DS 6

Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso). Les exercices et problèmes sont indépendants.

QUELQUES CONSIGNES :

- Traitez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. Ils sont indépendants.
- Justifiez toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :

✓ Vous n'avez pas affirmé d'emblée que le résultat à démontrer ou que l'équation à résoudre est toujours vraie…. Lorsque vous souhaitez transformer l'énoncé, raisonnez par équivalence. Lorsque vous résolvez une équation, raisonnez par équivalence.

✓ Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire.

✓ Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, …) sont utilisés et utilisés à bon escient.

✓ La phrase réponse, attendue et soulignée ou encadrée ou surlignée, répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé, n'hésitez pas à en faire part au professeur surveillant (moi !!!).

Exercice 1 Ensemble de triplets

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+2z-3t=0 \end{cases}\}$, $G = \{(a,a,b,b)/a,b \text{ réels}\}$ et $D = vect((1,1,1,1))$.

1. Montrer que F et G sont des ss-e-v de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer la dimension de F et celle de G.
3. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.
4. Montrer que $F = vect\big((-8,1,6,1),(2,1,-2,-1)\big)$.
5. Justifier que D est un ss-e-v de G.
6. Déterminer un supplémentaire D' de D dans G et un supplémentaire H de D dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2 Ensembles de fonctions

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On considère deux réels distincts a et b et les ensembles :

$$F = \{f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})/f(a)=0\} \text{ et } G = \{g \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})/g(b)=0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Déterminer une droite vectorielle H de F.
3. Montrer que $E = H \oplus G$.
4. En déduire que $E = F + G$. F et G sont-ils en somme direct ?
5. Soit n un entier naturel non nul.

On pose $\forall k \in [\![1,n]\!],\ f_k : (x \mapsto (x-a)^k(x-b)^{n+1-k})$ et $g_k : \left(x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{-k}{(x-a)^2}} \ si\ x \neq a \\ 0\ si\ x = a \end{cases}\right)$.

a. Montrer que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une famille de vecteurs de $F \cap G$, libre.

b. Montrer que la famille $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ est une famille de vecteurs de F, libre.

Problème Espaces vectoriels, bases, systèmes linéaires et matrices

On note $H = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} / (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$ et

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2et A^3. En déduire A^n tel que $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{C})$.
3. Déterminer une base de H . (justifier).
4. Montrer que H est stable par produit matriciel et que, <u>dans H</u>, le produit matriciel est commutatif.
5. En utilisant $A^3 + I$, préciser si le produit matriciel, <u>dans H</u> , est intègre.
6. Soit λ un nombre complexe. Montrer que :

le système $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, admet au moins une solution non nulle si et seulement si $\lambda = -1$ ou $\lambda = -j$ ou $\lambda = -j^2$.

7. En déduire que A est inversible.
8. Déterminer :
   - la solution $X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ du système linéaire $AX = -X$ telle que $a_1 = 1$.
   - la solution $X_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ du système $AX = -jX$ telle que $a_2 = 1$
   - la solution $X_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$ du système $AX = -j^2X$ telle que $a_3 = 1$
9. On considère la matrice P carrée d'ordre 3 telle dont la première colonne est X_1, la deuxième colonne est X_2 et la troisième colonne est X_3. Autrement dit $P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.

   On note $\bar{P} = \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ \overline{b_1} & \overline{b_2} & \overline{b_3} \\ \overline{c_1} & \overline{c_2} & \overline{c_3} \end{pmatrix}$.

   a. Justifier que $AP = PA'$.
   b. Calculer $P\bar{P}^T$. En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   c. En déduire une nouvelle expression de A^n tel que $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que cette formule est encore valable pour $n = -1$.
10. On considère l'application $\varphi: \begin{pmatrix} M_3(\mathbb{C}) \to M_3(\mathbb{C}) \\ S \mapsto S' = P^{-1}SP \end{pmatrix}$.
    a. Justifier que φ est bijective et donner un expression de φ^{-1}.
    b. Montrer que $\forall (S,T) \in M_3(\mathbb{C})^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$, $\begin{cases} \varphi(\alpha S + \beta T) = \alpha\varphi(S) + \beta\varphi(T) \\ \varphi(ST) = \varphi(S)\varphi(T) \end{cases}$.
    c. Montrer que $\forall S \in GL_3(\mathbb{C}), \varphi(S^{-1}) = (\varphi(S))^{-1}$.
    d. Soit $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in H$. Déterminer $M' = P^{-1}MP$.
    e. Montrer que $\varphi(H)$ est l'ensemble $D_3(\mathbb{C})$ des matrices diagonales de $M_3(\mathbb{C})$.

FIN.