**CORRIGE Ex 27 TD 19**

**Ex27** Soit $\Psi$ l'application qui, à une fonction $f$, associe sa dérivée $f'$.

1. Montrer que $\Psi$ est un endomorphisme de $F = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Est-ce un automorphisme de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ?

Soit $E$ L'ensemble des fonctions de la forme $\left(x \mapsto \tilde{P}(x)\cos(x) + \tilde{Q}(x)\sin(x)\right)$ où $P$ et $Q$ sont deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$.

3. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Montrer que $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de $E$.
   où $f_1: (x \mapsto sin(x))$ $f_2: (x \mapsto xsin(x))$ $f_3: (x \mapsto \cos(x))$ et $f_4: (x \mapsto xcos(x))$.
5. Montrer que $E$ est stable par $\Psi$. On note $D$ l'endomorphisme de $E$ induit par $\Psi$. On note $Id_E$ l'application identité sur $E$.
6. Montrer que $D$ est un automorphisme de $E$.
7. Déterminer, selon les valeurs du réel $\lambda$, le rang de $D^2 - \lambda Id_E$.
8. Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de $D^2 + Id_E$.
9. En déduire que $D^4 + 2D^2 + Id_E$ est l'application nulle de $E$.
10. Retrouver alors que $D$ est bijective et calculer $D^{-1}$ en fonction de $D$.

On note $V$ le sous-espace de $\mathscr{L}(E)$ engendré par $Id_E$ et $D^2$.

11. Déterminer la dimension de $V$.
12. Vérifier que $V$ est stable par composition.
13. Montrer que les éléments de $V$ bijectifs sont les éléments de la forme : $\alpha Id_E + \beta D^2$ tel que $\alpha$ et $\beta$ réels distincts.
14. Résoudre dans **R** l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.
15. Déterminer le noyau de $\Psi^2 + Id_F$.
16. Montrer que $E$ est le noyau de $(\Psi^2 + Id_F)^2$.
17. Conclure que $E$ est exactement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$.

1. $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), f' \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $(f,g) \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ et $a$, et $b$ réels, $\Psi(\mathrm{af+bf}) = (af+bg)' = af' + bg'f) = a\Psi(\mathrm{f}) + b\Psi(\mathrm{g})$. Ainsi, $\Psi$ est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Non, $\Psi$ n'est pas un automorphisme de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$ donc $\Psi$ n'es pas injective.
3. $E = \{\left(x \mapsto \tilde{P}(x)\cos(x) + \tilde{Q}(x)\sin(x)\right) / P, Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$=$\{(x \mapsto (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x))/a,b,c,d$ réels$\}$

$E = \{af_4 + bf_3 + cf_2 + df_1 / a,b,c,d$ réels $\}$. Ainsi, $E = vect(f_1,f_2,f_3,f_4)$. Comme $(f_1,f_2,f_3,f_4)$ est une famille de vecteurs de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $E$ est le ss-e-v de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par $(f_1,f_2,f_3,f_4)$.

4. Montrons que $(f_1,f_2,f_3,f_4)$ est libre : Soit $a,b,c,d$ réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$=0.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, asin(x) + bxsin(x) + ccos(x) + dxcos(x) = 0$.

En particulier pour $x = 0, c = 0$.Puis pour $x = \pi, -c - d\pi = 0$ donc $d = 0$. Puis pour $x = \frac{\pi}{2}$ $puis$ $x = -\frac{\pi}{2}, a + b\frac{\pi}{2} = 0$ $et$ $-a + b\frac{\pi}{2} = 0$ docn $a = b = 0$. Ainsi, $(f_1,f_2,f_3,f_4)$ est libre et est une base de $E$. J'en déduis que $\dim(E) = 4$.

5. Soit $f$ un élément de E. Alors il existe $a,b,c$ et $d$ réels tels que : $f = (af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4)$.

$\Psi$ étant linéaire, $\Psi(af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4) = a\Psi(f_1) + b\Psi(f_2) + c\Psi(f_3) + d\Psi(f_4)$.

Or, $\Psi(f_1) = f_3$, $\Psi(f_2) = f_1 + f_4, \Psi(f_3) = -f_1$ et $\Psi(f_4) = -f_2 + f_3$. Donc, $\Psi(f_1), \Psi(f_2), \Psi(f_3)$ et $\Psi(f_4)$ sont dans $E$.

Comme $E$ est stable par combinaison linéaire, , $\Psi(af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4) = a\Psi(f_1) + b\Psi(f_2) + c\Psi(f_3) + d\Psi(f_4). \in E$. J'en conclus que $E$ est stable par $\Psi$. Par conséquent $D: \begin{pmatrix} E \to E \\ f \mapsto f' \end{pmatrix}$ est l'endomorphisme de $E$ induit par $\Psi$.

6. 1ère méthode matricielle : $M = mat_B D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $M \sim_c \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $rgM = 4$. Donc $M$ est inversible et ainsi $D$ est un automorphisme de $E$.
7. 2ème méthode par le noyau : Ker(D) contient la fonction nulle $\omega$ car $D(\omega) = \omega' = \omega$. Soit $f$ un élément de $E$. Alors il existe $a,b,c$ et $d$ réels tels que : $f = (af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4)$ et $\Psi(f) = \omega$.

$\Psi$ étant linéaire, $\Psi(f) = \Psi(af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4) = a\Psi(f_1) + b\Psi(f_2) + c\Psi(f_3) + d\Psi(f_4) = af_3 + bf_1 + bf_4 - cf_1 - df_2 + df_3$.

Alors, $(a+d)f_3 + (b-c)f_1 + bf_4 - df_2 = \omega$. Comme $B$est libre, nécessairement, $a + d = b - c = b = -d = 0$ et par suite, $a = b = c = d = 0$. Ainsi, $Ker(D) = \{\omega\}$. $D$ est donc injective. Comme $E$ est de dimension finie et $d$ est un endomorphisme de $E$, l'injectivité de $D$ suffit à conclure que ainsi $D$ est un automorphisme de $E$.

8. $mat_B(D^2 - \lambda Id_E) = mat_B(D^2) - \lambda mat_B(Id_E) = M^2 - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda I_4 = \underbrace{\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire inférieure}}$.

   $Si$ $\lambda = -1$ alors $rgD^2 - \lambda Id_E = 1$ car $M^2 - \lambda I_4$ne contient qu'une colonne non nulle.
   Si $\lambda \neq -1$ alors $rgD^2 - \lambda Id_E = 4$. Car $M^2 - \lambda I_4$est triangulaire avec aucun coeff. de la diagonale nul.

9. $rgD^2 + Id_E = 1$. Donc le théorème du rang assure que dim $Ker(D^2 + Id_E) = 3$.

De plus, $mat_B D^2 + Id_E = M^2 + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, $f_1, f_3, f_4$ $sont$ $éléments$ $de$ $Ker(D^2 + Id_E)$. De pkus, la famille , $(f_1, f_3, f_4)$ étant extraite de la famille libre $B$ , est libre aussi et maximale dans $Ker(D^2 + Id_E)$. Ainsi, $(f_1, f_3, f_4)$ est une base de $Ker(D^2 + Id_E)$.

De plus, $(D^2 + Id_E)(f_2) = 2f_3$ donc $(D^2 + Id_E)\left(\frac{1}{2}f_2\right) = f_3$ . Ainsi, $f_3 \in Im(D^2 + Id_E)$. Comme $f_3$ est non nul , $(f_3)$ est libre et maximale dans $Im(D^2 + Id_E)$.Ainsi $(f_3)$ est une base de $Im(D^2 + Id_E)$.

10. Comme $f_3 \in Ker(D^2 + Id_E), vect(f_3) = Im(D^2 + Id_E) \subset Ker(D^2 + Id_E)$ ( $car$ $Ker(D^2 + Id_E)$ $est$ $table$ $par$ $c.l.$). J'en déduis que que $(D^2 + Id_E) \circ (D^2 + Id_E) = 0$ ce qui donne : $D^4 + 2D^2 + Id_E = 0$.
    **Rque** : on aurait pu démontrer ce résultat matriciellement en prouvant, par le calcul, que $M^4 + 2M^2 + Id_E = 0$.
11. Alors, $(-D^3 - 2D^1) \circ D = Id_E = D \circ (-D^3 - 2D^1)$. Donc $D$ bijectif et $D^{-1} = (-D^3 - 2D^1)$.

12. $V = vect(D^2, id)$. Comme D² et id sont des éléments de de $\mathscr{L}(E)$, V est un ss-e-v de $\mathscr{L}(E)$, est le ss-e-v de $\mathscr{L}(E)$ engendré par $D^2$ et $Id_E$. De plus, $D^2$ et $Id_E$ ne sont pas colinéaires puisque $M^2$ et $I_4$ ne le sont pas ; ainsi, $(D^2, id)$ est une base de $V$. Donc $dimV = 2$.
13. $(aD^2 + bid_E) \circ (a'D^2 + b'id_E) = aa'D^4 + (ab' + a'b)D^2 + bb'id_E = aa'(id_E - 2D^2) + (ab' + a'b)D^2 + bb'id_E$
$= (-2aa' + ab' + a'b)D^2 + (aa' + bb')id \in V$. Donc $V$ est stable par composition.
14. Soit $u = aD^2 + bid_E \in V$.

$mat_B u = aM^2 + bI_4 = \begin{pmatrix} -a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+b & 0 & 0 \\ 0 & 2a & -a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a+b \end{pmatrix}$. $Et$ $\det(aM^2 + bI_4) = (b-a)^4$. Donc

Alors, $u$ $bijective \Leftrightarrow aM^2 + bI_4$ $inversible \Leftrightarrow \det(aM^2 + bI_4) \neq 0 \Leftrightarrow b \neq a$.
Ainsi, les éléments bijectifs de $V$ sont les endomorphismes $aD^2 + bid_E$ $tq$ $b \neq a$.

15. Les solutions de $y'' + y = 0$ sont toutes les fonctions de la forme $\alpha cos + \beta sin$ tq $\alpha, \beta$ réels . Ce sont donc toutes les combinaisons linéaires de $f_1$ $et$ $f_3$. Toutes les solutions de cette équation différentielles sont dans $F = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
16. Soit $f \in F$.
$f \in Ker(\psi^2 + Id_F) \Leftrightarrow f'' + f = 0 \Leftrightarrow f \in vect(f_1, f_3)$. Ainsi, $Ker(\psi^2 + Id_F) = vect(f_1, f_3)$.
17. Soit $f \in F$.
$f \in Ker((\psi^2 + Id_F)^2) \Leftrightarrow (\psi^4 + 2\psi^2 + Id_F)(f) = 0 \Leftrightarrow (\psi^2 + Id_F)((\psi^2 + Id_F)\ (f)) = 0 \Leftrightarrow (\psi^2 + Id_F)(f) \in Ker(\psi^2 + Id_F)$
$\Leftrightarrow (\psi^2 + Id_F)(f) \in vect(f_1, f_3)$.
$\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / f'' + f = \alpha f_1 + \beta f_3$.
$\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$
Résolvons l'équation différentielle : $(edl2)$: $y'' + y = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$
$Sol(edl2H) = vect(f_1, f_3)$.
Solution particulière ?
Cherchons une solution particulière de $(edl2)$ de la forme $g: (x \mapsto (Ax + B)\sin(x) + (Cx + D)\cos(x))$ tq $A, B, C, D$ réels à déterminer.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) + g(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (2A - D - Cx)\cos(x) - (2C + B + Ax)\sin(x) + (Ax + B)\sin(x) + (Cx + D)\cos(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (2A - \beta)\cos(x) - (2C + \alpha)\sin(x) = 0$
$\underset{(\cos,\sin) est\ libre}{\overset{car\ la\ famille}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 2A - \beta = 0 \\ 2C + \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2}\beta \\ C = \frac{1}{2}\alpha \end{cases}$. Donc, $g: (x \mapsto \left(\frac{1}{2}\beta x\right)\sin(x) + \left(\frac{1}{2}\alpha x\right)\cos(x))$ est une solution particulière de notre équation différentielle $(edl2)$. Ainsi, les solutions de $(edl2)$ sont toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \left(\frac{1}{2}\beta x + k\right)\sin(x) + \left(\frac{1}{2}\alpha x + k'\right)\cos(x))$ tq $k$ et $k'$ réels .
Alors, $f \in Ker((\psi^2 + Id_F)^2) \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 et \exists(k, k') \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{1}{2}\beta x + k\right)\sin(x) + \left(\frac{1}{2}\alpha x + k'\right)\cos(x)$
$\Leftrightarrow \exists(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2 et \exists(k, k') \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (\beta' x + k)\sin(x) + (\alpha' x + k')\cos(x)$
$\Leftrightarrow f \in vect(f_1, f_2, f_3, f_4)$.
Ainsi, $Ker(\psi^2 + Id_F)^2) = vect(f_1, f_2, f_3, f_4) = E$.
18. Tout d'abord , on montre facilement par récurrence qu'une solution de $(edl4) = f^{(4)} + 2f^{(2)} + f = 0$ est de classe $C^\infty sur\ \mathbb{R}$.
Soit $f \in F$. $f^{(4)} + 2f^{(2)} + f = 0. \Leftrightarrow (\psi^4 + 2\psi^2 + Id_F)(f) = 0 \Leftrightarrow f \in Ker((\psi^2 + Id_F)^2)$. Donc, $Ker((\psi^2 + Id_F)^2)$ est l'ensemble des solutions de $(edl4)$ . Alors d'après la question précédente , je peux conclure que E est exactement l'ensemble des solutions de $f^{(4)} + 2f^{(2)} + f = 0$. Ainsi , $Sol(edl4) = vect(f_1, f_2, f_3, f_4) = E$