Corrigé du DL 11 .

Limite de $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})_{n\geq 1}$.

A. Première méthode par les polynômes

Soit n un entier strictement positif et $P_n = \frac{1}{2i}[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}]$.

1. Montrer que P_n appartient à $\mathbb{R}[X]$. Préciser le terme dominant de P_n.
2. Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ (dans $\mathbb{R}[X]$) et déterminer sa forme scindée.
3. Montrer qu'il existe un polynôme Q_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) = Q_n(X^2)$.
4. Factoriser Q_n sous forme scindée dans $\mathbb{R}[X]$.
5. Calculer les sommes : $S_n = \sum_{k=1}^{n} cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.
6. Prouver l'inégalité suivante : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{sin^2 x}$.
7. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

8. $\underbrace{P_n =}_{FBN} \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(i)^k X^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-i)^k X^{2n+1-k}\right] = \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(i^k - (-i)^k)X^{2n+1-k}\right] = \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(1-(-1)^k)i^k X^{2n+1-k}\right]$

$P_n = \frac{1}{2i}\left[\sum_{\substack{k=0\\ k impair}}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}2i^k X^{2n+1-k}\right] = \frac{1}{i}\left[\sum_{1\leq 2p+1\leq 2n+1}\binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} X^{1n+1-2p-1}\right] = \frac{1}{i}\left[\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p i X^{2n-2p}\right]$

$P_n = \left[\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p X^{2(n-p)}\right] = \left[\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p X^{2n-2p}\right]$.

J'en déduis que P_n est à coefficients réels (et même entiers) et $deg\, P_n = 2n\ et\ codom(P_n) = \binom{2n+1}{1} = 2n+1$.

9. Soit z un nombre complexe.

$P_n(z) = 0 \Leftrightarrow (z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1} \Leftrightarrow \frac{(z+i)^{2n+1}}{(z-i)^{2n+1}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i}\ est\ racine\ (2n+1)^{\text{ème}}\ de\ l'unité$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,2n]\!], \frac{z+i}{z-i} = e^{2i\frac{k\pi}{2n+1}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,2n]\!], z\left(1 - e^{2i\frac{k\pi}{2n+1}}\right) = (-i)\left(1 + e^{2i\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ l'égalité\\ est\ impossible\\ pour\ k=0}} \exists k \in [\![1,2n]\!], z\left(1 - e^{2i\frac{k\pi}{2n+1}}\right) = (-i)\left(1 + e^{2i\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,2n]\!], z = \frac{(-i)\left(1+e^{2i\frac{k\pi}{2n+1}}\right)}{\left(1-e^{2i\frac{k\pi}{2n+1}}\right)} = \frac{(-i)2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}}{(-2i)\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}} = cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

Or, $\forall k \in [\![1,2n]\!], \frac{k\pi}{2n+1} \in]0,\pi[\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$. De plus, tan est injective sur $]0,\pi[\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$ (puisque strictement croissante et positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et strictement croissante et négative sur $]\frac{\pi}{2},\pi[$). Donc, les réels $\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\ tq\ \in [\![1,2n]\!]$ sont tous distincts et sont donc $2n$ racines distinctes de P_n. Comme $\deg(P_n) = 2n$, ces racines sont toutes simples dans P_n et P_n est scindée sur $\mathbb{R}$: $P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$.

10. $P_n = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p X^{2(n-p)} = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p (X^2)^{(n-p)} = Q_n(X^2)\ avec\ Q_n(X) = \sum_{p=0}^{n}\underbrace{(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}}_{a_{n-p}} X^{(n-p)}$.

$z^2 racine\ de\ Q_n \Leftrightarrow Q_n(z^2) = 0 \Leftrightarrow P_n(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![1,2n]\!], z = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$. Donc les réels $u_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$ tels que $k \in [\![1,2n]\!]$ sont racines de Q_n. Ces racines ne peuvent pas être distinctes car $\deg(Q_n) = n$ donc Q_n a au plus n racines distinctes.

Mais $\frac{1}{\tan\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)^2} = \frac{1}{\tan\left(\pi + \frac{(-k)\pi}{2n+1}\right)^2} = \frac{1}{\tan\left(\frac{(-k)\pi}{2n+1}\right)^2} = \frac{1}{(-\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right))^2} = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$. Donc $u_1 = u_{2n}, u_2 = u_{2n-1}, \ldots, u_{n-1} = u_{2n-(n-1)}$. De plus, tan est strictement croissante et positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], \frac{k\pi}{2n+1} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Donc les réels $u_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$ tels que $k \in [\![1,n]\!]$ sont distinctes. Ainsi les réels $u_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$ tels que $k \in [\![1,n]\!]$ sont n racines distinctes de Q_n. Comme $\deg(Q_n) = n$, les réels $\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$ tels que $k \in [\![1,n]\!]$ sont les seules racines de Q_n et sont toutes simples dans Q_n. Enfin, $codom(Q_n) = codom(P_n) = 2n+1$. Ainsi, $Q_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$.

11. $S_n = \sum_{k=1}^{n} cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = somme\ des\ racines\ de\ Q_n \underbrace{=}_{\substack{où \\ a_{n-p}=(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1} \\ coeff.\ de\ Q_n}} -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{(-1)^1\binom{2n+1}{3}}{(-1)^0\binom{2n+1}{1}} = \frac{\frac{(2n+1)!}{3!(2n-2)!}}{2n+1} = \frac{\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$.

et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)+cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n}\left[1 + \frac{1}{tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right] = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$.

12. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. $\frac{cos^2(x)}{sin^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{sin^2 x} \Leftrightarrow sin^2(x) \leq x^2 \leq tan^2(x) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ \sin(x)\geq 0 \\ et\ \tan(x)\geq 0}} \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.

Or, sin est concave sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et tan est convexe sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$(car $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, sin''(x) = -sin(x) < 0$ et $tan''(x) = 2(1 + tan^2(x))\tan(x) > 0$). Donc sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, la courbe de sin est en-dessous de sa tangente en 0 et la courbe de tan est au-dessus de sa tangente en 0. Ainsi, car $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$et finalement $\frac{cos^2(x)}{sin^2(x)} = cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{sin^2 x}$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, comme $\forall k \in [\![1, n]\!], \frac{k\pi}{2n+1} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq \frac{1}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

Alors, $\sum_{k=1}^{n} cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ i.e. $T_n \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq S_n$. Ainsi, $\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$.

Or, , $\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{2n^2\pi^2}{3(4n^2)} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{2n^2\pi^2}{3(4n^2)} = \frac{\pi^2}{6}$. Donc, les deux suites qui encadrent $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ tendant vers la même limite $\frac{\pi^2}{6}$.J'en conclus que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

B. Deuxième méthode par l'intégration

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

1. Justifier que la suite (S_n) converge.

2. Prouver que si f est une fonction réelle de classe C^1sur $[a, b]$ alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0$

3. Montrer que : $\varphi: \left(t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{\sin(t)} & si\ t \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ 1\ si\ t = 0 \end{cases}\right)$ est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on donnera une expression φ' .

4. Trouver une fonction polynomiale h de degré 2 et telle que $h(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\pi} h(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall t \in [0, \pi], h(t)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right)\varphi\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)$.

6. En déduire que : $S_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{u}{\pi} - 1\right)\varphi(u)\sin((2n+1)u)\,du - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt$.

7. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. $\forall n > 0, S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} > 0$. Donc la suite S est croissante. De plus, $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Donc, $\forall n > 1, \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$. Donc $S_n \leq 2 - \frac{2}{n} \leq 2$. Donc la suite S est majorée. J'en conclus que S est convergente.

2. $Soit\ f$ est une fonction de classe C^1sur $[a, b]$. Soit n entier natruel non nul.

- $\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = \left[f(x)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\frac{-\cos(nx)}{n}dx = \frac{1}{n}f(a)\cos(na) - \frac{1}{n}f(b)\cos(nb) + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx$
  $((\cos(na))_{n\in\mathbb{N}}\ est\ bornée$ donc, $((f(a)\cos(na))_{n\in\mathbb{N}}\ est\ bornée$. De même $((f(b)\cos(nb))_{n\in\mathbb{N}}\ est\ bornée$. De plus, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$.$J'en\ déduis\ que$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}f(a)\cos(na) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}f(b)\cos(nb) = 0$
- $\left|\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx\right| \leq \int_a^b |f'(x)\cos(nx)|\,dx$. Or $|f'(x)\cos(nx)| = |f'(x)||\cos(nx)| \leq |f'(x)|$.

Donc $\int_a^b |f'(x)\cos(nx)|\,dx \leq \int_a^b |f'(x)|\,dx\ et\ aisni\ \left|\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx\right| \leq \underbrace{\int_a^b |f'(x)|\,dx}_{réel\ indépendent\ de\ n}$. Donc

$\left(\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Et par conséquent, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx = 0$.

J'en conclus que $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0$.

3. Appliquons le théorème de caractérisation d'une fonction C^1définie par morceaux.

Posons $g(t) = \frac{t}{\sin(t)}$. g est C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ car $(t \mapsto t)$et$(t \mapsto \sin(t))$ sont de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et sin ne s'annule pas sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Et $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}], g'(t) = \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{\sin(t)^2}$. De plus, $\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(t)} = 1$ et $g'(t) \sim_0 \frac{t - \frac{t^3}{6} - t + \frac{t^3}{2} + o_0(t^3)}{t^2} \sim_0 \frac{\frac{t^3}{3}}{t^2} \sim_0 \frac{t}{3}$ donc, $\lim_{t\to 0} g'(t) = 0$.

Le critère de classe C^1 assure alors que φ est de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi'(t)=\begin{cases}\frac{\sin(t)-t\cos(t)}{\sin(t)^2} & si\ t\in\left]0\ ,\frac{\pi}{2}\right]\\ 0\ si\ t=0\end{cases}$.

4. Je cherche une fonction polynomiale h de degré 2 et telle que $h(0)=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, \int_0^\pi h(t)\cos(nt)\,dt=\frac{1}{n^2}$.

Je cherche donc deux réels a et b tels que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)\,dt=\frac{1}{n^2}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)\,dt=\underbrace{\left[\frac{1}{n}\ (at^2+bt)\sin(nt)\right]_0^\pi}_{=0}-\frac{1}{n}\int_0^\pi(2at+b)\sin(nt)\,dt$

$$=-\frac{1}{n}\left\{\left[(2at+b)\left(-\frac{1}{n}\right)\cos(nt)\right]_0^\pi+\frac{1}{n}\int_0^\pi 2a\cos(nt)\,dt\right\}$$

$$=-\frac{1}{n}\left\{(2a\pi+b)\left(-\frac{1}{n}\right)(-1)^n+\frac{b}{n}+\frac{1}{n}\underbrace{\left[\frac{2a}{n}\sin(nt)\right]_0^\pi}_{=0}\right\}$$

$$=((2a\pi+b)(-1)^n-b)\frac{1}{n^2}$$

Or, $\frac{1}{n^2}=((2a\pi+b)(-1)^n-b)\frac{1}{n^2}\Longleftarrow(2a\pi+b)(-1)^n-b=1\Longleftarrow\begin{cases}2a\pi+b=0\\ b=-1\end{cases}\Longleftarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2\pi}\\ b=-1\end{cases}$.

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*, \int_0^\pi\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\cos(nt)\,dt=\frac{1}{n^2}$ et $h:(t\mapsto\frac{1}{2\pi}t^2-t)$ convient.

5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $t\in]0,\pi]$.

$h(t)\sum_{k=1}^n\cos(kt)=\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\sum_{k=1}^n Re(e^{ikt})=\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)Re(\sum_{k=1}^n e^{ikt})$.

Or, $\sum_{k=1}^n e^{ikt}=\sum_{k=1}^n(e^{it})^k\underbrace{=}_{\substack{car\ t\in]0,\pi].\\ donc\ e^{it}\neq1}}\frac{(e^{it})^n-1}{e^{it}-1}e^{it}=\frac{e^{int}-1}{e^{it}-1}e^{it}=\frac{2i\sin\left(\frac{nt}{2}\right)e^{\frac{int}{2}}}{2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{\frac{it}{2}}}e^{it}=\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)t}$

$\sum_{k=1}^n e^{ikt}=\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}[\cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right)+i\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right)]$.

Donc, $h(t)\sum_{k=1}^n\cos(kt)=\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=t\left(\frac{1}{2\pi}t-1\right)\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=t\left(\frac{1}{2\pi}t-1\right)\frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

$h(t)\sum_{k=1}^n\cos(kt)=\frac{1}{2}t\left(\frac{1}{2\pi}t-1\right)\left[\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-1\right]=\frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\left(\frac{1}{2\pi}t-1\right)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)$

Ainsi, $h(t)\sum_{k=1}^n\cos(kt)=\left(\frac{t}{2\pi}-1\right)\varphi\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)$.

Pour $t=0$, $h(0)\sum_{k=1}^n\cos(k0)=0=\left(\frac{0}{2\pi}-1\right)\varphi(0)\sin\left(\frac{2n+1}{2}0\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{0^2}{2\pi}-0\right)$.

Ainsi, $\forall t\in[0,\pi], h(t)\sum_{k=1}^n\cos(kt)=\left(\frac{t}{2\pi}-1\right)\varphi\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)$.

6. $S_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^n\int_0^\pi h(t)\cos(kt)\,dt\underbrace{=}_{\substack{linéarité\ de\\ l'opérateur\\ intégral}}\int_0^\pi\sum_{k=1}^n h(t)\cos(kt)\,dt$

$$S_n=\int_0^\pi\left(\frac{t}{2\pi}-1\right)\varphi\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt=\int_0^\pi\left(\frac{t}{2\pi}-1\right)\varphi\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt-\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt$$

$$S_n\underbrace{=}_{\substack{CV\\ u=\frac{t}{2}\\ dans\ la\ 1ère\\ inétgrale}}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{u}{\pi}-1\right)\varphi(u)\sin((2n+1)u)\,du-\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt\ .$$

7. Posons $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\left(\frac{u}{\pi}-1\right)\varphi(u)}_{\theta(u)}\sin(nu)\,du$.

La fonction θ , étant le produit de deux fonctions de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, est de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Alors la question permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty}J_n=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b\theta(u)\sin(nu)\,du=0$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty}J_{2n+1}=0$ puisque (J_{2n+1}) est extraite de (J_n).

J'en déduis que $\lim_{n\to+\infty}S_n=-\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\pi}-\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi=-\frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{2}\right]$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{\pi^2}{6}$.