Corrigé DL 11

Partie 2 Pour vendredi 5 avril 2024

10. Soit x, y et z trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = -7x(t) - 8z(t) \\ y'(t) = 4x(t) + y(t) + 4z(t) \\ z'(t) = 4x(t) + 5z(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = -1 \end{cases}$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ $et\ X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ et $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$.

10.1. Justifier que α, β et γ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X'(t)$.

10.2. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = UY(t)$.

10.3. En déduire des expressions de α, β et γ.

10.4. Déterminer enfin les expressions de x, y et z.

10.1. $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} \alpha(t) = -x(t) - z(t) \\ \beta(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ \gamma(t) = -x(t) - 2z(t) \end{cases}$. Alors, comme les fonctions x,y et z sont dérivables sur $\mathbb{R}$, α, β et γ sont aussi dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha'(t) = -x'(t) - z'(t) \\ \beta'(t) = x'(t) + y'(t) + z'(t) \\ \gamma'(t) = -x'(t) - 2z'(t) \end{cases}$ autrement dit, $\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$. Je peux donc conclure que $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.

10.2. On constate que $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$. Or, $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = PY(t)\ et\ X'(t) = PY'(t)$.
Donc $\forall t \in \mathbb{R}, PY'(t) = APY(t)$ et par suite, $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = P^{-1}APY(t) = UY(t)$.

10.3. $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$ donc $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha'(t) = -3\alpha(t) \\ \beta'(t) = \beta(t) \\ \gamma'(t) = \gamma(t) \end{cases}$. Alors en résolvant ces trois équa.diff., je peux conclure que : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha(t) = \alpha(0)e^{-3t} \\ \beta(t) = \beta(0)e^{t} \\ \gamma(t) = \gamma(0)e^{t} \end{cases}$ $avec$ $\begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \beta(0) \\ \gamma(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha(t) = -e^{-3t} \\ \beta(t) = 2e^{t} \\ \gamma(t) = 0 \end{cases}$.

10.4. Alors $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = PY(t)\ i.e.\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-3t} \\ 2e^{t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-3t} \\ -e^{-3t} + 2e^{t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix}$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = 2e^{-3t} \\ y(t) = -e^{-3t} + 2e^{t} \\ z(t) = -e^{-3t} \end{cases}$.

Partie II Etude du commutant.

Pour toute matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$, on note $C(B) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / BM = MB\}$ appelé commutant de B.

11. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$. Nous allons prouver quelques propriétés de $C(B)$.

11.1.1. Donner deux éléments « évidents » de $C(B)$.

11.1.2. Montrer que $C(B)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

11.1.3. Montrer que $C(B)$ est stable par produit matriciel.

11.1.4. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(B) \in C(B)$.

11.1.5. Montrer que $si\ M \in C(B)\ et\ M$ est inversible alors $M^{-1} \in C(B)$ (on dit que $C(B)$ est stable par passage à l'inverse).

11.1.6. Calculer $B\,B^T\ et\ B^T B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. L'ensemble $C(B)$ est-il stable par transposition ?

12. Soit $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ tel que les réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont tous distincts. Soit $M = (m_{ij})$ tel que $M \in C(D)$.

12.1. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Exprimer le coefficient $(MD)_{ij}$ en fonction de m_{ij} et λ_j et le coefficient $(DM)_{ij}$ en fonction de m_{ij} et λ_i.

12.2. En déduire que M est diagonale.

12.3. Montrer que $C(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

13. On s'intéresse désormais au commutant de la matrice A étudiées aux parties I et II .

13.1.1. Prouver que $M \in C(A) \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C(U)$.

13.1.2. Montrer que $C(U) = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} / a,b,c,d,e\ réels\right\}$.

13.1.3. Déterminer une famille génératrice de $C(U)$.

13.1.4. En déduire $C(A)$. On déterminera une famille génératrice de $C(A)$.

11.1. I_n et O_n et B sont des éléments évidents de $C(B)$.

11.2 $C(B) \subset M_n(\mathbb{R})\ et\ C(B) \neq \emptyset$ (d'après 1.1). Soit M et N deux matrices de $C(B)\ et\ a\ et\ b$ deux réels.

$$B(aM + bN) = B(aM) + B(bN) = a(BM) + b(BN) \underbrace{=}_{\substack{car\ M \in C(B) \\ et\ N \in C(B)}} a(MB) + b(NB) = (aM)B + (bN)B = (aM + bN)B.$$

Donc $aM + bN \in C(B)$. Ainsi, $C(B)$ est un ss-e-v de $M_n(\mathbb{R})$.

11.3Soit M et N deux matrices de $C(B)$.

$(MN)B \underset{\substack{\text{car le produit} \\ \text{matriciel est} \\ \text{associatif}}}{\overset{\substack{\text{car le produit} \\ \text{matriciel est} \\ \text{associatif}}}{=}}$ —

$(MN)B \overset{\substack{car\ le\ produit \\ matriciel\ est \\ associatif}}{=} M(NB) \underbrace{=}_{car\ N\in C(B)} M(BN) \overset{\substack{car\ le\ produit \\ matriciel\ est \\ associatif}}{=} (MB)N \underbrace{=}_{car\ N\in C(B)} (BM)N \overset{\substack{car\ le\ produit \\ matriciel\ est \\ associatif}}{=} B(MN)$. Donc $MN \in C(B)$. Ainsi, $C(B)$ est stable par produit matriciel.

11.4 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ $tel\ que\ P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k. Alors\ \ P(B) = \sum_{k=0}^{n} a_k B^k$.

$P(B)B = (\sum_{k=0}^{n} a_k B^k)B = \sum_{k=0}^{n} a_k B^{k+1} = B(\sum_{k=0}^{n} a_k B^k) = BP(B)$. Donc $P(B) \in C(B)$.

11.5 Soit M une matrice inversible de $C(B)$. Alors $MB = BM$ donc $\underbrace{M^{-1}(M}_{=I} B)M^{-1} = M^{-1}(B \underbrace{M)M^{-1}}_{=I}$ et avec l'associativité du produit matriciel et la définition de l'inverse, j'obtiens : $B^{-1}M = MB^{-1}$. Donc $M^{-1} \in C(B)$.

11.6 $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & \\ & \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & \\ & \end{pmatrix}$ Donc $BB^T \neq B^TB$ et ains, $B^T \notin C(B)$ alors que $B \in C(B)$. Donc $C(B)$ n'est pas stable par transposition.

12.Soit $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ tel que les réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont tous distincts. Soit $M = (m_{ij})$ tel que $M \in C(D)$.

12.1. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2. (MD)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}d_{kj} = m_{ij}d_{jj} = m_{ij}\lambda_j$ et $(DM)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}m_{kj} = d_{ii}m_{ij} = \lambda_i m_{ij}$.

12.2. Comme $M \in C(D), \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (MD)_{ij} = (DM)_{ij}$ i.e. $m_{ij}\lambda_j = m_{ij}\lambda_i$ donc $m_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) = 0$. Alors, si $i \neq j$ alors $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ et par suite, $m_{ij} = 0$. Ainsi, M est diagonale.

12.3. D'après 8.2, $C(D)$ ne contient que des matrcies diagonales.

Réciproquement, si $M = diag(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)\ alors\ DM = diag(\lambda_1\beta_1, \lambda_2\beta_2, \dots, \lambda_n\beta_n) = diag(\beta_1\lambda_1, \beta_2\lambda_2, \dots, \beta_n\lambda_n) = MD$ donc $M \in C(D)$. Donc toutes les matrices diagonales sont dans $C(D)$

Ainsi, $C(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

13.On s'intéresse désormais au commutant de la matrice A étudiées aux parties I et II .

13.1 $M \in C(A) \iff MA = AM \iff M(PUP^{-1}) = (PUP^{-1})M \iff P^{-1}(MPU)P^{-1}P = P^{-1}P(UP^{-1}M)P \iff P^{-1}MPU = UP^{-1}MP$
$\iff P^{-1}MP \in C(U)$.

13.2 $C(U) = \left\{M = \begin{pmatrix}a & r & s\\t & b & c\\u & d & e\end{pmatrix} / a,b,c,d,e,r,s,t,u\ réels\ et\ \begin{pmatrix}a & r & s\\t & b & c\\u & d & e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\u & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\u & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & r & s\\t & b & c\\u & d & e\end{pmatrix}\right\}$.

Or, $\begin{pmatrix}a & r & s\\t & b & c\\u & d & e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & r & s\\t & b & c\\u & d & e\end{pmatrix} \iff \begin{cases}-3a = -3a\\ r = -3r\\ s = -3s\\ -3t = t\\ b = b\\ c = c\\ -3u = u\\ d = d\\ e = e\end{cases} \iff r = s = t = u = 0.$

13.3.Donc, $C(U) = \left\{\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & c\\0 & d & e\end{pmatrix} / a,b,c,d,e\ réels\right\} = vect\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}}_{famille\ génératrice\ de\ C(U)}\right)$.

13.4 $M \in C(A) \iff P^{-1}MP \in C(U)$. Donc, $N \in C(U) \iff PNP^{-1} \in C(A)$

Ainsi, $C(A) = \left\{P\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & c\\0 & d & e\end{pmatrix}P^{-1} / a,b,c,d,e\ réels\right\}$

$= \left\{aP\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1} + bP\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1} + cP\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1} + dP\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1} + eP\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}P^{-1} / a,b,c,d,e\ réels\right\}$

$= vect\left(\underbrace{P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}P^{-1}}_{famille\ génératrice\ de\ C(A)}\right)$.