Corrigé DL 11

Partie 1 Pour vendredi 29 mars 2024

Exercice

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par : $f\big((x,y,z,t)\big) = (x-y+t, z-2x, z+2y-t, t+y)$ est bijective et donner une expression de f^{-1}.
2. Déduire du calcul précédent l'inversibilité et l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Cherchons tous les antécédents de (a,b,c,d) par f i.e. tous les $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$tels que :

$$f\big((x,y,z,t)\big) = (a,b,c,d)$$

$$f\big((x,y,z,t)\big) = (a,b,c,d) \Leftrightarrow (x-y+t, z-2x, z+2y-t, t+y) = (a,b,c,d) \Leftrightarrow (S): \begin{cases} x-y+t=a \\ z-2x=b \\ z+2y-t=c \\ t+y=d \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+t=a \\ z=b+2x \\ z+2y-t=c \\ t=d-y \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{substitution} \begin{cases} x-y+d-y=a \\ z=b+2x \\ b+2x+2y-d+y=c \\ t=d-y \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{échange des lignes}} \begin{cases} x-2y+d=a \\ 2x+3y=c+d-b \\ z=b+2x \\ t=d-y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-2y=a-d \\ 2x+3y=c+d-b \\ z=b+2x \\ t=d-y \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow 3L_1 + 2L_2}} \begin{cases} -7y = 2a-2d-c-d+b = 2a+b-c-3d \\ 7x = 2c+2d-2b+3a-3d = 3a-2b+2c-d \\ z=b+2x \\ t=d-y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{7}[2a+b-c-3d] \\ x = \frac{1}{7}[3a-2b+2c-d] \\ z = b+\frac{2}{7}[3a-2b+2c-d] = \frac{1}{7}[6a+3b+4c-2d] \\ t = d+\frac{1}{7}[2a+b-c-3d] = \frac{1}{7}[2a+b-c+4d] \end{cases}.$$

Donc il existe un unique quadruplet (x,y,z,t) qui vérifie $f\big((x,y,z,t)\big) = (a,b,c,d)$; cet unique antécédent de (a,b,c,d) est $\left(\frac{1}{7}[3a-2b+2c-d], -\frac{1}{7}[2a+b-c-3d], \frac{1}{7}[6a+3b+4c-2d], \frac{1}{7}[2a+b-c+4d]\right)$.

J'en déduis que f est bijective de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}^4$ et pour tout (a,b,c,d) dans $\mathbb{R}^4$,
$f^{-1}\big((a,b,c,d)\big) =$ de $\left(\frac{1}{7}[3a-2b+2c-d], -\frac{1}{7}[2a+b-c-3d], \frac{1}{7}[6a+3b+4c-2d], \frac{1}{7}[2a+b-c+4d]\right)$

On remarque que, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, $(S) \Leftrightarrow M^T X = Y$. Autrement dit, (S) est associé à M^T. Comme (S) admet un unique solution , (S) est de Cramer et par conséquent M^T est inversible. De plus, $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = (M^T)^{-1}Y$. Donc, $(M^T)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Le cours assure alors que $M = (M^T)^T$ est aussi inversible (puisque la transposée d'une matrice inversible est inversible) et
$M^{-1} = ((M^T)^{-1})^T = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

PROBLEME :

Soit $A=\begin{pmatrix}-7&0&-8\\4&1&4\\4&0&5\end{pmatrix}$.

Partie I Puissances et inverse de A par trois méthodes !

1. On pose $V=\frac{1}{4}(A+3I)$. Calculer V^2 et en déduire V^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. En déduire A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$. On donnera A^n sous la forme d'une combinaison linéaire de V et de I puis sous la forme d'un tableau .
3. Déterminer un polynôme annulateur de A. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
4. Retrouver à l'aide d'une division euclidienne bien choisie, A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
5. Montrer que $P=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.
6. Montrer que $U=P^{-1}AP$ est diagonale et déterminer sa diagonale.
7. En déduire à nouveau A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
8. Montrer que la formule précédente donnant A^n pour $n\in\mathbb{N}$ est valable pour $n=-1$.

1.$V=\frac{1}{4}(A+3I)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4&0&-8\\4&4&4\\4&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$.Donc, $V^2=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}=B$. Donc $V^n=\begin{cases}V\ si\ n\geq 1\\I\ si\ n=0\end{cases}$.

2. Alors $A=4B-3I$. Comme I et B commutent , $4B$ et $-3I$ commutent et je peux appliquer la formule de binôme de Newton :

$$A^n=(4V-3I)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(4V)^k(-3I)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k}V^k=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k}V+\binom{n}{0}4^0(-3)^nI$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k}\right]V+(-3)^nI\underbrace{=}_{détails\ (**)}(1-(-3)^n)V+(-3)^nI$$

$(**)\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k}-(-3)^n=(4-3)^n--(-3)^n=1-(-3)^n$.

Donc, $A^n=\begin{pmatrix}-1+2(-3)^n&0&-2(1-(-3)^n)\\1-(-3)^n&1&1-(-3)^n\\1-(-3)^n&0&2-(-3)^n\end{pmatrix}$. OK pour $n=0$ et $n=1$.

3. $A^2=-8B+9I=\frac{-8}{4}(A+3I)+9I=-2A+3I$. Donc $P(X)=X^2+2X-3$ est annulateur de A.

Alors, $\frac{1}{3}(A^2+2A)=I$ et ainsi, $\frac{1}{3}(A+2I)A=I$. Donc A est inversible et $A^{-1}=\frac{1}{3}(A+2I)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5&0&-8\\4&3&4\\4&0&7\end{pmatrix}$.

4.Déterminons le reste de la division euclidienne de X^n par P. Il existe Q et R deux uniques polynômes tels que :
$X^n=P(X)Q(X)+R(X) et \deg(R)<\deg(P)=2$. Donc $R(X)=aX+b$.
$X^n=P(X)Q(X)+aX+b=(X-1)(X+3)Q(X)+aX+b$.

Donc en évaluant en 1 et en -3, j'obtiens : $\begin{cases}1=a+b\\(-3)^n=-3a+b\end{cases}$. Donc : $\begin{cases}a=\frac{1}{4}[1-(-3)^n]\\b=\frac{1}{4}[3+(-3)^n]\end{cases}$.

Ainsi, $X^n=P(X)Q(X)+\frac{1}{4}[1-(-3)^n]X+\frac{1}{4}[3+(-3)^n]$.

Et par conséquent, $A^n=\underbrace{P(A)}_{=0}Q(A)+\frac{1}{4}[1-(-3)^n]A+\frac{1}{4}[3+(-3)^n]I$

Ainsi, $A^n=\frac{1}{4}[1-(-3)^n]A+\frac{1}{4}[3+(-3)^n]I=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4+8(-3)^n&0&-8(1-(-3)^n)\\4(1-(-3)^n)&4&4(1-(-3)^n)\\4(1-(-3)^n)&0&8-4(-3)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2(-3)^n&0&-2(1-(-3)^n)\\1-(-3)^n&1&1-(-3)^n\\1-(-3)^n&0&2-(-3)^n\end{pmatrix}$.

5.Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $et\ Y=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. $PX=Y\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+z=a\\x+y=b\\x-z=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-a-c\\x+y=b\\z=-a-2c\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-a-c\\y=b+(a+c)\\z=-a-2c\end{cases}$. Donc $rg(P)=3$ et P est inversible .

De plus, $PX=Y\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\1&1&1\\-1&0&-2\end{pmatrix}Y$. Donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\1&1&1\\-1&0&-2\end{pmatrix}$. Vérif : $PP^{-1}=I\ OK$

6. $U=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\1&1&1\\-1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&0&-8\\4&1&4\\4&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\1&1&1\\-1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&1\\-3&1&0\\-3&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

7.Alors, $A=PUP^{-1}$ donc $A^n=PU^nP^{-1}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-3)^n&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&-1\\1&1&1\\-1&0&-2\end{pmatrix}$

On retrouve $A^n=\begin{pmatrix}-1+2(-3)^n&0&-2(1-(-3)^n)\\1-(-3)^n&1&1-(-3)^n\\1-(-3)^n&0&2-(-3)^n\end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} -1+2(-3)^{-1} & 0 & -2(1-(-3)^{-1}) \\ 1-(-3)^{-1} & 1 & 1-(-3)^{-1} \\ 1-(-3)^{-1} & 0 & 2-(-3)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\frac{2}{3} & 0 & -2\left(1+\frac{1}{3}\right) \\ 1+\frac{1}{3} & 1 & 1+\frac{1}{3} \\ 1+\frac{1}{3} & 0 & 2+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix} = A^{-1}$. Donc la formule précédente est encore vraie pour $n = -1$.

Partie II Deux applications .

1. Soit u, v et w trois suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -7u_n - 8w_n \\ v_{n+1} = 4u_n + v_n + 4w_n \\ v_{n+1} = 4u_n + 5w_n \end{cases}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
   1.1. Trouver une relation entre A, X_n et X_{n+1}.
   1.2. En déduire $X_n$en fonction de A, n et X_0.
   1.3. Déterminer des expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.
   1.4. Etudier les limites, si elles existent, des suites u, v et w.

1.1 $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7u_n - 8w_n \\ 4u_n + v_n + 4w_n \\ 4u_n + 5w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Donc $X_{n+1} = A\, X_n$.

1.2 Montrons par récurrence sur n que : $X_n = A^n X_0$.
Initialisation : $X_n = I_3 X_0 = A^0 X_0$.
Propagation : Soit n un entier naturel . Supposons que $X_n = A^n X_0$.Alors, $X_{n+1} = A\, X_n = A(A^n X_0) = (AA^n)X_0 = A^{n+1} X_0$.
Conclusion : le théorème de récurrence simple assure alors que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

1.3 Soit n un entier naturel . $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2(-3)^n & 0 & -2(1-(-3)^n) \\ 1-(-3)^n & 1 & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 0 & 2-(-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

Donc, $\begin{cases} u_n = (-1+2(-3)^n)u_0 - 2(1-(-3)^n)w_0 = 2[u_0+w_0](-3)^n - u_0 - 2w_0 \\ v_n = (1-(-3)^n)u_0 + v_0 + (1-(-3)^n)w_0 = -[u_0+w_0](-3)^n + u_0 + v_0 + w_0 \\ w_n = (1-(-3)^n)u_0 + (2-(-3)^n)w_0 = -[u_0+w_0](-3)^n + u_0 + 2w_0 \end{cases}$.

1.4

1er cas $\boldsymbol{u_0 + w_0 = 0}$ $\boldsymbol{i.e.\ w_0 = -u_0}$. Alors les suites u, v et w sont constantes égales à leur limite respective : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -u_0 - 2w_0 = u_0$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = u_0 + v_0 + w_0 = v_0$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = u_0 + 2w_0 = -u_0$.

2ème cas $\boldsymbol{u_0 + w_0 \neq 0}$ $\boldsymbol{i.e.\ w_0 \neq -u_0}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = sgn(u_0+w_0)\infty et$ $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -sgn(u_0+w_0)\infty$ donc la suite u diverge sans limite et il en va de même pour v et w.