Applications linéaires.

Dans tout le chapitre, E et F sont deux K- espaces vectoriels

Les applications linéaires sont des applications entre espaces vectoriels qui vérifient certaines propriétés de conservation des combinaisons linéaires. 1**Rappel :**

1. Une application f de E dans F est **injective** (ou injective sur E)
- lorsque tout élément de F a au plus un antécédent par f dans E .
- lorsque deux éléments de E ayant la même image par f sont égaux
- lorsque deux éléments de E distincts ont deux images distinctes.

2. Une application f de E dans F est **surjective** (ou surjective de E sur F)lorsque tout élément de F a au moins un antécédent par f dans E i.e. lorsque $f(E) = F$.

3. Une application f de E dans F est **bijective** (ou bijective de E sur F)
- lorsque f est injective et surjective de E sur F
- lorsque tout élément de F a exactement un antécédent par f dans E
- lorsqu'il existe une application g de F sur E telle que : $f \circ g = id_F et\ g \circ f = id_E$.

Dans ce cas, on définit $g = f^{-1}: F \to E$ telle que $\forall y \in F, f^{-1}(y) = l'unique\ antécédent\ de\ y\ par f$.

4. Si f est une application de E dans F et A est un sous-ensemble de E et B un sous-ensemble de F alors
- $f(A) = \{f(x)/x \in A\}$ est **l'image directe** de A par f et contient toutes les images par f de tous les éléments de A
- $f^{-1}\langle B\rangle = f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}$ est **l'image réciproque** de B par f et contient tous les antécédents de tous les éléments de B.
- $f_{/A}$, **la restriction de f à A**, est l'application définie sur A par : $\forall x \in A, f_{/A}\,(x) = f(x)$.

I Généralités

1. Définitions

2 **Déf. :** f est une <u>application linéaire</u> de E dans F lorsque

f est une application de E dans F et $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \forall(\alpha,\beta) \in K^2, f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \overset{(*)}{=} \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$.

On dit aussi que f est un <u>morphisme d'espaces vectoriels</u>.

3 **Déf. équivalente :** f est une application linéaire de E dans F **si et ssi**

f est une application de E dans F et $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \forall\alpha \in K, f(\vec{x} + \vec{y}) \overset{(**)}{=} f(\vec{x}) + f(\vec{y})\ et\ f(\alpha\vec{x}) \overset{(***)}{=} \alpha f(\vec{x})$.

4 **Déf. et notation:**
1. Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans E
2. Un **isomorphisme** de E sur F est une application linéaire de E $dans$ F , bijective de E sur F . Lorsqu'il existe un isomorphisme de E sur F , on dit que E et F sont **isomorphes.**
3. Un **automorphisme** de E est un isomorphisme de E sur E.
4. Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E dans K.
5. On note $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .
6. $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ au lieu de $\mathscr{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
7. **Isom$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$** l'ensemble des isomorphismes de E sur F.
8. $\boldsymbol{GL(E)}$ l'ensemble des automorphismes de E dit groupe linéaire.
9. $\boldsymbol{E^*}$ au lieu de $\mathscr{L}(E,K)$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

2. Règles de calcul

5 **Prop. :** Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors

1. $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

2. $\forall\vec{x} \in E, f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$

3. $\forall(\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in K^m, \forall(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m) \in E^m$, $f(\sum_{i=1}^m \alpha_i\vec{u}_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(\vec{u}_i)$.

3. Exemples

6 Exemples de référence

- **l' identité sur E,** $id_E:(\vec{x}\mapsto\vec{x})$, est un automorphisme de E.
- ω : $\begin{pmatrix} E\to F \\ \vec{x}\mapsto\overrightarrow{0_F}\end{pmatrix}\in\mathscr{L}(E,F)$. ω, **l'endomorphisme nul**, est noté 0 ou $0_{\mathscr{L}(E,F)}$.
- $h_\alpha:\begin{pmatrix} E\to E \\ \vec{x}\mapsto\alpha\vec{x}\end{pmatrix}$, **homothétie vectorielle** de rapport $\alpha\in K^*$, est un automorphisme de E de bijection réciproque $h_{\frac{1}{\alpha}}$.
- Soit $A\in M_{n,p}(K)$. $\varphi_M:\begin{pmatrix} M_{p,1}(K)\to M_{n,1}(K) \\ X\mapsto AX\end{pmatrix}$ et $f:\begin{pmatrix} M_{p,q}(\mathbb{R})\ \to\ M_{n,q}(\mathbb{R}) \\ M\mapsto AM\end{pmatrix}$ sont linéraires.
- Soit $A\in M_n(K)$. $\varphi_A:\left(\begin{array}{c} M_{n,1}(K)\to M_{n,1}(K) \\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\mapsto Y=AX=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\end{array}\right)$ est un endomorphisme de $M_{n,1}(K)$.
- Soit $A\in M_n(K)$. $f_A:\begin{pmatrix} K^n\to K^n \\ (x_1,..,x_n)\mapsto(y_1,..,y_n)\end{pmatrix}$ tq $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ est **l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à A.**

  K^n et $M_{n,1}(K)$ sont parfois confondus dans les énoncés ce qui signifie que $(x_1,x_2,..,x_n)$ " = " $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ et φ_M" = "f_M.

7 Exemples déjà rencontrés

- Soit E un K-e-v de dimension n et B une base de E . Δ: $\begin{pmatrix} E\to M_{n,1}(K) \\ \vec{x}\to mat_B\vec{x}\end{pmatrix}$ est un isomorphisme. E et $M_{n,1}(K)$ sont donc isomorphes.
- $f:\begin{pmatrix} M_n(K)\ \to\ K \\ M\ \mapsto tr(M)\end{pmatrix}$ est une forme linéaire sur $M_n(K)$. (la trace est linéaire)
- $f:\begin{pmatrix} M_{p,q}(\mathbb{R})\ \to\ M_{q,p}(\mathbb{R}) \\ M\mapsto M^T\end{pmatrix}$ est un isomorphisme et $f^{-1}=f$. (la transposition est linéaire)
- $u:\begin{pmatrix} C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})) \\ f\mapsto f'\end{pmatrix}\in\mathscr{L}(C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}))$. (la dérivation est linéaire)
- $h:\begin{pmatrix} C^0([0,1],\mathbb{R})\to\mathbb{R}) \\ f\mapsto\int_0^1 f\end{pmatrix}\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})^*$. (l'opérateur intégral est linéaire)
- Soit E le $\mathbb{R}$-e-v des suites réelles convergentes. $h:\begin{pmatrix} E\to\mathbb{R} \\ u\mapsto\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\end{pmatrix}\in E^*$.(l'opérateur « limite » est linéaire)

8 Exercices : 1) Soit $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ définie par :$f((x,y,z,t))=(2x-y+t,y-z,3x-t+2z)$. Montrons que $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3)$

2) Soit h : $\begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ u\mapsto(2u_n-3u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\end{pmatrix}$. Montrons que h *est un endomorphismqe de* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

3) Soit T : $\begin{pmatrix} C^0([0,1],\mathbb{R})\to\ C^1([0,1],\mathbb{R}) \\ f\mapsto T(f):(x\mapsto\int_x^{x^2}f(t)dt)\end{pmatrix}$. Montrons que $T\in\mathscr{L}(C^0([0,1],\mathbb{R}),C^1([0,1],\mathbb{R}))$.

4) Soit φ: $\begin{pmatrix} \mathbb{R}_{2n}[X]\to\mathbb{R}_{2n}[X] \\ P\mapsto X(P(X)-P(1-X))\end{pmatrix}$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

5) $f:\begin{pmatrix} \mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto xy\end{pmatrix}$, $g:\begin{pmatrix} \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}^2 \\ u\mapsto(u_0u_1,u_0+u_1)\end{pmatrix}$, $h:\begin{pmatrix} K[X]\to K[X] \\ P\mapsto P(X)P(1-X)\end{pmatrix}$, $k:\begin{pmatrix} F(\mathbb{R},\mathbb{C})\to\mathbb{C} \\ f\mapsto 2+if(1)\end{pmatrix}$ ne sont pas linéaires.

6) u: $\begin{pmatrix} D^1(\mathbb{R},\mathbb{C})\to F(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ f\mapsto a+f'+if(1)id_{\mathbb{R}}\end{pmatrix}\in\mathscr{L}(D^1(\mathbb{R},\mathbb{C}),F(\mathbb{R},\mathbb{C}))$sietssi $a=0$.

4. Propriété fondamentale

9 Théorème Soit $B=(\vec{e_i})_{i\in I}$ une base de l'espace vectoriel E et $(\vec{y_i})_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F .
Il existe une et une seule application linéaire f de E vers F qui vérifie : $\forall i\in I, f(\vec{e_i})=\vec{y_i}$.

10 En pratique, vous devez être capable de décrire cette unique application linéaire (Cf exercice suivant).

11 Exercice : Soit $f\in\mathscr{L}(M_2(\mathbb{R}),\mathbb{R}^2)$ tq $f\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=(1,0), f\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=(-1,0), f\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=(0,-1)$ *et* $f\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)=(0,1)$.

Déterminer $f\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)$.

12 Exercice : Soit $u=(1,1), v=(2,-1)$*et* $w=(1,4)$. Pour quelles valeurs du réel a, existe-t-il un endomorphisme f de ℝ² tel que : $f(u)=(2,1), f(v)=(1,-1)$*et* $f(w)=(5,a)$?

13 Conséquence fondamentale

1. Toute application linéaire f de E vers F est entièrement déterminée (définie ou décrite) par la donnée des images par f des vecteurs d'une base de E .

2. Si deux applications linéaires de E vers F associent la même image à chaque vecteur d'une base ou d'une simple famille génératrice de E alors ces applications linéaires sont égales (partout !!).

14 **Exercice** : Cherchons tous les endomorphismes de $\mathbb{R}$.

15 **Théorème** Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et $u_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$.
Il existe une et une seule application linéaire u de E vers F telle que : $u_{/E_1} = u_1$ et $u_{/E_2} = u_2$.

II Opérations sur les applications linéaires

1. Opérations dans $\mathscr{L}(E, F)$

16 **Théorème :**

1. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}(E, F)$.
2. Si $g \in \mathscr{L}(F, G)$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$.
3. Si f est un isomorphisme de E sur F alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E .
4. Si f et g sont deux isomorphismes de respectivement E sur F et F sur G alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ est l'isomorphisme réciproque.

Notation : dans $\mathscr{L}(E, F)$, $g \circ f$ est parfois notée gf ....

17 **Théorème :** $(\mathscr{L}(E, F), +, .)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{F}(E, F)$.

18 **Règle de calcul:** Si $\alpha \in K$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ et $(f, h) \in \mathscr{F}(E, F)^2$ alors

1. $g \circ (f + h) = g \circ f + g \circ h$ (NB : l'égalité $(f + h) \circ g = f \circ g + h \circ g$ est vraie même si f, g, h ne sont pas linéaires)
2. $(\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f) = \alpha(g \circ f)$.

2. Opérations dans $\mathscr{L}(E)$

19 **Théorème :**

1. Si f et g sont deux endomorphismes de E et $(\alpha, \beta) \in K^2$ alors $\alpha f + \beta g$ et $f \circ g$ sont des endomorphismes de E.
2. Si f est un automorphisme de E alors f^{-1} est un automorphisme de E.
3. Si f et g sont deux automorphismes alors $f \circ g$ est un automorphisme de E et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
4. $\mathscr{L}(E)$ est stable par composition et combinaison linéaire (addition et multiplication externe) . $\mathscr{L}(E)$ est un K-e-v.
5. $GL(E)$ est stable par composition et passage à l'inverse.

20 **NB :** $GL(E)$ n'est pas stable par $c.l.$ car $\underbrace{id_E}_{\in GL(E)} - \underbrace{id_E}_{\in GL(E)} = \underbrace{0}_{\notin GL(E)}$.

21 **Def.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. $f^0 = id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f^n \circ f = f \circ f^n = f \circ f \circ ... \circ f \in \mathscr{L}(E)$.Les endomorphismes f^n de E sont **les itérés de f** .
2. f est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $f^p = \underbrace{0}_{\substack{endom.\\nul}}$.
3. Soit $P \in K[X]$ tq $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k = a_0 id + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n$.

22 **Règles de calcul :**

1) $\boldsymbol{\forall (f, g, u, v) \in \mathscr{L}(E)^4, \forall (\alpha, \beta, a, b) \in K^4, (\alpha f + \beta g) \circ (au + bv) = \alpha a(f \circ u) + \alpha b(f \circ v) + \beta(g \circ u) + \beta(g \circ v)}$.
2) $\boldsymbol{\forall \alpha \in K, \forall f \in \mathscr{L}(E), \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (\alpha f)^p = \alpha^p f^p \text{ et } id^p = id \text{ et } f^p f^q = f^{p+q} \text{ et } (f^p)^q = f^{pq}}$.
3) Si $P = QB + R$ où $(P, Q, R, B) \in K[X]^4$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ alors $P(f) = Q(f)B(f) + R(f) = R(f) + B(f)Q(f)$.

23 **METHODE- Exemple** : si $f^2 + 2f - 3id = 0$ alors $id = \frac{1}{3}(f^2 + 2f) = \frac{1}{3}(f + 2id) \circ f = f \circ \frac{1}{3}(f + 2id)$ et $j'en$ $conclus$ que f est bijective et $f^{-1} = \frac{1}{3}(f + 2id)$.

24 **Factorisation et binôme de Newton:** Si f et g sont deux endomorphismes de E tels que $\underbrace{f \circ g = g \circ f}_{f \text{ et } g \text{ commutent}}$, alors

1. $\forall (n, m, p, q) \in \mathbb{N}^4, (f \circ g)^n = f^n \circ g^n = g^n \circ f^n$ et $f^m \circ g^p \circ f^n \circ g^q = f^{m+n} \circ g^{p+q} = g^{p+q} \circ f^{m+n}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (f + g)^n = (f + g) \circ (f + g) \circ ... \circ (f + g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{f^k g^{n-k}}_{f \circ f \circ .. \circ f \circ g \circ g \circ ... \circ g}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} - g^{n+1} = (f - g) \circ (\sum_{k=0}^{n} f^k \circ g^{n-k}) = (f - g)(\sum_{k=0}^{n} f^k g^{n-k})$.

25 **Exemple** Soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2 tq : f \circ g = g \circ f$. Alors ,
$(2f - g)^3(5f - 4g) = (8f^3 - 12f^2 g + 6fg^2 - g^3)(5f - 4g) = 40f^4 - 92f^3 g + 78f^2 g^2 - 29fg^3 + 4g^4$.

26 **En particulier,** f et id commutent toujours puisque $f \circ id = f = id \circ f$ donc
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathscr{L}(E)$, $(id + f)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k$ et $id - f^{n+1} = (id - f) \circ (\sum_{k=0}^{n} f^k) = (\sum_{k=0}^{n} f^k) \circ (id - f)$.

III Noyau et image et rang d'une application linéaire

1. Noyau d'une application linéaire.

27**Def.**: Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Le **noyau de f** noté $Ker(f)$ ou $Kerf$ est l'ensemble de tous les antécédents de $\overrightarrow{O_F}$ par f i.e. l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f vaut $\overrightarrow{O_F}$. $Kerf = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \overrightarrow{O_F}\}$.
Autrement dit, $\vec{x} \in Kerf \Leftrightarrow \vec{x} \in E$ et $f(\vec{x}) = \overrightarrow{O_F}$

28**NB :** Être dans le noyau de f, c'est avoir son image par f qui est nulle.

29**Théorème :** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. $Ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E.

30**Def :** Soit $M \in M_{n,p}(K)$. Le **noyau de M** est $Ker(M) = \{X \in M_{p,1}(K) / MX = 0\} = Ker(\varphi_M)$ où $\varphi_M : \begin{pmatrix} M_{p,1}(K) \to M_{n,1}(K) \\ X \mapsto MX \end{pmatrix}$.

31**Conséquence** : Soit $M \in M_n(K)$. M est inversible sietssi $Ker(M) = \{0_{n,1}\}$

2. Image d'une application linéaire

32**Def.** : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. L'**image** de f, notée $Im(f)$ ou Imf , est l'ensemble de toutes les images par f de tous les éléments de E . $Im(f) = \{f(\vec{x}) / \vec{x} \in E\} = \{\vec{y} \in F / \exists \vec{x} \in F ; \vec{y} = f(\vec{x})\} = f(E)$. Autrement dit, $\vec{y} \in Imf \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \vec{y}$.

33**NB** : Être élément de Imf, c'est être une image par f d'un élément de E.

34**Théorème** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de F.

35**Def :** Soit $M \in M_{n,p}(K)$. L'image de M est $Im(M) = \{MX / X \in M_{p,1}(K)\} = Im(\varphi_M)$ où $\varphi_M : \begin{pmatrix} M_{p,1}(K) \to M_{n,1}(K) \\ X \mapsto MX \end{pmatrix}$.

36**Théorème :** Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$et $\mathscr{F}=(\vec{e_i})_{i\in I}$ est une famille génératrice (ou une base) de E alors $f(\mathscr{F})= (f(\vec{e_i}))_{i\in I}$ est une famille génératrice de $Im(f)$.

37**Exemple** : Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par : $f(P) = XP' - P$. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$. Décrire $Im(f)$ et $Ker(f)$.

3. Rang

38 **Def. :** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Le rang de f , notée $rg(f)$, est, par déf°, la dimension de $Im(f)$. Donc, $rg(f) = dim(Im(f))$

39**Prop. :** Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$et $(\vec{e_i})_{i\in I}$ est une famille génératrice de E alors $rg(f) = rg\left((f(\vec{e_i}))_{i\in I}\right) = rg(f(B))$.

40**Prop. :** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors, $rg(f) \leq min(dimE , dimF)$.

41**Théo du rang :** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie alors $rg(f) + \dim(Kerf) = dimE$ **(démo plus tard)**

42**Exercice :** Soit E un K-e-v de dimension 4 rapporté à la base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$. Soit l'endomorphisme f de E tel que :
$f(\vec{a}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, $f(\vec{b}) = \vec{a} + \vec{d}$, $f(\vec{c}) = \vec{a} + \vec{d}$ et $f(\vec{d}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$. A-t-on $Ker(f) \oplus Im(f) = E$?

4. Noyau et image d'une composée d'applications linéaires ou des itérés d'un endom.

43**A savoir justifier :** Soit $g \in \mathscr{L}(F,G)$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors,

1. $g \circ f = \underbrace{0}_{\substack{endom. \\ nul}}$ si et ssi $Im(f) \subset Ker(g)$.
2. $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$ et $Im(g \circ f) \subset Im(g)$.

44**A savoir démontrer :** Pour tout endomorphisme f de E et tout entier naturel k,

1. $Ker(f^k)$ et $Im(f^k)$ sont des ss-e-v de E.
2. $Ker(f^k) \subset Ker(f^{k+1})$ et $Im(f^{k+1}) \subset Im(f^k)$. On dit que les deux suites de ss-e-v de E: $(Im(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$et $(Ker(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$sont respectivement décroissante et croissante au sens de l'inclusion.
3. Si E est de dimension finie alors ces deux suites de ss-e-v de E sont (stationnaires) constantes à partir d'un même rang.
4. $f^2 = 0$ si et ssi $Imf \subset Kerf$.

5. Généralisation : image directe ou réciproque d'un ss-e-v par une application linéaire.

45Prop. : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$
1. Si G est un ss e v de F alors $f^{-1}\langle G\rangle$, l'ensemble de tous les antécédents par f des éléments de G, est un ss e v de E
2. Si H est un ss e v de E alors $f(H)$, l'ensemble de toutes les images par f des éléments de H, est un ss e v de F.

46NB : si $G = \{\overrightarrow{O_F}\}$ alors $f^{-1}\langle G\rangle = Ker(f)$ et si $H = E$ alors $f(H) = Im(f)$.

47Def. : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et H un ss e v de E (alors $f(H)$ est un ss e v de E).
On dit que H est stable par f lorsque $f(H) \subset H$ i.e. lorsque $\forall \vec{x} \in H, f(\vec{x}) \in H$ et dans ce cas, $f_H : \begin{pmatrix} H \to H \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de H appelé l'endomorphisme induit par f sur H.

48Exercice : Soit $u: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par : $u(P) = X^2P' - 6XP$. Montrer que u induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_6[X]$.

49A savoir démontrer : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in K$.
Alors, $f - \lambda id_E$ est un endomorphisme de E et $Ker(f - \lambda id_E) = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$ et $Ker(f - \lambda id_E)$ est stable par f.
Enfin, l'endomorphisme f_λ de $Ker(f - \lambda id_E)$ induit par f est l'homothétie de rapport λ.

50NB : Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et $u_1 \in \mathscr{L}(E_1)$ et $u_2 \in \mathscr{L}(E_2)$. Alors E_1 et E_2 sont stables par l'unique endomorphisme u de E vérifiant : $u_{/E_1} = u_1$ et $u_{/E_2} = u_2$.

IV Application linéaire injective et / ou surjective. Isomorphisme.

1. Injectivité

51Théo : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.Alors, f injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{\overrightarrow{O_E}\}$.
Autrement dit, une application linéaire est injective si et ssi son noyau ne contient que le vecteur nul.

52Exemple : $f: (P \mapsto P(X+1) - P(X))$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}$[X] non injectif car $1 \in Ker(f)$ donc $Ker(f) \neq \{O\}$. Rappel : $Ker(f) = \mathbb{R}_0[X]$.
53Exercice : Montrons que l'endomorphisme f : $(P \mapsto \alpha P - XP')$ de $\mathbb{R}$[X] est injectif sietssi $\alpha \notin \mathbb{N}$.

54Prop. : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors,
1) f est injective $\Longrightarrow$ pour toute famille libre $(\overrightarrow{u_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ de vecteurs de E,$\left(f(\overrightarrow{u_i})\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille libre de vecteurs de F.
2) Si E de dimension finie et admet une base $(\overrightarrow{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ alors
f est injective $\Leftrightarrow$ $\left(f(\overrightarrow{e_i})\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille libre.
$\Leftrightarrow rg(f) = dimE$.

55Exercice : Montrons que l'endomorphisme f : $(P \mapsto P + P')$ de $\mathbb{R}_n$[X] est injectif.

2. Surjectivité

56Théorème : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. f surjective $\Leftrightarrow Imf = F$

Exerice : Soit $u: C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mapsto C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par : $\forall f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), u(f)$ est la primitive de f qui s'annule en 0. Montrer que u est injectif mais n'est pas surjective de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sur $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

57Prop. : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
1) Si $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ est une famille génératrice de E alors, f surjective de E sur $F \Leftrightarrow (f(\vec{e}_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F .
2) Si F est de dimension finie alors, f est surjective de E sur $F \Leftrightarrow rg(f) = \dim(F)$.

58Exercice : Montrer que $f: (x(x,y,z) \mapsto (x+y, 2z-x))$est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ surjective mais non injective. Donner une base de $Ker(f)$.
59Exercice : Montrer qu'une forme linéaire est surjective sietssi une de ses images est non nulle.

3.Isomorphisme

60Théo. : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
1. f est un isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow Kerf = \{\overrightarrow{O_E}\} et$ $Imf = F$.
2. Si E est de dimension finie et $(\vec{e}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E alors
f est un isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow \left((f(\vec{e}_i)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est base de F $\Leftrightarrow \dim(E) = rg(f) = dim(F) < +\infty$.

61Exercice : Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $P = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$.

62Conséquence 1: Un isomorphisme de E sur F envoie toute base de E sur une base de F. Et l'ensemble des antécédents des vecteurs d'une base de F par un isomorphisme de E sur F est une base de E.

63NB : Cette conséquence fournit un autre moyen de montrer qu'une famille est une base.

64Exercice : Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $X_k = ({a_0}^k, {a_1}^k, \dots, {a_n}^k) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1. En utilisant la base de Lagrange associée à $a_0, a_1, \dots, a_n$, montrer que $f: \begin{pmatrix} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1} \\ P \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme.
2. En déduire que la famille $(X_k)_{k=0;;n}$ est libre dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et $V(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ a_1 & a_2 & & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible.

65Conséquence2 : Si E est de dimension finie et E *et* F sont isomorphes, alors F est de dimension finie et $dimE = dimF$.
Plus généralement, E *et* F isomorphes$\Rightarrow dim(E) = dim(F)$(finie ou infinie).

66Exercice : Soit E le ss-e-v de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites p-périodiques. Soit $h: \begin{pmatrix} E \to \mathbb{C}^p \\ u \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) \end{pmatrix}$. Montrons que $h \in Isom(E, \mathbb{C}^p)$. En déduire $dimE$.

67Conséquence Si E *et* F sont de dimensions différentes alors il n'existe aucun isomorphisme *de* E *sur* F
et plus précisément,
si $\dim(E) > \dim(F)$ alors il n'existe aucune application linéaire injective de E *vers* F .
si $\dim(E) < \dim(F)$ alors il n'existe aucune application linéaire surjective de E *sur* F .

68 « Réciproque » : Si $dimE = dimF < +\infty$ alors E *et* F sont isomorphes. (faux si $dimE = dimF = +\infty$).

69Caractérisation des isomorphismes en dimension finie :
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.**Si E *et* F sont de même dimension finie** alors :
f est un isomorphisme de E *sur* F
$\Leftrightarrow f$ injective
$\Leftrightarrow f$ surjective de E *sur* F
$\Leftrightarrow rgf = dimE(= dimF)$

70Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = (1 - nX)P(X) + X^2P'(X)$. Montrer que $\varphi_n \in GL(\mathbb{R}_n[X])$.

71Théorème du rang : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Si G est un supplémentaire de $Ker(f)$ dans E alors Imf *et* G sont isomorphes.
En conséquence : **Si E est de dimension finie** alors $\boldsymbol{rg(f) + dim(Kerf) = dim(E)}$

72Prop. : Soit E *et* F deux K-e-v de même dimension.
1) Si f est un isomorphisme de E sur F et H est un ss-e-v de E alors $f(H)$ *et* H ont la même dimension .
2) Si f est un isomorphisme de E sur F *et* G est un ss-e-v de F alors $f^{-1}\langle G \rangle = f^{-1}(G)$ *et* $f^{-1}(G)$ *et* G ont la même dimension .

73Propriété du rang . Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ *et* $f \in \mathscr{L}(F,G)$ *et* $h \in \mathscr{L}(G,E)$
1) Si g est un isomorphisme de F sur G alors $rg(g \circ f) = rg(f)$.
2) Si h est un isomorphisme de G *sur* E alors $rg(f \circ h) = rg(f)$.
Autrement dit , le rang est invariant par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.
1) $rg(g \circ f) \leq \min(rg(f), rg(g))$.

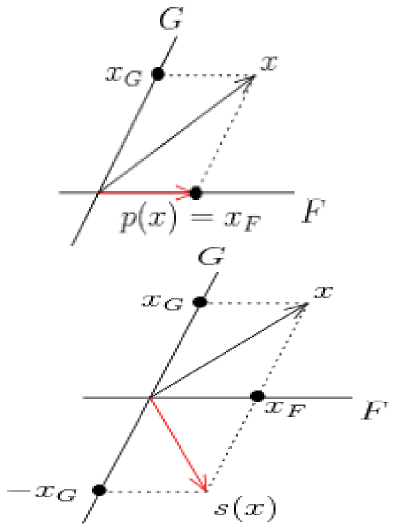
74NB : ce résultat rappelle le résultat sur les matrices : le rang d'une matrice est inchangé lorsqu'on la multiplie par une matrice inversible.

VI Projection et symétrie vectorielles.

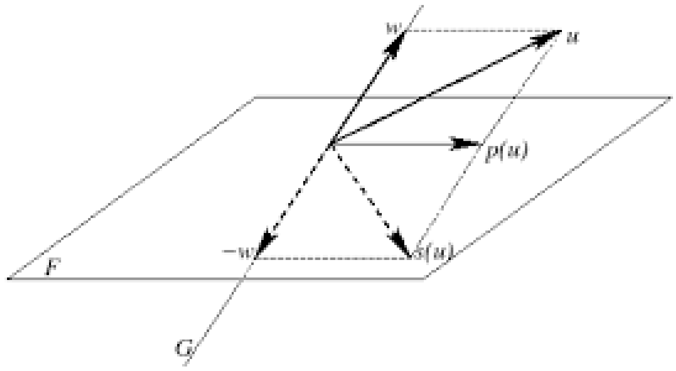
75Déf. : Soient $\boldsymbol{E}$ un $\boldsymbol{K}$-e-v et $\boldsymbol{F}$ *et* $\boldsymbol{G}$ deux ss e v de $\boldsymbol{E}$ supplémentaires dans $\boldsymbol{E}$.
Pour chaque $\vec{x} \in E$, $\exists! (\overrightarrow{x_F}, \overrightarrow{x_G}) \in F \times G$ / $\vec{x} = \overrightarrow{x_F} + \overrightarrow{x_G}$, on pose alors $p(\vec{x}) = \overrightarrow{x_F}$ et $q(\vec{x}) = \overrightarrow{x_G}$ et $s(x) = \overrightarrow{x_F} - \overrightarrow{x_G}$
L'application p ainsi définie est appelée la **projection vectorielle** sur F parallèlement à G (ou de direction G) et q est la projection sur G de direction F. Les projections p *et* q sont dites associées à la somme directe $F \oplus G = E$.
L'application s ainsi définie est appelée la **symétrie vectorielle** par rapport à F parallèlement à G (ou de direction G) .
$p(\vec{x})$ est le **projeté** de $\vec{x}$ sur F parallèlement à G et $q(\vec{x})$ est le projeté de $\vec{x}$ sur G parallèlement à F.
$s(\vec{x})$ est le **symétrique** de $\vec{x}$ sur F parallèlement à G
L'espace F sur lequel p projette et l'espace G parallèlement auquel p projette sont les **éléments caractéristiques** de p , de q et de s .

76 **Illustration :**

En dimension 2 :



En dimension 3 :



77 **Propriétés :** Soient $\boldsymbol{E}$ un $\boldsymbol{K}$-e-v et $\boldsymbol{F}$ ***et*** $\boldsymbol{G}$ deux ss e v de $\boldsymbol{E}$ supplémentaires dans $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{p}$ ***et*** $\boldsymbol{q}$ les projections associées à la somme et $\boldsymbol{s}$ la symétrie vectorielle par rapport à $\boldsymbol{F}$ parallèlement à G directe $\boldsymbol{F} \oplus \boldsymbol{G} = \boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{p}$ projection sur $\boldsymbol{F}$ parallèlement à $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{g}$ projection sur $\boldsymbol{G}$ parallèlement à $\boldsymbol{F}$. Alors,

1. $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = p(\vec{x}) + q(\vec{x})$ est la décomposition de $\vec{x}$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
2. $p + q = Id_E$ et $s = p - q = 2p - Id_E = Id_E - 2q$.
3. p , q et s sont des endomorphismes de E. p est l'unique endomorphisme de E tel que $p_{/F} = Id_F$ et $p_{/G} = 0_{\mathscr{L}(G)}$ et s est l'unique endomorphisme de E tel que $s_{/F} = Id_F$ et $s_{/G} = -Id_G$
4. $q \circ p = 0$ (et $p \circ q = 0$)
5. $p^2 = pop = p$ (et $q^2 = q \circ q = q$) et $s \circ s = Id_E$
6. $F = Im(p) = Ker\ (p - Id) = \{vecteurs\ fixes\ par\ p\} = Ker(q)$ et $G = Ker(p) = Im(q)$
7. $F = Ker\ (s - Id_E) = \{vecteur\ fixes\ par\ s\}$ et $G = Ker(s + Id_E) = \{\vec{x} \in E / s(\vec{x}) = -\vec{x}\}$
8. $Im(p) \oplus Ker(p) = E$ (et $Imq \oplus Kerq = E$) et $Ker\ (s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E) = E$

NB : si $\boldsymbol{p}$ est une projection alors $\boldsymbol{p}$ est la projection sur $\boldsymbol{Imp}$ et parallèlement à $\boldsymbol{Kerp}$: $\boldsymbol{Imp}$ et $\boldsymbol{Kerp}$ sont les éléments caractéristiques de la projection $\boldsymbol{p}$. Si $\boldsymbol{s}$ est une symétrie alors $\boldsymbol{s}$ est la projection par rapport à $\boldsymbol{Ker\ (s - Id_E)}$ et parallèlement à $\boldsymbol{Ker\ (s + Id_E)}$: $\boldsymbol{Ker\ (s - Id_E)}$ et $\boldsymbol{Ker\ (s + Id_E)}$ sont les éléments caractéristiques de la symétrie $\boldsymbol{s}$.

78 **Caractérisation** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors,

1. f est une projection (0)
$\Leftrightarrow$ f est la projection sur $Im(f)$ et parallèlement à $Ker(f)$ (1)
$\Leftrightarrow$ $fof = f$ (2)
$\Leftrightarrow$ $Imf \oplus Kerf = E$ et $\forall \vec{y} \in Imf, f(\vec{y}) = \vec{y}$ $(ie.\ f_{Im(f)} = id_{Im(f)})$. (3)

2. f est une symétrie (0)
$\Leftrightarrow$ f est la symétrie par rapport à $Ker\ (f - Id_E)$ et parallèlement à $Ker(f + Id_E)$ (1)
$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}(f + id_E)$ est une projection (2)
$\Leftrightarrow$ $fof = Id_E$ (3)
$\Leftrightarrow$ $Ker\ (f - Id_E) \oplus Ker(f + Id_E) = E$. (4)

VII Formes linéaires et hyperplans.

79 **Rappel-Def** : Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans K. E^*est l'ensemble des formes linéaires sur E.

80 **Def** : Un hyperplan de E est un ss-e-v de E lorsque H admet une droite vectorielle comme supplémentaire dans E.

81 **Théorème** : Soit H un ss-e-v de E.
H est hyperplan de $E \Leftrightarrow$ tout vecteur $\vec{u} \in E \backslash H$ vérifie : $vect(\vec{u}) \oplus H = E \Leftrightarrow H$ est le noyau d'une forme linéaire.

82Théorème : On suppose que E est de dimension finie et $B = (\vec{e}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E.
H est un hyperplan de $E \Leftrightarrow dimH = (dimE) - 1$
$\Leftrightarrow$il existe $a_1, a_2, \dots, a_n$ des scalaires non tous nuls tels que $H = \{\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \,/\, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i a_i = 0}_{\substack{\text{équation} \\ \text{de } H \text{ dans } B.}}\}$.

VIII Equations linéaires.

83Introduction :

1. Soit $A \in M_{n,p}(K)$ et $B \in M_{n,1}(K)$ et (S) le système d'équations linéaires : $AX = B$ où $X \in M_{p,1}(K)$est l'inconnue. Soit $\varphi_A : (X \mapsto AX)$. $\varphi_A$est linéaire et $(S) : \varphi_A(X) = B$ et $(SH) : \varphi_A(X) = 0$. Donc, $Sol(SH) = Ker(\varphi_A)$.Et lorsque (S) est compatible, les solutions de (S) sont sommes d'une solution de (SH) et d'une solution particulière de (S) i.e. sommes d'un vecteur de $Ker(\varphi_A)$ et d'une solution particulière de (S).

2. Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle I et (E): $y' + a(x)y = b(x)$. Soit φ: $\begin{pmatrix} C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ y \mapsto y' + ay \end{pmatrix}$. Alors $Ker(\varphi) = Sol(EH)$ et $Sol(E) = \{f_0 + h /\ h \in Ker(\varphi)\}$où f_0 est une solution particulière de (E).

84Prop. : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\vec{b} \in F$. Notons (e) l'équation $f(\vec{x}) = \vec{b}$ d'inconnue $\vec{x} \in E$. f étant linéaire, (e) est une équation linéaire. On note (eh) l'équation $f(\vec{x}) = \vec{0}_F$ d'inconnue $\vec{x}$ élément de E, équation homogène associée à (e).
Alors, $Ker(f)$ est l'ensemble des solutions de (eh).
Ou bien, $\vec{b} \in Im(f)$. Alors (e) admet une solution particulière $\vec{v}$et les solutions de (e) sont les vecteurs $\vec{v} + \vec{h}$tels que $\vec{h} \in Ker(f)$ ie. les solutions de (e)*sont tous* les vecteurs sommes d'une solution particulière $\vec{v}$et d'une solution de l'équation linéaire homogène associée à (e).
Ou bien, $\vec{b} \notin Im(f)$. Alors (e) n'a pas de solution.

85Applications aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants:
Soit a et b deux réels et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et E l'ensemble des suites réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$.
Notons H l'ensemble des suites h réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$.

Démontrons les deux résultats suivants admis dans le chapitre « Suites particulières ».

1) S'il existe une suite t telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+2} + at_{n+1} + bt_n = v_n$ alors $E = \{v + h/h \in \text{Ker }(\varphi)\}$ i.e. les suites réelles u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$ sont les suites sommes de t et d'une suite élément de H.
2) $H = \{\alpha(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta\,(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}/(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$ *si* $\Delta_{(e.c)} > 0$ et r_1 *et* r_2 *sol° distinctes de* $(e.c)$. .
$H = \{(\alpha + \beta n)\,(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}/(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$ *si* $\Delta_{(e.c)} = 0$ et r_0 *sol° de* $(e.c)$..
$H = \{(\alpha\cos(n\theta) + \beta\,\sin(n\theta))\rho^n/(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$ *si* $\Delta_{(e.c)} < 0$ *et* $r_1 = \rho e^{i\theta}$ *sol° de* $(e.c)$.

1) Soit φ: $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u \mapsto (u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{pmatrix}$. Alors E est l'ensemble des suites réelles u solutions de $\varphi(u) = v$ et $H = Ker(\varphi)$.
Montrons que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

$$\begin{aligned}\forall (u,z) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2, \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \varphi(\alpha u + \beta z) &= \big((\alpha u_{n+2} + \beta z_{n+2}) + a(\alpha u_{n+1} + \beta z_{n+1}) + b(\alpha u_n + \beta z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (\alpha u_{n+2} + a\alpha u_{n+1} + b\alpha u_n + \beta z_{n+2} + a\beta z_{n+1} + b\beta z_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (\alpha u_{n+2} + a\alpha u_{n+1} + b\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\beta z_{n+2} + a\beta z_{n+1} + b\beta z_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \alpha(u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta\,(z_{n+2} + az_{n+1} + bz_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(z)\end{aligned}$$

Donc, $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Ainsi, E est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire. D'après le théorème précédent, on peut donc affirmer que : si E est non vide i.e. il existe une suite t telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+2} + at_{n+1} + bt_n = v_n$ alors $E = \{v + h/h \in \text{Ker }(\varphi)\}$ i.e. les suites réelles u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$ sont les suites sommes de t et d'une suite élément de H .

Je vais trouver la dimension de H sans et pour trouver une base de H en utilisant un isomorphisme.

2) Donnons une base et la dimension de H.

- Tout d'abord H est un ss-e-v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *car* $H \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et la suite nulle est élément de H et *si h et g* sont deux suites de H et x et y deux réels alors $\forall n \in \mathbb{N}, (x\,h_{n+2} + yg_{n+2}) + a(xh_{n+1} + yg_{n+1}) + b(xh_n + yg_n) = x\,\underbrace{(h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n)}_{=0} + y\underbrace{(h_{n+2} + ag_{n+1} + bg_n)}_{=0} = 0$; donc $xh + yg \in H$.
- Pour trouver la **dimension et une base** on va construire un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur H.

Soit $\Gamma: H \to \mathbb{R}^2$définie par : $\Gamma(h) = (h_0, h_1)$.
Γ est bien définie et linéaire car *si h et g* sont deux suites de H et x et y deux réels alors $\Gamma(xh + yg) = (xh_0 + yg_0, xh_1 + yg_1) = (xh_0, xh_1) + (yg_0, yg_1) = x(h_0,h_1) + y(g_0,g_1) = x\Gamma(h) + y\Gamma(g)$.
Γ est bijective car $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *il existe une et une seule suite h telle que* : $h_0 = a, h_1 = b$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$.
Ainsi,Γ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur H. Donc, $dimH = dim\mathbb{R}^2 = 2$. Donc, une base de H est une famille libre formée de deux vecteurs de H.

- Cherchons les suites géométriques complexes NON NULLES vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$. Soit $r \in \mathbb{C}^*$.

$(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (r^2 + ar + b)\underbrace{r^n}_{\neq 0 \text{ car } r\neq 0} = 0 \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$

Ainsi, $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \Leftrightarrow r$ *sol°de* $ax^2 + bx + c = 0$.

- Posons $(e.c): ax^2 + bx + c = 0$.

Ou bien $\Delta_{(e.c)}>0$. Alors $(e.c)$ a deux solutions réelles distinctes : r_1 et r_2 et alors les suites géométriques $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$sont éléments de H . Comme $r_1 \neq r_2$, $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre et ainsi, $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de H. En particulier, les suites éléments de H sont toutes les $c.l.$ de $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ou bien $\Delta_{(e.c)}=0$. Alors $(e.c)$ a une seule solution : le réel $r_0=-\frac{b}{2a}$ et H ne contient qu'une seule suite géométrique non nulle : $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que $(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}\in H$. $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$(n+2){r_0}^{n+2}+a(n+1){r_0}^{n+1}+bn{r_0}^n=(n+2){r_0}^{n+2}+a(n+1){r_0}^{n+1}+bn{r_0}^n=n{r_0}^n\left[\underbrace{r_0^2+ar_0+b}_{=0}\right]+{r_0}^n\left[\underbrace{2ar_0+b}_{=0}\right]=0.$$

Donc, $(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}\in H$.

Montrons que $((nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. $\alpha(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}+\beta(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}=0\Leftrightarrow\forall n,\alpha nr_0^n+\beta r_0^n=0\underbrace{\Rightarrow}_{pour\ n=0\ puis\ 1}\beta=0\ et\ (\alpha+\beta)\underbrace{r_0}_{\neq0}=0\Rightarrow\alpha=\beta=0.$

Ainsi, $((nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre et maximale dans H donc est une base de H. En particulier, les suites éléments de H sont toutes les $c.l.$ de $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ou bien $\Delta_{(e.c)}<0$. Alors $(e.c)$ a deux solutions complexes conjuguées et non réelles : r_1 et r_2 et alors les suites géométriques $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$sont complexes et vérifient : $\forall n\in\mathbb{N},r^{n+2}+ar^{n+1}+br^n=0$. Posons, $r_1=\rho e^{i\theta}$. On a donc,

$\forall n\in\mathbb{N},\rho^{n+2}e^{i(n+2)\theta}+a\rho^{n+1}e^{i(n+1)\theta}+b\rho^ne^{in\theta}=0$ i.e.

$\forall n\in\mathbb{N},\rho^{n+2}(\cos((n+2)\theta)+isin((n+2)\theta))\ +a\rho^{n+1}(\cos((n+1)\theta)+isin((n+1)\theta)))\ +b\rho^n(\cos(n\theta)+isin(n\theta))=0+i0.$

Donc, par unicité des parties réelle et imaginaire du complexe nul,

$\forall n\in\mathbb{N},\rho^{n+2}\cos((n+2)\theta)+a\rho^{n+1}\cos((n+1)\theta)+b\rho^n\cos(n\theta)=0$ et

$\rho^{n+2}sin((n+2)\theta)+a\rho^{n+1}sin((n+1)\theta)+b\rho^nsin(n\theta)=0$.

Donc, les suites $(\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}et\ (\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ sont éléments de H.

Montrons que $((\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}},(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}})$est libre.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. $\alpha(\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}+\beta(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}=0\Leftrightarrow\forall n,\alpha\rho^n\cos(n\theta)+\beta\rho^n\sin(n\theta)=0$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{pour\ n=0\ puis\ 1}\alpha=0\ et\ \left(\alpha\cos(\theta)+\beta\underbrace{\sin(\theta)}_{\neq0\ car\ r_1\notin\mathbb{R}}\right)\underbrace{\rho}_{\neq0car\ r_1\notin\mathbb{R}}=0\Rightarrow\alpha=\beta=0.$$

Ainsi, $((\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}},(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}})$est une famille libre et maximale dans H et est donc une base de H. En particulier, les suites éléments de H sont toutes les $c.l.$ de $(\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ $et(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>CCL :</u> $H=\{\alpha(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}+\beta\ (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}\ si\ \Delta_{(e.c)}>0$ et $r_1\ et\ r_2\ sol°\ distinctes\ de\ (e.c)$. .

$H=\{(\alpha+\beta n)\ (r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}\ si\ \Delta_{(e.c)}=0$ et $r_0\ \ sol°\ de\ (e.c)$..

$H=\{(\alpha\cos(n\theta)+\beta\ \sin(n\theta))\rho^n/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}\ si\ \Delta_{(e.c)}<0\ et\ r_1=\rho e^{i\theta}\ sol°\ de\ (e.c)$.