DL 11

Pour vendredi 29 mars 2024

Exercice

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par : $f\big((x, y, z, t)\big) = (x - y + t, z - 2x, z + 2y - t, t + y)$ est bijective et donner une expression de f^{-1}.
2. Déduire du calcul précédent l'inversibilité et l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

PROBLEME :

Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Partie I Puissances et inverse de A par trois méthodes !

1. On pose $V = \frac{1}{4}(A + 3I)$. Calculer V^2 et en déduire V^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On donnera A^n sous la forme d'une combinaison linéaire de V et de I puis sous la forme d'un tableau .
3. Déterminer un polynôme annulateur de A. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
4. Retrouver à l'aide d'une division euclidienne bien choisie, A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.
6. Montrer que $U = P^{-1}AP$ est diagonale et déterminer sa diagonale.
7. En déduire à nouveau A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Montrer que la formule précédente donnant A^n pour $n \in \mathbb{N}$ est valable pour $n = -1$.

Partie II Deux applications .

9. Soit u, v et w trois suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -7u_n - 8w_n \\ v_{n+1} = 4u_n + v_n + 4w_n \\ v_{n+1} = 4u_n + 5w_n \end{cases}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   9.1. Trouver une relation entre A, X_n *et* X_{n+1}.
   9.2. En déduire $X_n$en fonction de A, n *et* X_0.
   9.3. Déterminer des expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.
   9.4. Etudier les limites, si elles existent, des suites u, v et w.

Pour vendredi 5 avril 2024

10. Soit x, y et z trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = -7x(t) - 8z(t) \\ y'(t) = 4x(t) + y'(t) + 4z(t) \\ z'(t) = 4x(t) + 5z(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = -1 \end{cases}$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ *et* $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ et $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$.

   10.1. Justifier que α, β et γ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X'(t)$.
   10.2. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = UY(t)$.
   10.3. En déduire des expressions de α, β et γ.
   10.4. Déterminer enfin les expressions de x, y et z.

Partie III Etude du commutant.

Pour toute matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$, on note $C(B) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / BM = MB\}$ appelé commutant de B.

11. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$. Nous allons prouver quelques propriétés de $C(B)$.

   11.1. Donner deux éléments « évidents » de $C(B)$.
   11.2. Montrer que $C(B)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
   11.3. Montrer que $C(B)$ est stable par produit matriciel.
   11.4. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(B) \in C(B)$.
   11.5. Montrer que *si* $M \in C(B)$ *et* M est inversible alors $M^{-1} \in C(B)$ ($C(B)$ est stable par passage à l'inverse).
   11.6. Comparer $B\,B^T$ *et* $B^T B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. L'ensemble $C(B)$ est-il stable par transposition ?

12. Soit $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ tel que les réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont tous distincts. Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$.
    8.1. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Exprimer les coefficients $(MD)_{ij}$ et $(DM)_{ij}$ en fonction de m_{ij} , λ_j et λ_i.
    8.2. En déduire que si $M \in C(D)$ alors M est diagonale.
    8.3. Montrer que $C(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.
13. On s'intéresse désormais au commutant de la matrice A étudiée dans la partie I.
    13.1. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. Prouver que $M \in C(A) \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C(U)$.
    13.2. Décrire $C(U)$: vous déterminerez une famille génératrice de $C(U)$.
    13.3. En déduire $C(A)$. On déterminera une famille génératrice de $C(A)$.