tels que $x \in I$ n'a pas de trous.
3. Soit x un point de Df distinct de a.

$\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur (ou la pente) de la droite passant par $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ (appelée corde).

$\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelé le **taux d'accroissement** de f entre a et x.

4. f est **dérivable en a** lorsque $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand $x \to a$. Cette limite finie , si elle existe, est alors **le nombre dérivé de f en a** et notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$. Autrement dit , $f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Dans ce cas , **la tangente à Cf au point de A**$(a, f(a))$ (ou en a) est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

5. Lorsque $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand $x \to a^+$, f est **dérivable à droite en a.** Cette limite finie à droite , si elle existe, est alors **le nombre dérivé à droite** de f en a et noté $f_d'(a)$ et,

$f_d'(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Dans ce cas , **la demi-tangente à droite à Cf** au point de $A(a, f(a))$ (ou en a) est la demi-droite d'équations $y = f(a) + f_d'(a)(x-a) et\ x > a$.

6. Lorsque $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand $x \to a^-$, f est **dérivable à gauche en a.** Cette limite finie à droite , si elle existe, est alors **le nombre dérivé à gauche** de f en a et noté $f_g'(a)$ et,

$f_g'(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Dans ce cas , **la demi-tangente à gauche à Cf** au point de $A(a, f(a))$ (ou en a) est la demi-droite d'équations $y = f(a) + f_g'(a)(x-a)\ et\ x < a$.

7. Lorsque f est continue en a et $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite infinie en a, f n'est pas dérivable en a et la droite verticale d'équation $x = a$ est alors la **tangente** (dite **verticale**) à Cf au point $A(a, f(a))$.
8. Lorsque f est continue en a et $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite infinie en $a^+(resp. en\ a^-)$, alors f n'est pas **dérivable à droite** (resp. gauche) **en a** et la droite verticale d'équation $x = a$ est alors la **demi-tangente verticale** à droite (resp. gauche) à Cf au point $A(a, f(a))$.
9. Soit $I \subset Df$. f est **dérivable sur I** lorsque f est dérivable en tout point de I. La fonction f' qui associe, à tout point a de I, le nombre dérivé de f en a, est appelée la **fonction dérivée** de f.
10. La fonction f'' ou $f^{(2)}$ qui associe, à un réel a, le nombre dérivé de f' en a lorsqu'il existe, est appelée la **fonction dérivée seconde** de f. On définit de même $f^{(3)} = \left(f^{(2)}\right)'(\dots)$ puis $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ la fonction dérivée $n^{ième}$ de f.
11. Une fonction f est **de classe C^1** sur I lorsque f est dérivable sur I et f' est continue sur I. Une fonction f est de classe C^2 sur I lorsque f et f' sont dérivables sur I et f'' est continue sur I. Une fonction f est de classe C^n sur I, où $n \in \mathbb{N}^*$, lorsque $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ sont dérivables sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I .
12. F est **une primitive** de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$ $(i.e. F' = f)$.

3 **NB :** 1) $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'est définie que pour $x \in Df\setminus\{a\}$.

2) Si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'a pas de limite en a ou a une limite infinie en a , alors f n'est pas dérivable en a, dans le 2ème cas, Cf a une tangente verticale au point $A(a, f(a))$, dans le premier cas, il n'y a rien.

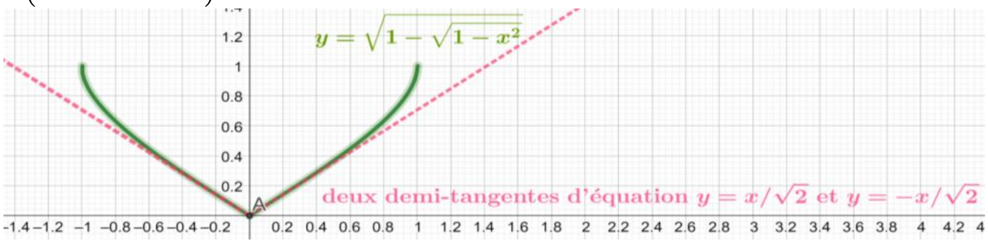
3) Si f est définie en a et de part et d'autre de a alors f est continue en a sietssi $\begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \\ \lim_{x\to a^-} h(x) = f(a) \end{cases}$ sietssi $\lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} f(x) = f(a)$

et f est dérivable en a sietssi f est dérivable à droite et à gauche en a et $f_d'(a) = f_g'(a)$. Et dans ce cas , $f'(a) = f_d'(a) = f_g'(a)$.

4 **Exemples :** 1) La fonction partie entière est continue en tout réel non entier mais n'est continue en aucun entier. En effet, considérons $k \in \mathbb{Z}$. $\forall x \in]k-1,1[$, $\lfloor x \rfloor = k-1$ donc $\lim\limits_{x \to k^-} \lfloor x \rfloor = k-1 \neq k = \lfloor k \rfloor$. Donc, La partie entière n'est pas continue en k. Par contre, considérons $a \notin \mathbb{Z}$. $\forall x \in]\lfloor a \rfloor, \lfloor a \rfloor + 1[$, $\lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor$ donc $\lim\limits_{x \to a} \lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor$. Donc, La partie entière est continue en a. Le domaine de continuité de la partie entière est donc $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

2) La courbe de la fonction $f : (x \mapsto \sqrt{x})$ admet une tangente verticale au point $O(0,0)$ car f est continue en 0 et $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = +\infty$.
De même, comme prouvé au chap. 3, pour tout $n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$, la fonction $f : (x \mapsto \sqrt[n]{x})$ est continue mais n' est pas dérivable 0 et sa courbe admet une tangente verticale au point $O(0,0)$. Par contre, f est dérivable sur $Df \backslash \{0\}$. Donc le domaine de dérivabilité de f est $D_{f'} = Df \backslash \{0\}$ et son domaine de continuité est Df.

3) Dans le DL 1, vous avez prouvé que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{0}}{x-0} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. On peut aujourd'hui interpréter ce résultat : comme $f : \left(x \mapsto \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$ est continue en 0, Cf admet deux demi-tangentes au point O qui ont pour équation $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x$ à droite et $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x$ à droite.



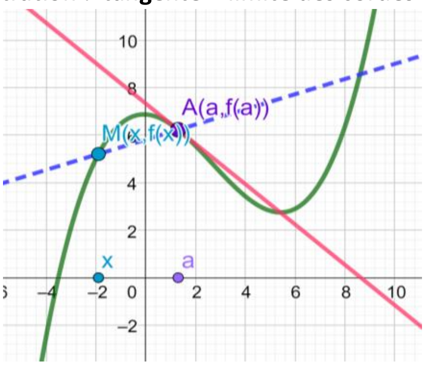
demi-tangentes – GeoGebra

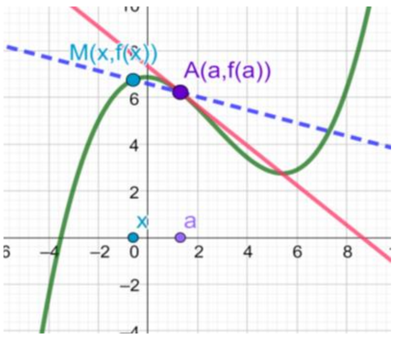
5 **Illustration :** Soit $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ des points de Cf. Par définition, la **tangente à Cf** au point A est la position limite des cordes (AM) quand x tend vers a (c'est-à-dire quand M se rapproche de A en suivant Cf). La tangente à Cf au point A est la droite la plus proche de Cf au voisinage de A, la courbe Cf vient se confondre avec cette tangente au voisinage de A.

En effet,
- si f est dérivable en a alors la pente des droites (AM) tendent vers le réel $f'(a)$. Comme, de plus, les droites (AM) passent toutes par le point A, les droites (AM) tendent vers la droite passant par A et de pente $f'(a)$. De plus, pour qu'une droite D soit proche de Cf au voisinage de A, il faut que D passe par A donc D a une équation de la forme $y = u(x-a) + f(a)$ où u =coeff directeur de D. Mais alors $\forall x \neq a$, $f(x) - \left(u(x-a) + f(a)\right) = (x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - u\right)$. Donc pour que l'écart entre Cf et D soit le plus petit possible quand $x \to a$, il faut et il suffit de prendre $u = f'(a)$ puisque prendre $u = f'(a)$ est la seule valeur telle que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - u = 0$. Donc, D est la droite la plus proche de Cf sietssi D est la tangente à Cf en A.
- Si f est continue en a et $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, alors la pente des droites (AM) tendent vers $\pm\infty$. Comme, de plus, les droites (AM) passent toutes par le point A, les droites (AM) tendent vers la droite verticale passant par A.

Droite tangente : limite des cordes et limite des tangentes – GeoGebra : Faire bouger b qui joue le rôle de x et le faire tendre vers a.

Illustration : tangente = limite des cordes





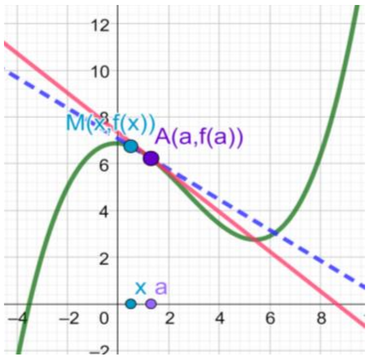
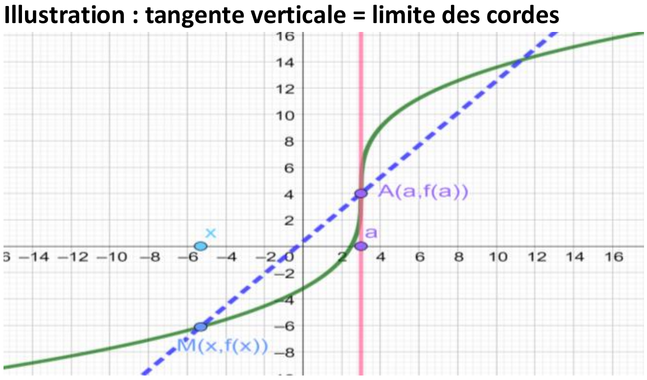
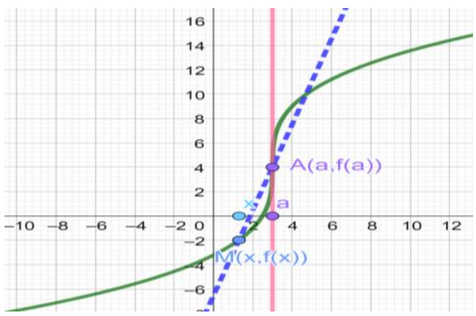


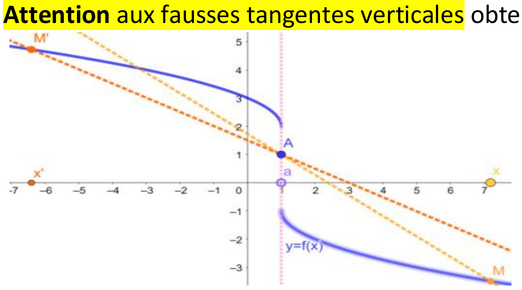
Illustration : tangente verticale = limite des cordes

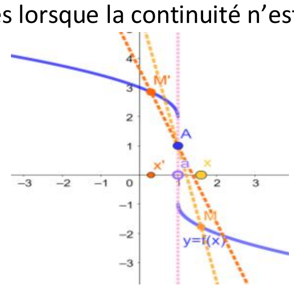




6 **Exercice** : représenter Cf au voisinage de a lorsque f est continue en a, $\lim\limits_{x \to a^-} \tau(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^+} \tau(x) = 2$.

6bis **Attention aux fausses tangentes verticales** obtenues lorsque la continuité n'est pas vérifiée





Fausse tangente verticale pour une fonction discontinue – GeoGebra

2

7 **Théorème :** Si f est dérivable en a alors f est continue en a. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.
Conséquence : $\underbrace{D_{f'}}_{\text{domaine de défintion de } f'} \subset \underbrace{D_c}_{\text{domaine de continuité de } f} \subset \underbrace{D_f}_{\text{domaine de défintion de } f}$

8 **Attention , la réciproque est fausse.** Donner une fonction qui est continue en un point mais pas dérivable en ce point.

9 **Théorème (admis pour le moment) .** Soit I un intervalle non réduit à un point et a un point de I.

- Si f est continue en a et dérivable au moins sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$ et par suite ,

  si L est un réel alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$ et f' est continue en a , mais
  si $L = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en a et Cf a une tangente verticale au point $A(a, f(a))$.
- Si f est continue en a et dérivable au moins sur $I \cap]a, +\infty[$ $(]-\infty, a[)$ et $\lim\limits_{x\to a^+(a^-)} f'(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to a^+(a^-)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$.

10 **Illustration** : D'après le théorème, si f est continue en a et dérivable autour de a, la **tangente à Cf** au point A est la position limite des tangentes à Cf aux points $M(x, f(x))$ quand x tend vers a (c'est-à-dire quand M se rapproche de A en suivant Cf)
En effet, si L est un réel alors quand M tend vers A , les pentes $f'(x)$ des tangentes à Cf en M tendant vers L qui sera donc $f'(a)$ et par suite ces tangentes en M vont tendre vers la droite passant par A et dirigée par $L = f'(a)$. Si par contre $L = \pm\infty$ alors quand M tend vers A , les pentes $f'(x)$ des tangentes à Cf en M tendant vers $\pm\infty$ et par suite ces tangentes en M vont tendre vers la droite verticale passant par A . https://www.geogebra.org/m/d9pamt2e

(afficher p, masquer g et faire bouger b -qui joue le rôle de x- et le faire tendre vers a).

11 **Exemple** : Montrons que la fonction valeur absolue $f: (x \mapsto |x|)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$mais n'est pas dérivable en 0.
En effet, soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. $\forall x \in]\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}[, |x| = x$ donc$\frac{|x|-|a|}{x-a} = 1$ et $\lim\limits_{x\to a} \frac{|x|-|a|}{x-a} = 1$ .Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 1$.
Soit $a \in \mathbb{R}^{-*}$. $\forall x \in]\frac{3a}{2}, \frac{a}{2}, [, |x| = -x$ donc $\frac{|x|-|a|}{x-a} = \frac{-x-(-a)}{x-a} = \frac{a-x}{x-a} = -1$ et par suite, $\lim\limits_{x\to a} \frac{|x|-|a|}{x-a} = -1$. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = -1$.
J'en conclus que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x > 0, f'(x) = 1$ et $\forall x < 0, f'(x) = -1$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -1$. Comme $f$est continue en 0, le théorème 9 assure que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$. J'en déduis que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ n'a pas de limite en 0 et ainsi, f n'est pas dérivable en 0.

12 **ATTENTION** : 1) Si les limites de f' en a, ni en a^+, ni en a^- n'existent pas alors le théorème ne permet pas de conclure sur la dérivabilité de f en a. Pour étudier la dérivabilité de f en a, il faut alors étudier la limite en a de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

2) La continuité en a est essentielle. Sans cette continuité, la propriété est fausse .Exemple: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } x < 0 \\ 10 \text{ si } x = 0 \\ 2x + 4 \text{ si } x > 0 \end{cases}$. f n'est pas continue en 0 (car $\lim\limits_{x>0} f(x) = 4 \neq 10$) donc pas dérivable en 0 . Mais f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0, f'(x) = 2$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 2$.

13 **Théorème** Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions définies sur D.
1) Si u et v sont continues sur D et k est une constante réelle alors $k.u$, $u + v$, $u \times v$ sont continues sur D.
2) Si u et v sont continues sur D et u ne s' annule pas sur D alors $1/u$ et v/u sont continues sur D.
3) Si u est continue sur D et v est continue sur E et $\forall x \in D, u(x) \in E$ alors $v \circ u : (x \to v(u(x)))$ est continue sur D.

14 **Conséquence :** si f n'est pas définie par morceaux et que l'expression de f n'est constituée que de fonctions continues partout sur leur propre domaine de définition* alors f est continue sur son propre domaine de définition .
*toutes les fonctions usuelles sauf la partie entière.

15 **Théorème** Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions définies sur D.
1) Si u et v sont dérivables sur D et k est une constante (en x) réelle alors $k.u$, $u + v$, $u \times v$ sont dérivables sur D et $\forall x \in D$,

$$(k.u)'(x) = k.u'(x)$$
$$(u + v)' = u'(x) + v'(x)$$
$$(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) .$$

2) Si u et v sont dérivables sur D et u ne s' annule pas sur D alors $1/u$ et v/u sont dérivables sur D et $\forall x \in D$,

$$\left(\frac{1}{u}\right)'(x) = \frac{-u'(x)}{(u(x))^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{v}{u}\right)'(x) = \frac{v'(x)u(x)-v(x)u'(x)}{(u(x))^2} .$$

3) Si u est dérivable sur D et v est dérivable sur E et $\forall x \in D, u(x) \in E$ alors $v \circ u : (x \to v(u(x)))$ est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, (v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = u'(x) \times (v' \circ u)(x).$$

16 **Conséquence :** si f n'est pas définie par morceaux et que l'expression de f n'est constituée que de fonctions dérivables partout sur leur propre domaine de définition** alors f est dérivable sur son propre domaine de définition .
**toutes les fonctions usuelles sauf les *racines nièmes réelles, Arcsin, Arccos, Arctan et valeur absolue*.

17 **Exercice :** Choisir et appliquer la bonne formule pour calculer $f'(x)$ lorsque : 1. $f(x) = 2\cos(x)$ 2. $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ 3. $f(x) = 5 - \frac{3}{e^{2x}}$ 4. $f(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{x}}$
5. $f(x) = \frac{\cos(x)}{7\ln(x)}$ 6. $f(x) = \sqrt[3]{x}e^x$ 7. $f(x) = \cos(\ln(x))$ 8. $f(x) = \ln(\sqrt{3x - 1})$ 9. $f(x) = \sqrt[4]{1 - x + 3x^2}$ 10. $f(x) = 2\sin(x)\tan(\ln(x))$.

CONTINUITE ET DERIVATION DES FONCTIONS USUELLES

Fonction	Domaine de définition	Domaine de continuité	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée	Limites usuelles par taux d'accroissement
Constante	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{x}$	$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$ $\lim_{x\to b}\frac{\ln(x)-\ln(b)}{x-b}=\frac{1}{b}$ où $b>0$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x	$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ $\lim_{x\to b}\frac{e^x-e^b}{x-b}=e^b$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$ $\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}=-\sin(a)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ $\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}=\cos(a)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$	$1+tan^2(x)=\frac{1}{cos^2(x)}$	$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$ $\lim_{x\to a}\frac{\tan(x)-tan(a)}{x-a}=1+tan^2a$ où $a\in D_{tan}$
x^n tq $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$
x^{-n} tq $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-nx^{-n-1}$	$\lim_{x\to a}\frac{x^{-n}-a^{-n}}{x-a}=-na^{-n-1}$
$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$ $si\ a>0$
$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ tq $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$	$\mathbb{R}^+\ si\ n\ pair, n\geq 2$ $\mathbb{R}\ si\ n\ impair, n\geq 2$	$\mathbb{R}^+\ si\ n\ pair, n\geq 2$ $\mathbb{R}\ si\ n\ impair, n\geq 2$	$\mathbb{R}^{+*}\ si\ n\ pair, n\geq 2$ $\mathbb{R}^*\ si\ n\ impair, n\geq 2$	$\frac{1}{n}x^{(\frac{1}{n}-1)}$	$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ $si\ a\in Df'$
x^α avec $\alpha\in\mathbb{Q}\backslash\mathbb{N}$, constante		Df	$Df\backslash\{0\}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-b^\alpha}{x-b}=\alpha b^{\alpha-1}$ $si\ b\in Df'$
$\|x\|$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\begin{cases}1\ si\ x>0\\-1\ si\ x<0\end{cases}$	
$\lfloor x\rfloor$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$	0	
$Arcsin(x)$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$Arccos(x)$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$]-1,1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$Arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$ch(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$sh(x)$	
$sh(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$ch(x)$	
$x^\alpha=e^{\alpha\ln(x)}$ Où α constante réelle	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\lim_{x\to b}\frac{x^\alpha-b^\alpha}{x-b}=\alpha\, b^{\alpha-1}$ où $b\in\mathbb{R}^{+*}$.
$\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ où $a_0,\ldots,a_n$ constantes Fonction polynomiale	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\sum_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}$	

$v(ax+b)$ où a et b constantes réelles.					
$sin(u(x))$					
$\cos(u(x))$					
$\tan(u(x))$					
$\lvert u(x)\rvert$					
$u(x)^n$					
$\frac{1}{u(x)^n} =$ ……					
$\sqrt[n]{u(x)} =$ ……					
$u(x)^\alpha$ où α constante					
$\ln(\lvert u(x)\rvert)$					
$\exp(u(x)) = e^{u(x)}$					
$ch(u(x))$					
$sh(u(x))$					
$Arcsin(u(x))$					
$Arccos(u(x))$					
$Arctan(u(x))$					

19 **Exemples :**

1) Soit $f : (x \mapsto \sqrt{e^x - 4}\,)$. Etudions la dérivabilité de f et calculons le cas échéant $f'(x)$.

- D_f? $f(x)\ existe \iff e^x - 4 \geq 0 \iff e^x \geq 4 \iff x \geq \ln(4) = 2\ln(2)$. Donc $Df = [2\ln(2)\,, +\infty[$.
- D_c? f est continue sur Df puisque l'expression de f n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.
- $D_{f'}$? Dans l'expression de f , seule la fonction racine carrée n'est pas dérivable sur son propre domaine de définition. La fonction racine carrée n'est

dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}(= E)$. Cherchons donc le domaine $D\ de\ Df$ tel que $\forall x \in D, e^x - 4 \in \mathbb{R}^{+*}$. Or, $e^x > 4 \iff x > 2\ln(2)$. Donc $\forall x \in]2\ln(2)\,, +\infty[,\ u(x) = e^x - 4 \in \mathbb{R}^{+*}$. Et par suite, f est dérivable au moins sur $]2\ln(2)\,, +\infty[$. Et $\forall x \in]2\ln(2)\,, +\infty[, f'(x) = u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-4}}$.

<u>Etude de la dérivabilité de f en $2\ln(2)$</u> : il s'agit d'étudier l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x \to 2\ln(2)} \frac{f(x)-f(2\ln(2))}{x-2\ln(2)}$

<u>1ère méthode</u> : Revenons à la définition , étudions la limite de $\frac{f(x)-f(2\ln(2))}{x-2\ln(2)}$ quand $x \to 2\ln(2)$.

$\forall x \in]2\ln(2)\,, +\infty[, \frac{f(x)-f(2\ln(2))}{x-2\ln(2)} = \frac{\sqrt{e^x-4}}{x-2\ln(2)} = \frac{\sqrt{e^x-4}}{e^x-4}\frac{e^x-4}{x-2\ln(2)} = \frac{1}{\sqrt{e^x-4}}\frac{e^x-e^{2\ln(2)}}{x-2\ln(2)}$. Or, $\lim\limits_{x \to 2\ln(2)} \frac{1}{\sqrt{e^x-4}} = +\infty$. Et, comme la fonction exponentielle est dérivable en $2\ln(2)$, $\lim\limits_{x \to 2\ln(2)} \frac{e^x-e^{2\ln(2)}}{x-2\ln(2)} = exp'(2\ln(2)) = e^{2\ln(2)} = 4$. Et par conséquent, $\lim\limits_{x \to 2\ln(2)} \frac{f(x)-f(2\ln(2))}{x-2\ln(2)} = +\infty$.

<u>2ème méthode</u> : f étant continue en $2\ln(2)$ et dérivable au moins sur $]2\ln(2)\,, +\infty[$, je peux utiliser le théorème 9 : j'étudie donc la limite de $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-4}}$ quand $x \to 2\ln(2)\,.\, Or,\ \lim\limits_{x \to 2\ln(2)} \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-4}} = +\infty$. Donc le théorème assure que $\lim\limits_{x \to 2\ln(2)} \frac{f(x)-f(2\ln(2))}{x-2\ln(2)} = +\infty$

j'en conclus que f n'est pas dérivable à $2\ln(2)$ et Cf a une tangente verticale en $A(2\ln(2)\,, 0)$. Et ainsi, $D_{f'} =]2\ln(2)\,, +\infty[\ et$ Et $\forall x \in D_{f'}, f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-4}}$.

2) Soit $f : \left(x \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x}\ si\ x = 0 \\ 0\ si\ x \neq 0 \end{cases}\right)$. Etudions la dérivabilité de f et calculons le cas échéant $f'(x)$.

f est une fonction définie par morceaux. $Df = \mathbb{R}$. Posons $g(x) = \frac{\cos(x)-1}{x}$. $Dg = \mathbb{R}^*\ et\ f$ et g coïncident (sont égales) sur $\mathbb{R}^*$. Par conséquent, f et g coïncident sur un voisinage de chaque réel non nul. Comme g n'est constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de définition, g est continue et dérivable sur $Dg = \mathbb{R}^*$. Soit un réel a non nul. Comme f et g coïncident sur un voisinage de a et par conséquent, sur ce voisinage, $f(x) = g(x)\ et\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ et par suite, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a) = f(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable en a et $f'(a) = g'(a) = \frac{-a\sin(a)-\cos(a)+1}{a^2}$. Ainsi, je peux conclure que f est continue et dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*$et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{-x\sin(x)-\cos(x)+1}{x^2}$.

Continuité en 0 ? Je vois que $\frac{\cos(x)-1}{x}=\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}$. Comme cos est dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{x}=cos'(0)=-\sin(0)=0=f(0)$. Donc f est continue en 0.

Dérivabilité en 0 ? $\forall x\neq0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{\cos(x)-1}{x}}{x}=\frac{\cos(x)-1}{x^2}$. Nous avons montré dans le TD 3 que $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$. J'en conclus que f est dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{1}{2}$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*, f'(x)=\begin{cases}\frac{-x\sin(x)-\cos(x)+1}{x^2} & si\ x\neq0\\ -\frac{1}{2} & si\ x=0\end{cases}$.

3) Calculons $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{9\sin(x)-1}+\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)-2}{2x-\pi}$.

Posons $f(x)=\underbrace{\sqrt[3]{9\sin(x)-1}}_{g(x)}+\underbrace{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}_{h(x)}-2$. Je remarque que $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ existe, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ et $\frac{\sqrt[3]{9\sin(x)-1}-2e^{\frac{2x}{\pi}}}{2x-\pi}=\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$.

Dans l'expression de f, seule la fonction ln n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais uniquement sur $\mathbb{R}^{+*}$ et seule la fonction $\sqrt[3]{.}$ n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition mais uniquement en tout point de $\mathbb{R}^*$.

D'une part, $\forall x\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[, \frac{2x}{\pi}>0$ donc h et, par suite, f sont définies sur $\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[$. h est dérivable au moins sur $\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[$ et $\forall x\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[, h'(x)=\frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{2x}{\pi}}=\frac{1}{x}$.

D'autre part, $\forall x\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[, \sin(x)\in\left]\frac{1}{2},1\right]$ donc $u(x)=9\sin(x)-1\in\left]\frac{7}{2},8\right]\subset\mathbb{R}^*$. Par conséquent, g et donc f sont dérivables au moins sur $\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[$,et par conséquent en $\frac{\pi}{2}$ (puisque $\frac{\pi}{2}\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[$). Et, $\forall x\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[, g'(x)=u'(x)\left[\frac{1}{3}\left(u(x)\right)^{\frac{1}{3}-1}\right]=9\cos(x)\frac{1}{3}(9\sin(x)-1)^{\frac{2}{3}}=3\cos(x)\sqrt[3]{\frac{1}{(9\sin(x)-1)^2}}$.

Donc, $\forall x\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[, f'(x)=3\cos(x)\sqrt[3]{(9\sin(x)-1)^2}+\frac{1}{x}$. Alors, en particulier, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt[3]{\left(9\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right)^2}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$. J' en déduis que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2}{\pi}$. Et enfin, je peux conclure que : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{9\sin(x)-1}+\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)-2}{2x-\pi}=\frac{1}{\pi}$.

APPLICATION DE LA CONTINUITE ET DE LA DERIVATION AUX VARIATIONS DES FONCTIONS DERIVABLES

20 La tangente à Cf au point A est la droite la plus proche de Cf au voisinage de A, la courbe Cf vient se confondre avec cette tangente au voisinage de A. La tangente va donc indiquer la direction de Cf et par suite les variations de f au voisinage A : si sa pente $f'(a)$ est positive (resp. négative), la fonction est croissante (resp. décroissante) au voisinage de a. Plus précisément,

21 **Théorème (admis pour le moment)** :

- Si f est dérivable sur l'intervalle I et f' est positive (resp. négative) sur I alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.
- Si f est continue sur l'intervalle I et dérivable au moins sur $\mathring{I}$ l'intérieur de I et f' est positive (resp. négative) sur $\mathring{I}$ alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.
- Si f est dérivable sur l'intervalle I et f' est positive (resp. négative) sur I et ne s'annule qu'en des points isolés alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.
- Si f est continue sur l'intervalle I et dérivable au moins sur $\mathring{I}$ l'intérieur de I et f' est positive (resp. négative) sur $\mathring{I}$ alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.
- Si f est dérivable sur l'intervalle I et f' est nulle sur I alors f est constante sur I.
- Si f est continue sur l'intervalle I et dérivable au moins sur $\mathring{I}$ l'intérieur de I et f' est nulle sur $\mathring{I}$ alors f est constante sur I.

22 **ATTENTION il faut travailler sur un intervalle.** Trouver une fonction usuelle f dont la dérivée est négative sur Df mais qui n'est pas décroissante sur Df.

23 **Conséquence** : Soit f et g deux fonctions définies et continue sur un même intervalle I et dérivable sur l'intérieur de cet intervalle. Si $\forall x\in\mathring{I}, f'(x)=g'(x)$ alors il existe une constante réelle c telle que : $\forall x\in I, f(x)=g(x)+c$.

24 **Exemple :** Montrons que f et g définies par : $f(x)=Arcsin(\sqrt{x})\ et\ g(x)=\ -Arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ont la même dérivée sur $]0,1[$. Qu'en déduit-on ?

$\forall x\in]0,1[, \sqrt{x}\in]0,1[\subset][-1,1]$, donc $f(x)$ existe. De plus, $u:\left(x\mapsto\sqrt{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $]0,1[$ et $\forall x\in]0,1[\,, \sqrt{x}\in]0,1[\subset]-1,1[$. Comme $Arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$, par composition, f est dérivable sur $]0,1[$.

Et $\forall x\in]0,1[\,, f'(x)=u'(x)Arcsin'\left(u(x)\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

$\forall x\in]0,1[, \frac{1-x}{x}\in\mathbb{R}^{+*}$ donc $g(x)$ existe. De plus, $u:\left(x\mapsto\sqrt{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $t:(x\mapsto\sqrt{\frac{1-x}{x}})$ est dérivable sur$]0,1[$ et par suite, g est dérivable sur $]0,1[$. Et $\forall x\in]0,1[\,, g'(x)=-t'(x)Arctan'\left(t(x)\right)=\frac{-t'(x)}{1+t(x)^2}$

Et en posant $s(x)=\frac{1-x}{x}, t'(x)=s'(x)u'\left(s(x)\right)=\frac{s'(x)}{2\sqrt{s(x)}}$ $avec\ s(x)=\frac{1-x}{x}=x^{-1}-1$ donc $s'(x)=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$. Par conséquent,

$$t'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}}=-\frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\overset{\substack{car\ x>0\\ et\ 1-x>0}}{\triangleq}-\frac{1}{2x^2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Par suite, $g'(x)=-t'(x)\times\frac{1}{1+t(x)^2}=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\times\frac{1}{1+\frac{1-x}{x}}=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\times\frac{1}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Ainsi, $\forall x\in]0,1[, f'(x)=g'(x)$. Comme nous travaillons sur l'intervalle $]0,1[$, j'en déduis qu'il existe une constante c réelle telle que $\forall x\in]0,1[, f(x)=g(x)+c$. En particulier, $c=f\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)=Arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+Arctan(\sqrt{1})$.

Or, $Arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=Arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=l'unique\ réel\ de\ \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ dans\ le\ sinus\ vaut\ \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$.

Et, $Arctan(\sqrt{1})=Arctan(1)=l'unique\ réel\ de\ \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ dans\ la\ tangente\ vaut\ 1=\frac{\pi}{4}$.

Ainsi, $c=\frac{\pi}{2}$ et finalement, $\forall x\in]0,1[\,, f(x)=g(x)+\frac{\pi}{2}$ i.e. $\forall x\in]0,1[\,, Arcsin(\sqrt{x})=\frac{\pi}{2}-Arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

25 **Pour s'entrainer pendant les vacances :**

Ex 1 : Donner le domaine de définition Df et l'expression de la dérivée de chacune des fonctions f suivantes en expliquant quelles formules vous appliquez et sur quel domaine D vous avez le droit de l'appliquer . Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'équation de la tangente en a et étudier la dérivabilité en b.

1. $f(x) = \sqrt[4]{x^3 - 5x + 2}$ $b = 2$
2. $f(x) = \frac{7}{x^2} - 10\, e^{\frac{x}{x-1}}$
3. $f\ (x) = xe^{\left(\frac{x}{x^2-1}\right)}$
4. $f(x) = \ln\left(1 + \sqrt{x^2 + 4}\right)$, $a = 0$
5. $f(x) = x\sqrt{2 - cos^2(x)}$, $a = \pi$
6. $f(x) = \frac{1}{(cos^2(3x)+5)^6}$
7. $f(x) = e^{\sqrt{1-4x^2}}$, $a = b = \frac{1}{2}$
8. $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - \tan\left(\frac{5}{x}\right)$
9. $f(x) = \sin\left(e^{e^x}\right)$
10. $f(x) = \ln\left(\ln(\ln(x))\right)$
11. $f(x) = 5 + \ln(x)\sqrt{x^2 - 3x + 2}$
 $a = b = 2$
12. $f(x) = Arcsin(1 - 2x)$, $b = 1$
13. $f(x) = Arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$
14. $f(x) = Arctan\left(\frac{1}{x}\right) + Arctan(x)$
15. $f(x) = Arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, $b = -1.$
16. $f(x) = Arctan(\sin(x)) - Arcsin(\tan(x))$

Ex 2 Déterminer les limites suivantes **:**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$
4. $\lim\limits_{n\to +\infty} 2^n \tan(2^{-n}x)$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{2022} - 1}{x-1}$
6. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x+1}} - e}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x^2-1)\ln(x^2+2) + ln2}{x^2}$
9. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 2}}{\sqrt{x} - 2}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\tan(x)}$
11. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(sinx)(lnx)}$
12. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt[4]{x} - 1}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{Arcsin(x)}$

Ex 3 Calculer $\lim\limits_{X\to 0} \frac{e^X\sqrt{1-X^2} - 1}{X}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2 - 1} - x$.

Ex 4 Soit f la fonction réelle définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ si\ x \in [0,1] \\ ax^2 + bx + 1\ si\ x \in\ ]1,2] \\ \frac{x^3 + 3x^2 - 16x + 12}{x^2 - 4}\ si\ x > 2 \end{cases}$.

1. Déterminer une relation entre $a\ et\ b$ pour que : f soit continue en 1 .
 Désormais $a\ et\ b$ vérifie cette relation.
2. Déterminer $a\ et\ b$ pour que f soit dérivable en 1. Désormais a et b prennent ces valeurs.
3. f est -elle continue ? dérivable en 2 ?
4. En déduire Df' et l'expression de $f'(x)$.

Ex 5 Montrer que pour tout réel $x > 0$, $Arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Ex 6 Chercher une primitive des fonctions suivantes (on ne cherchera aucun domaine) :

1. $f(x) = 7e^{5x} - 4\sqrt[7]{x}$
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $f(x) = \frac{-3}{1+x^2}$
4. $f(x) = \cos(1 - 3x)$
5. $f(x) = \sin(x)\, e^{\cos(x)}$
6. $f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$
7. $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}$
8. $f(x) = \frac{1}{3+4x}$
9. $f(x) = (1 - 2x)^n$ où $n \in \mathbb{N}$
10. $f(x) = \sqrt[n]{x - 5}$ où $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$
11. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$
12. $f(x) = \frac{1}{xln(x)}$
13. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
14. $f(x) = \cos(x)\sin(x)^n$
15. $f(x) = \tan(x)$
16. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}\sqrt[3]{Arctan(x)}$

Reconnaître

$\frac{u'(x)}{u(x)}$

$(\xrightarrow{intègre} ln|u(x)|)$

Ou bien

$u'(x)\left(u(x)\right)^{\alpha}$

avec $\alpha \neq -1$

$(\xrightarrow{intègre} \frac{\left(u(x)\right)^{\alpha+1}}{\alpha + 1})$