Méthode pour trouver le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée

A. Les fonctions non définies par morceaux.

3 phases distinctes :

1. **Domaine D où j'ai le droit d'appliquer les formules de dérivation. $D \subset D_c \subset Df$.**
2. **Expression de cette dérivée sur ce domaine D.**
3. **Etude de la dérivabilité de f aux points de $Df \backslash D$ où f est continue.**

1. Première phase : deux situations .

a) Chercher Df. Vous pouvez aussi chercher le domaine de D_c de continuité de f car $Df' \subset D_c$ (théorème 7 interlude2)

b) deux situations possibles :

1ère situation : L'expression de f ne contient que des fonctions dérivables sur leur propre domaine de définition, alors f est dérivable sur Df et par suite, la troisième phase n'existe pas et je peux conclure que $Df' = Df$.

2ème situation : L'expression de f contient des fonctions qui ne sont pas dérivables sur leur propre domaine de définition. Il faut

- identifier clairement ces fonctions et leur domaine de dérivabilité.
- trouver le domaine sur lequel vous pouvez utiliser les formules de dérivation. La situation la plus fréquente : l'expression de f contient $v \circ u$ avec v qui n'est pas dérivable sur tout D_v. Si v est dérivable sur E, il faut trouver les réels x de Df $(ou\ D_c)$ tels que $u(x) \in E$. (théorème 15 interlude 2) . Il faut donc résoudre l'inéquation $u(x) \in E$ d'inconnue $x \in Df$. On trouve alors un domaine D tel que $\forall x \in D, u(x) \in E.$ ATTENTION : après cette étape, je ne peux pas encore savoir qui est $D_{f'}$. On peut juste dire que $D \subset Df'$. Il faut attendre la troisième phase pour conclure.

NB : les fonctions usuelles non dérivables sur leur propre domaine définition sont :
$\sqrt[n]{\ }$, $Arcsin, Arccos, valeur\ absolue$ et $partie\ entière.$

2. Deuxième phase : expression de f' sur D.

a) Identifier clairement les opérations (somme, produit, composée…) entre les fonctions qui constituent f .

b) Donner des noms à des fonctions intermédiaires pour décomposer les calculs.

c) Appliquer pas à pas les formules : organiser votre calcul.

3. Troisième phase : dérivabilité de f aux points de $Df \backslash D$.

En chacun de ces points, j'ai deux options pour étudier la dérivabilité.

1ère option (définition 2 interlude 2)

- Etudier $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Avantage : permet toujours de conclure

Inconvénients : le calcul de limite est souvent plus compliqué…

2ème option (théorème 9 interlude 2)

- Justifier la continuité de f en a.
- Etudier $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$.

Avantages : •le calcul de $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ est souvent plus facile que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. •• Si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie, on gagne la dérivabilité de f en a et aussi la continuité de f' en a.

Inconvénients : si la $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ n'existe pas, alors on ne peut rien conclure et il faut étudier $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

NB : à la fin de cette étape, Df' est l'ensemble D auquel on ajoute les points de $Df \backslash D$ étudiés dans cette troisième phase et en lesquels f est dérivable.

$f : (x \mapsto \sqrt{e^x - 4}\,)$.

•D_f ? $f(x)\ existe \Leftrightarrow e^x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \ln(4) = 2\ln(2)$. Donc $Df = [2\ln(2)\,, +\infty[$.

•D_c ? f est continue sur Df puisque l'expression de f n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

•$D_{f'}$? Dans l'expression de f, seule la fonction racine carrée n'est pas dérivable sur son propre domaine de définition. La fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$. Cherchons donc le domaine D $(\subset\ Df)$ tel que $\forall x \in D, e^x - 4 \in \mathbb{R}^{+*}$. Or, $e^x > 4 \Leftrightarrow x > 2\ln(2)$. Donc $\forall x \in]2\ln(2)\,, +\infty[,\ u(x) = e^x - 4 \in \mathbb{R}^{+*}$. Et par suite, f est dérivable au moins sur $D =]2\ln(2)\,, +\infty[$.

ATTENTION : je ne peux pas encore savoir qui est $D_{f'}$. Je sais que $D \subset D_{f'}$.

Calcul de $f'(x)\ pour\ x \in D$:

$\forall x \in]2\ln(2)\,, +\infty[,\ f(x) = \sqrt{u(x)} = (\sqrt{\ } \circ u)(x)$ avec $u(x) = e^x - 4$.

Donc, $f'(x) = u'(x) \times \frac{1}{2}(u(x))^{\frac{1}{2}-1}$

$\forall x \in]2\ln(2)\,, +\infty[$,

$f'(x) = u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-4}}$.

Etude de la dérivabilité de f aux points de $Df \backslash D$

Etude de la dérivabilité de f en $2\ln(2)$: il s'agit d'étudier l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x \to 2\ln(2)} \frac{f(x)-f(2\ln(2))}{x-2\ln(2)}$

1ère méthode : Revenons à la définition , étudions la limite de $\frac{f(x)-f(2\ln(2))}{x-2\ln(2)}$ quand $x \to 2\ln(2)$.

$\forall x \in]2\ln(2)\,, +\infty[, \frac{f(x)-f(2\ln(2))}{x-2\ln(2)} = \frac{\sqrt{e^x-4}}{x-2\ln(2)} = \frac{\sqrt{e^x-4}}{e^x-4}\frac{e^x-4}{x-2\ln(2)} = \frac{1}{\sqrt{e^x-4}}\frac{e^x-e^{2\ln(2)}}{x-2\ln(2)}$. Or, $\lim\limits_{x \to 2\ln(2)} \frac{1}{\sqrt{e^x-4}} = +\infty$. Et, comme la fonction exponentielle est dérivable en $2\ln(2)$, $\lim\limits_{x \to 2\ln(2)} \frac{e^x-e^{2\ln(2)}}{x-2\ln(2)} = exp'(2\ln(2)) = e^{2\ln(2)} = 4$. par conséquent, $\lim\limits_{x \to 2\ln(2)} \frac{f(x)-f(2\ln(2))}{x-2\ln(2)} = +\infty$.

2ème méthode : f étant continue en $2\ln(2)$ et dérivable au moins sur $]2\ln(2)\,, +\infty[$, je peux utiliser le théorème 9 : j'étudie donc la limite de $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-4}}$ quand $x \to 2\ln(2)$.

Or, $\lim\limits_{x \to 2\ln(2)} \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-4}} = +\infty$. Donc le théorème assure que $\lim\limits_{x \to 2\ln(2)} \frac{f(x)-f(2\ln(2))}{x-2\ln(2)} = +\infty$

j'en conclus que f n'est pas dérivable à $2\ln(2)$ et Cf a une tangente verticale en $A(2\ln(2)\,, 0)$. Et ainsi, $D_{f'} =]2\ln(2)\,, +\infty[$ et $\forall x \in D_{f'}, f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-4}}$.

$f(x)=\sqrt[4]{x^3-5x+2}$ • Df ? $x^3-5x+2 \overset{2\ est\ racine\ évidente}{=} (x-2)(x^2+2x-1)$ $x^3-5x+2=(x-2)(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$ Avec un tableau de signes , j'obtiens : $x^3-5x+2\ge 0 \Leftrightarrow x\in[1-\sqrt{2},2]\cup[1+\sqrt{2},+\infty[$. Ainsi, $Df=[1-\sqrt{2},2]\cup[1+\sqrt{2},+\infty[$. •$D_c$? f est continue sur Df puisque l'expression de f n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition. •$D_{f'}$? Dans l'expression de f, seule la fonction $\sqrt[4]{\ }$ n'est pas dérivable sur son propre domaine de définition : elle n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$. Cherchons donc le domaine D ($\subset Df$) tel que $\forall x\in D, x^3-5x+2\in\mathbb{R}^{+*}$. D^' après l^' étude de Df, Donc $\forall x\in x\in]1-\sqrt{2},2[\cup]1+\sqrt{2},+\infty[$, $u(x)=x^3-5x+2\in\mathbb{R}^{+*}$. Et par suite, f est dérivable au moins sur $D=]1-\sqrt{2},2[\cup]1+\sqrt{2},+\infty[$. Je ne peux pas encore savoir qui est $D_{f'}$. Je sais seulement que $D\subset D_{f'}$.	Calcul de $f'(x)$ pour $x\in D$: $\forall x\in D, f(x)=\sqrt[4]{u(x)}=(u(x))^{\frac{1}{4}}=(\sqrt[4]{\ }\circ u)(x)$ avec $u(x)=x^3-5x+2$. Donc, $f'(x)=u'(x)\times\frac{1}{4}(u(x))^{\frac{1}{4}-1}=u'(x)\times\frac{1}{4}(u(x))^{-\frac{3}{4}}$ $\forall x\in]1-\sqrt{2},2[\cup]1+\sqrt{2},+\infty[$, $f'(x)=u'(x)\times\frac{1}{4\sqrt[3]{u(x)^4}}=\frac{3x^2-5}{4\sqrt[3]{(x^3-5x+2)^4}}$.	Etude de la dérivabilité de f aux points de $Df\backslash D$ Soit $a\in\{2,1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\}$ <u>2ème méthode</u> : f étant continue en a et dérivable au moins sur D , je peux utiliser le théorème 9 : j'étudie donc la limite de $f'(x)=\frac{3x^2-5}{4\sqrt[3]{(x^3-5x+2)^4}}$ quand $x\to a$. Or, $\lim\limits_{x\to a}\frac{3x^2-5}{4\sqrt[3]{(x^3-5x+2)^4}}=\begin{cases}+\infty\ si\ a\in\{2,1+\sqrt{2}\}\\ -\infty\ si\ a=1-\sqrt{2}\end{cases}$. Donc le théorème assure que : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\begin{cases}+\infty\ si\ a\in\{2,1+\sqrt{2}\}\\ -\infty\ si\ a=1-\sqrt{2}\end{cases}$. j'en conclus que f n'est pas dérivable à a et Cf a une tangente verticale en $A(a,0)$. Et ainsi, $D_{f'}=D$ et $\forall x\in D_{f'}, f'(x)=\frac{3x^2-5}{4\sqrt[3]{(x^3-5x+2)^4}}$
$f(x)=\frac{7}{x^2}-10\,e^{\frac{x}{x-1}}$ $Df=\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ f est continue et dérivable sur Df puisque l'expression de f n'est constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de définition. Ainsi, $Df'=Df$.	Calcul de $f'(x)$ pour $x\in Df$: •$f(x)=7g(x)-10\,h(x)$ avec $g(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ et $h(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$. Donc $f'^{(x)}=7g'(x)-10\,h'(x)$ •$g(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ donc $g'(x)=-2x^{-2-1}=-\frac{2}{x^3}$. •$h(x)=e^{\frac{x}{x-1}}=\exp(u(x))\ tq\ u(x)=\frac{x}{x-1}\ dc\ h'(x)=u'(x)e^{u(x)}\ et\ u'(x)=\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$ Finalement, $h'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}e^{\frac{x}{x-1}}$. •Alors, $f'(x)=7\left(-\frac{2}{x^3}\right)-10\frac{-1}{(x-1)^2}e^{\frac{x}{x-1}}$ Ainsi, $\forall x\in Df, f'(x)=\frac{10}{(x-1)^2}e^{\frac{x}{x-1}}-\frac{14}{x^3}$.	
$f(x)=xe^{\left(\frac{x}{x^2-1}\right)}$ •$Df=\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ •f est continue et dérivable sur Df puisque l'expression de f n'est constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de définition. Ainsi, $Df'=Df$.	Calcul de $f'(x)$ pour $x\in Df$: •$f(x)=g(x)\times h(x)$ avec $g(x)=x$ et $h(x)=e^{\left(\frac{x}{x^2-1}\right)}$ Donc $f'(x)=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$ •$g(x)=x\ donc\ g'(x)=1$ • $h(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}=\exp(u(x))\ tq\ u(x)=\frac{x}{x^2-1}$. Donc, $h'(x)=u'(x)e^{u(x)}et\ u'(x)=\frac{(x^2-1)-2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}$. Ainsi, $h'(x)=\frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}e^{\frac{x}{x^2-1}}$. •Alors, $f'(x)=e^{\left(\frac{x}{x^2-1}\right)}+x\frac{(-1-x^2)}{(x^2-1)^2}e^{\frac{x}{x^2-1}}$ $f'(x)=\frac{(x^2-1)^2+(-x-x^3)}{(x^2-1)^2}e^{\frac{x}{x^2-1}}$ $\forall x\in Df, f'(x)=\frac{x^4-x^3-2x^2-x+1}{(x^2-1)^2}e^{\frac{x}{x^2-1}}$.	
$f(x)=Arcsin(1-2x)$ **NB:** $Arcsin$ est définie et continue sur $[-1,1]$ mais dérivable uniquement sur $]-1,1[$. •Df ? $1-2x\in[-1,1]\Leftrightarrow -1\le 1-2x\le 1$ $\Leftrightarrow -2\le -2x\le 0\Leftrightarrow 1\ge x\ge 0$. Donc, $Df=[0,1]$. •D_c ? f est continue sur Df puisque l'expression de f n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition. •$D_{f'}$? Dans l'expression de f, seule la fonction $Arcsin$ n'est pas dérivable sur son propre domaine de définition : elle n'est dérivable que sur $]-1,1[$. Cherchons donc le domaine D ($\subset Df$) tel que $\forall x\in D, u(x)=1-2x\in]-1,1[$.D'après l'étude de Df, je peux affirmer que $\forall x\in]0,1[, 1-2x\in]-1,1[$. Par suite, f est au moins dérivable sur $D=]0,1[$.	Calcul de $f'(x)$ pour $x\in D=]0,1[$ •$f(x)=Arcsin(u(x))$ avec $u(x)=1-2x$. Donc $f'(x)=u'(x)\times Arcsin'(u(x))$ avec $u'^{(x)}=-2\ et\ Arcsin'(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Ainsi, $f'(x)=u'(x)\frac{1}{\sqrt{1-u(x)^2}}=(-2)\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}$ $\forall x\in]0,1[, f'(x)=(-2)\frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}}=\frac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$.	Etude de la dérivabilité de f aux points de $Df\backslash D$ Soit $a\in\{0,1\}$ <u>2ème méthode</u> : f étant continue en a et dérivable au moins sur D , je peux utiliser le théorème 9 : j'étudie donc la limite de $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$ quand $x\to a$. Or, $\lim\limits_{x\to a}\frac{-1}{\sqrt{x-x^2}}=-\infty$. Donc le théorème assure que : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ j'en conclus que f n'est pas dérivable à a et Cf a une tangente verticale en $A(a,0)$. Et ainsi, $D_{f'}=]0,1[$ et $\forall x\in D_{f'}, f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$.

$f(x)=\ln\left(1+\sqrt{x^2+4}\right)$

•Df ? $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+4>0$ donc $\sqrt{x^2+4}$ existe et $\sqrt{x^2+4}>0$ et par suite $1+\sqrt{x^2+4}>1>0$. Donc, $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\in\mathbb{R}$. Ainsi, $Df=\mathbb{R}$.

•Dc ? f est continue sur $Df(=\mathbb{R})$ puisque l'expression de f n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

•$D_{f'}$? Dans l'expression de f, seule la fonction $\sqrt{\ }$ n'est pas dérivable sur son propre domaine de déf° : elle n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$.Or, $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+4>0$. Par conséquent, $\left(x\mapsto\sqrt{x^2+4}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et j'en conclus que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcul de $f'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$

• $f(x)=\ln\left(u(x)\right)$ $avec$ $u(x)=1+\sqrt{x^2+4}$.

Donc $f'(x)=u'(x)ln'\left(u(x)\right)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

$$u(x)=1+\left(t(x)\right)^{\frac{1}{2}}\ avec\ t(x)=x^2+4$$

Donc, $u'(x)=0+\frac{1}{2}t'(x)\left(t(x)\right)^{\frac{1}{2}-1}$ et $t'(x)=2x$.

Alors, $u'(x)=\frac{1}{2}2x(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

Ainsi, $f'(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{1+\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}(1+\sqrt{x^2+4})}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+x^2+4}$.

$f(x)=Arctan\left(\frac{1}{x}\right)+Arctan(x)$

NB: $Arctan$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

•Df ? $Df=\mathbb{R}^*$.

•Dc ? f est continue sur $Df(=\mathbb{R}^*)$ puisque l'expression de f n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

•$D_{f'}$? f est dérivable sur $Df(=\mathbb{R}^*)$ puisque l'expression de f n'est constituée que de fonctions dérivables sur leur propre domaine de définition. j'en conclus que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Calcul de $f'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}^*$.

•$f(x)=g(x)+Arctan(x)$ où $g(x)=Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc $f'(x)=g'(x)+Arctan'(x)=g'(x)+\frac{1}{1+x^2}$

•$g(x)=Arctan\left(u(x)\right)$ $avec$ $u(x)=\frac{1}{x}$

Donc $g'(x)=u'(x)Arctan'\left(u(x)\right)$

vec $u'(x)=\frac{-1}{x^2}$ et $Arctan'(t)=\frac{1}{1+t^2}$.

Alors $g'(x)=\frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=-\frac{1}{1+x^2}$.

•Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}^*, f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=0$.

•En appliquant le théorème 21 , j'en déduis que sur chaque INTERVALLE $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$, la fonction f est constante. Il existe donc deux constantes réelles c et d tq : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, f(x)=c$ et $\forall x\in\mathbb{R}^{-*}, f(x)=d$.

En particulier,

$$c=f(1)=2\underbrace{Arctan(1)}_{\substack{le\ réel\ de\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ \text{dont la tangente vaut 1}}}=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$d=f(-1)=2\underbrace{Arctan(-1)}_{\substack{le\ réel\ de\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ \text{dont la tangente vaut }-1}}=2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}^*, f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\ si\ x>0\\ -\frac{\pi}{2}\ si\ x<0\end{cases}$.

$f(x)=\ln(\ln(\ln(x)))$

•Df ? $f(x)existe \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ \ln(x)>0\\ \ln(\ln(x))>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x>1.\\ x>e\end{cases}$

Donc $Df=]e,+\infty[$

•Dc ? f est continue sur Df puisque son expression …

•$D_{f'}$? f est dérivable sur Df puisque son expression …

Calcul de $f'(x)$

$$f(x)=\ln\left(u(x)\right)\ avec\ u(x)=\ln(\ln(x))$$

Donc $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=u'(x)\times\frac{1}{u(x)}$

Et $u'(x)=ln'(x)ln'(\ln(x))=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln(x)}$.

Donc, $f'(x)=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{u(x)}$

$\forall x\in]e,+\infty[, f'(x)=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{\ln(\ln(x))}$.

$$f(x)=Arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

•Df ? $\forall x\in\mathbb{R}, \sqrt{1+x^2}\geq 1$ donc $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\in]0,1]$.

Donc $Df=\mathbb{R}$.

•Dc ? f est continue sur $\mathbb{R}$ puisque l'expression de f n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

•$D_{f'}$?Dans l'expression de f, seules les fonctions $\sqrt{\ }$ et $Arccos$ ne sont pas dérivables sur tout leur propre domaine de définition :$\sqrt{\ }$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $Arccos$ n'est dérivable que sur $]-1,1[$. $\forall x\in\mathbb{R}, 1+x^2>0$ donc $\left(x\mapsto\sqrt{1+x^2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Cherchons le domaine D tq : $\forall x\in D, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\in]-1,1[$.

$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\in]-1,1[\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\neq 1\Leftrightarrow x\neq 0$. Alors, $\forall x\in\mathbb{R}^*, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\in]-1,1[$ et par suite, f est au moins dérivable sur $D=\mathbb{R}^*$.

Calcul de $f'(x)$ pour $x\in D$

$f(x)=Arccos\left(u(x)\right)$ où $u(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Donc $f'(x)=u'(x)Arccos'\left(u(x)\right)=u'(x)\frac{-1}{\sqrt{1-u(x)^2}}$

Et $u(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\left(v(x)\right)^{-\frac{1}{2}}$ avec $v(x)=1+x^2$

Donc $u'(x)=-\frac{1}{2}v'(x)\left(v(x)\right)^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}2x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$u'(x)=-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Ainsi, $f'(x)=-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}}}$.

$f'(x)=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2}}=\frac{x}{|x|}\frac{1}{1+x^2}=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2}si\ x>0\\ \frac{-1}{1+x^2}si\ x<0\end{cases}$.

$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2}si\ x>0\\ \frac{-1}{1+x^2}si\ x<0\end{cases}=\begin{cases}Arctan'(x)\ si\ x>0\\ -Arctan'(x)\ si\ x<0\end{cases}$.Alors il existe deux constantes réelles c et d telles que sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$, $f(x)=Arctan(x)+c$ et sur l'intervalle $\mathbb{R}^{-*}$, $f(x)=-Arctan(x)+d$.

Alors $c=f(1)-Arctan(1)$

$$c=\underbrace{Arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\substack{le\ réel\ [0,\pi]dont\\ le\ cosinus\ vaut\ \frac{1}{\sqrt{2}}}}-\underbrace{Arctan(1)}_{\substack{le\ réel\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\ dont\\ la\ tangente\ vaut\ 1}}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0$$

Et $d=f(-1)+Arctan(-1)$

$$=\underbrace{Arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\substack{le\ réel\ [0,\pi]dont\\ le\ cosinus\ vaut\ \frac{1}{\sqrt{2}}}}+\underbrace{Arctan(-1)}_{\substack{le\ réel\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\ dont\\ la\ tangente\ vaut-1}}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0$$

Dérivabilité de f en 0 ?

2ème méthode : f étant continue en 0 et dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*$, je peux utiliser le théorème 9 : j'étudie donc la limite de $f'(x)$ quand $x\to 0^+$ puis quand $x\to 0^-$.

Or, $si\ x>0, f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ et $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x^2}=1$. Donc le théorème 9 assure que : $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

Et $si\ x<0, f'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$ et $\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{1+x^2}=-1$. Donc le théorème assure que : $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$

j'en conclus que f n'est pas dérivable à 0 et Cf a deux demi-tangente en $O(0,0)$ d'équations : $\begin{cases}x>0\\ y=x\end{cases}$ et $\begin{cases}x<0\\ y=-x\end{cases}$.

Et ainsi, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$ et $\forall x\in D_{f'}, f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2}si\ x>0\\ \frac{-1}{1+x^2}si\ x<0\end{cases}$

B. Les fonctions définies par morceaux. $f(x)=\begin{cases} g(x) si\ x>a \\ m\ si\ x=a \\ h(x) si\ x<a\end{cases}$. $(avec\ m=f(a)\in\mathbb{R})$.

2 ou 3 phases distinctes :

1. **Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$**
2. **Etudier la continuité de f en a.**
   Et si f est continue en a alors
3. **Etudier dérivabilité de f en a**

1[ère] phase : continuité et dérivabilité de f sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$	**2ème phase : continuité de f en a**	**3[ème] phase : dérivabilité de f en a étudier les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement de f en a**
1. Etudier, avec la méthode vue au A, la continuité et la dérivabilité de g sur $]a,+\infty[$ et $de\ h$ sur $]-\infty,a[$ et déterminer les expressions de $g'(x)$ et de $h'(x)$. 2. Déduire de ce qui précède la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ et l'expression de la dérivée de f sur $]a,+\infty[$ et sur $]-\infty,a[$: $f\ et\ g$ coïncident sur un voisinage de chaque réel de $]a,+\infty[$ donc la dérivabilité de g entraine celle de f et $\forall x\in D_{g'}, f'(x)=g'(x)$. Idem pour f et h sur $]-\infty,a[$.	Etudier la limite de g en $a^+\ et$ celle de h en a^- pour obtenir la limite à gauche en a et limite à droite en $a\ de\ f$. f est continue en a sietssi $\underset{\substack{x\to a\\x>a}}{\mathrm{Lim}}\, g(x)=m=\underset{\substack{x\to a\\x<a}}{\lim} h(x)$.	✓ soit en appliquant la définition 2: étude de l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{g(x)-f(a)}{x-a}$ et de $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{h(x)-f(a)}{x-a}$ ✓ soit en appliquant le théorème 9 : étude de l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x\to a^+} g'(x)\ et\ \lim\limits_{x\to a^-} h'(x)$. (mais cette deuxième méthode ne fonctionne pas si l'une de ces limites n'existent pas)
Soit $f:\left(x\mapsto\begin{cases}\frac{\cos(x)-1}{x}\ si\ x=0\\ 0\ si\ x\neq 0\end{cases}\right)$. f est une fonction définie par morceaux. $Df=\mathbb{R}$. Posons $g(x)=\frac{\cos(x)-1}{x}$. (ici $g=h$). $Dg=\mathbb{R}^*$ Comme g n'est constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de définition, g est continue et dérivable sur $Dg=\mathbb{R}^*$. Soit $a\in\mathbb{R}^*$. f et g coïncident en $a\ et$ sur tout un voisinage de a dans $\mathbb{R}^*$. Donc, sur ce voisinage, $f(x)=g(x)\ et\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ et par suite, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)=f(a)$ et $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)\in\mathbb{R}$ donc f est continue et dérivable en a et $f'(a)=g'(a)=\frac{-a\sin(a)-\cos(a)+1}{a^2}$. Ainsi, je peux conclure que f est continue et dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*$et $\forall x\in\mathbb{R}^*, f'(x)=\frac{-x\sin(x)-\cos(x)+1}{x^2}$.	Continuité en 0 ? Je remarque que $\frac{\cos(x)-1}{x}=\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}$. Comme cos est dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=cos'(0)=-\sin(0)=0=f(0)$. Donc f est continue en 0.	Dérivabilité en 0 ? 1[ère] méthode $\forall x\neq 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{\cos(x)-1}{x}}{x}=\frac{\cos(x)-1}{x^2}=\frac{-2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\frac{-2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$. Or $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=-\frac{1}{2}\ et\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$. Donc par composition, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}=1$. J'en conclus que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}$ f est dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{1}{2}$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*, f'(x)=\begin{cases}\frac{-x\sin(x)-\cos(x)+1}{x^2}\ si\ x\neq 0\\ -\frac{1}{2}\ si\ x=0\end{cases}$.