

# DL 12

## Exercice

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

Dans  $\mathbb{R}[X]$ , on pose  $P_0 = 1$  et  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_k = \frac{1}{k!} X(X-k)^{k-1}$ .

1. Montrer que  $B = (P_k)_{k=0..n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Montrer que  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, j \rrbracket, P_j^{(k)}(X) = P_{j-k}(X-k)$ .
3. En déduire que  $P_j^{(k)}(k) = 0$  pour tous  $j$  et  $k$  distincts dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ .
4. Déterminer les composantes d'un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans cette base  $B$ .

## PROBLEME

A toute fonction  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on associe la fonction  $T(f)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

**Partie I : Exemples.** Déterminer  $T(f)$  dans les cas suivants

1.  $f(t) = t^2 \cos(t^3 - 1)$
2.  $f(t) = \cos(2t) \sin^3(t)$
3.  $f(t) = t^2 e^{-t}$
4.  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + t + 2}}$

**Partie II : Etude de  $T$  sur  $E_n$ .** Soit  $n$  un entier naturel. On note  $E_n$ , l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $n$ .

1. Donner une base et la dimension de  $E_n$ .
2. Montrer que  $E_n$  est stable par  $T$ . On note  $T_n$  l'endomorphisme de  $E_n$  induit par  $T$ .
3. Montrer que  $T_n$  est un automorphisme de  $E_n$ .
4. Déterminer tous les réels  $\lambda$  tel que l'équation  $T_n(P) = \lambda P$ , d'inconnue  $P \in E_n$ , admette une solution non nulle.
5. Pour chacune des valeurs de  $\lambda$  trouvées précédemment, donner une base de  $\text{Ker}(T_n - \lambda Id)$ .

**Partie III : Etude de  $T$  dans  $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .** Soit  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $T(f)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et est solution sur  $\mathbb{R}^*$  de l'équation différentielle :  $xy' + y = f(x)$  d'inconnue  $y$ .
2. Etudier la continuité de  $T(f)$  en 0.
3. Montrer que  $T$  définit un endomorphisme sur  $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
4. Justifier que  $T$  est injective mais n'est pas surjective.
5. Déterminer  $\text{Ker}(T - \frac{1}{2} Id)$ .