Corrigé Ex 25 TD 19

On note $\mathscr{E}$ le $\mathbb{R}$-e-v des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $f \in \mathscr{E}$, on note $U(f)$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)dt$.

1. Soit $f \in \mathscr{E}$, T-périodique. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si f est T-périodique alors f' l'est aussi .

b) Justifier que la réciproque est fausse.

3. Montrer que pour tout $f \in \mathscr{E}$, $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4. Montrer que U qui à $f \in \mathscr{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

5. Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ .On note E_n , l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n et $\mathscr{B}_n = (f_0, f_1, f_2, .., f_n)$ où $f_k : (t \mapsto t^k)$ est la base canonique de E_n

5.1 Montrer que U induit un endomorphisme sur E_n que l'on note U_n.

5.2 Ecrire la matrice M de U_n dans $\mathscr{B}_n$.

5.3 U_n est-il bijectif ?

5.4 Démontrer que $U_n - id_{E_n}$ est nilpotent.

5.5 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que : $Ker\left(U_n - \lambda id_{E_n}\right) \neq \{O\} \Leftrightarrow \lambda = 1$.

6. Justifier que si l'élément f de $\mathscr{E}$ est dans $Ker(U)$ alors.

(i) $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

(ii) $f\ est\ 1 - périodique$.

7. A-t-on $Ker(U) = \{f \in \mathscr{E}\ /f$ est 1 $-$périodique et $\int_0^1 f(t)dt = 0\}$?

8. Donner explicitement une fonction non nulle et élément de $KerU$ et en donner une représentation graphique sur $[-1,2]$.

9. L'endomorphisme U est -il surjectif ?

10. Soit a un réel non nul et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(t) = e^{at}$.

10.1 Déterminer $F_a = U(f_a)$.

10.2 Dresser le tableau des variations de $g: \left(x \mapsto \frac{e^x-1}{x}\right)$.

10.3 En déduire que pour tout réel λ strictement positif, il existe une fonction f non nulle telle que $U(f) = \lambda f$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \underbrace{\int_T^{a+T} f(t)dt}_{\overrightarrow{CV\ u=t-T}} = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^a f(u+T)dt = \int_0^T f(t)dt$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors $g: \left(x \mapsto f(x+T)\right) est\ dérivable\ sur\ \mathbb{R}$

c) Supposons que f est T-périodique. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)$ donc $g'(x) = f'(x)$ $i.e. f'(x+T) = f'(x)$. Ains, f' est T-périodique.

d) Trouvons un contre-exemple. Prenons $f(x) = \sin(x) + x$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = \cos(x) + 1$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) + 1 = \cos(x) + 1 = f'(x)$ mais $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + x + 2\pi = f(x) + 2\pi \neq f(x)$. Donc f' est 2π $-$périodique mais f ne l'est pas.

3. Soit $f \in \mathscr{E}$; Alors le cours assure que f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = F(x) - F(x-1)$. Alors, comme F et $(x \mapsto x-1)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left(U(f)\right)'(x) = F'(x) - F'(x-1) = f(x) - f(x-1).$$

4.Pour tout $f \in \mathscr{E}$, $U(f) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathscr{E}$.

De plus, $\forall (f,g) \in \mathscr{E}^2$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$\forall x \in \mathbb{R},\ U(af+bg)(x) = \int_{x-1}^{x}(af+bg)(t)dt = a\int_{x-1}^{x} f(t)dt + b\int_{x-1}^{x} g(t)dt = aU(f)(x) + bU(g)(x) = [aU(f) + bU(g)](x)$.

Donc $U(af+bg) = aU(f) + bU(g)$

Ainsi, U est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

5.1.$Soit\ k \in [\![0,n]\!]$. $\forall x \in \mathbb{R}, U(f_k)(x) = \int_{x-1}^{x} t^k dt = \frac{1}{k+1}[x^{k+1} - (x-1)^{k+1}] = \frac{1}{k+1}\left[-\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}(-1)^{k+1-j}x^j\right] = \frac{1}{k+1}\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}(-1)^{k-j}x^j\right]$. Donc $deg\left(U(f_k)\right) \leq k \leq n$. Par conséquent, par linéarité de U, l'image par U de toute combinaison linéaire des f_k tq $k \in [\![0,n]\!]$ est une combinaison linéaire des f_k tq $k \in [\![0,n]\!]$. Ainsi, $E_n$est stable par U et par suite U induit sur E_n un endomorphisme noté U_n.

5.2.$\forall k \in [\![0,n]\!], \forall x \in \mathbb{R},\ U_n(f_k)(x) = \frac{1}{k+1}\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}(-1)^{k-j}x^j\right] = \frac{1}{k+1}\left[(k+1)x^k + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}(-1)^{k-j}x^j\right]$

$= x^k + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j}(-1)^{k-j}x^j = f_k(x) + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j}(-1)^{k-j}f_j(x)$.

Donc, $U_n(f_k) = f_k + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j}(-1)^{k-j}f_j$.

$$\text{Donc } M=\begin{array}{cc}\begin{matrix} U_n(f_0) & U_n(f_1) & \quad U_n(f_k) & \quad U_n(f_n)\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}
1 & 1/2 & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{0} & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{0}\\
0 & 1 & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{1} & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{1}\\
 & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{k-1} & \\
 & & 1 & \\
 & & 0 & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n-1}\\
 & & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} & \begin{matrix} f_0\\ f_1\\ \\ \\ \\ \\ \\ f_n\end{matrix}\end{array}.$$

5.3.$\det(M)=1$ donc M est inversible et par suite $U_n$est un automorphisme de E_n.

$$5.3.\ N=mat_{B_c}\left(U_n-Id_{E_n}\right)=M-I_{n+1}=\begin{array}{cc}\begin{matrix} (U_n-id)(f_0) & (U_n-id)(f_1) & \quad (U_n-id)(f_k) & \quad (U_n-id)(f_n)\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}
0 & 1/2 & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{0} & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{0}\\
0 & 0 & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{1} & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{1}\\
 & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{k-1} & \\
 & & 0 & \\
 & & 0 & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n-1}\\
 & & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} & \begin{matrix} f_0\\ f_1\\ \\ \\ \\ \\ \\ f_n\end{matrix}\end{array}.$$

Soit $H(k)$ la propriété : $(U_n-id)^k(f_k)=0$. Montrons par une récurrence forte et finie que $\forall k\in[\![0,n]\!], H(k)$ est vraie.

Initialisation : D'après la matrice N , $(U_n-id)^0(f_0)=0$.

Propagation : Soit k un entier naturel inférieur à $n-1$. Supposons que : $\forall j\in[\![0,k]\!], (U_n-id)^j(f_j)=0$. Montrons que $(U_n-id)^{k+1}(f_{k+1})=0$.

$$(U_n-id)^{k+1}(f_{k+1})=(U_n-id)^k\left(\underbrace{(U_n-id)\quad(f_{k+1})}_{\substack{est\ une\ combi.linéaire\\ des\ f_0,f_1,\dots,f_k}}\right)=(U_n-id)^k\left(\textstyle\sum_{j=0}^k a_jf_j\right)=\textstyle\sum_{j=0}^k a_j\underbrace{(U_n-id)^k(f_j)}_{=0(**)}=0 \text{ OK!!}$$

(**)puisque $\forall j\in[\![0,k]\!], (U_n-id)^k(f_j)\underset{car\ j\le k}{\underbrace{=}}(U_n-id)^{k-j}((U_n-id)^j(f_j))=(U_n-id)^{k-j}(0)=0.$ $=0\ car$

CCL : $\forall k\in[\![0,n]\!], H(k)$ est vraie.Et par suite , $\forall j\in[\![0,k]\!], (U_n-id)^n(f_j)=0.\ L'endomorphisme\ (U_n-id)^n$ envoie tous les vecteurs de la base canonique sur 0. J'en dédeuis que l'endomorphisme $(U_n-id)^n est\ nul.$ U_n-id est donc nilpotent.

5.4.Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$Ker\left(U_n-\lambda id_{E_n}\right)\neq\{O\}\Leftrightarrow U_n-\lambda id_{E_n}n'est\ pas\ injectif\Leftrightarrow U_n-\lambda id_{E_n}n'est\ pas\ bijectif\Leftrightarrow$ $\det(M-\lambda I_{n+1})=0$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}
1-\lambda & 1/2 & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{0}\\
0 & 1-\lambda & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{1}\\
 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \\
 & & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n-1}\\
0 & 0 & 1-\lambda
\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(1-\lambda)^{n+1}=0\Leftrightarrow\lambda=1.$$

6.$f\in Ker(U)\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\int_{x-1}^x f(t)dt=0\underset{en\ prenant\ x=1}{\underbrace{\Rightarrow}}\int_0^1 f(t)dt=0.$

$$f\in Ker(U)\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\int_{x-1}^x f(t)dt=0\underset{\substack{où\ F\ est\ une\ primtipve\ de\ f\ sur\ \mathbb{R}\\ (F\ existe\ car\ f\ est\ continue\ sur\ \mathbb{R})}}{\underbrace{\Leftrightarrow}}\forall x\in\mathbb{R},F(x)-F(x-1)=0\Leftrightarrow F\ est\ 1-périodique\underset{d'après 2)}{\underbrace{\Rightarrow}}f$$

$=F'est\ 1-périodique.$

7.

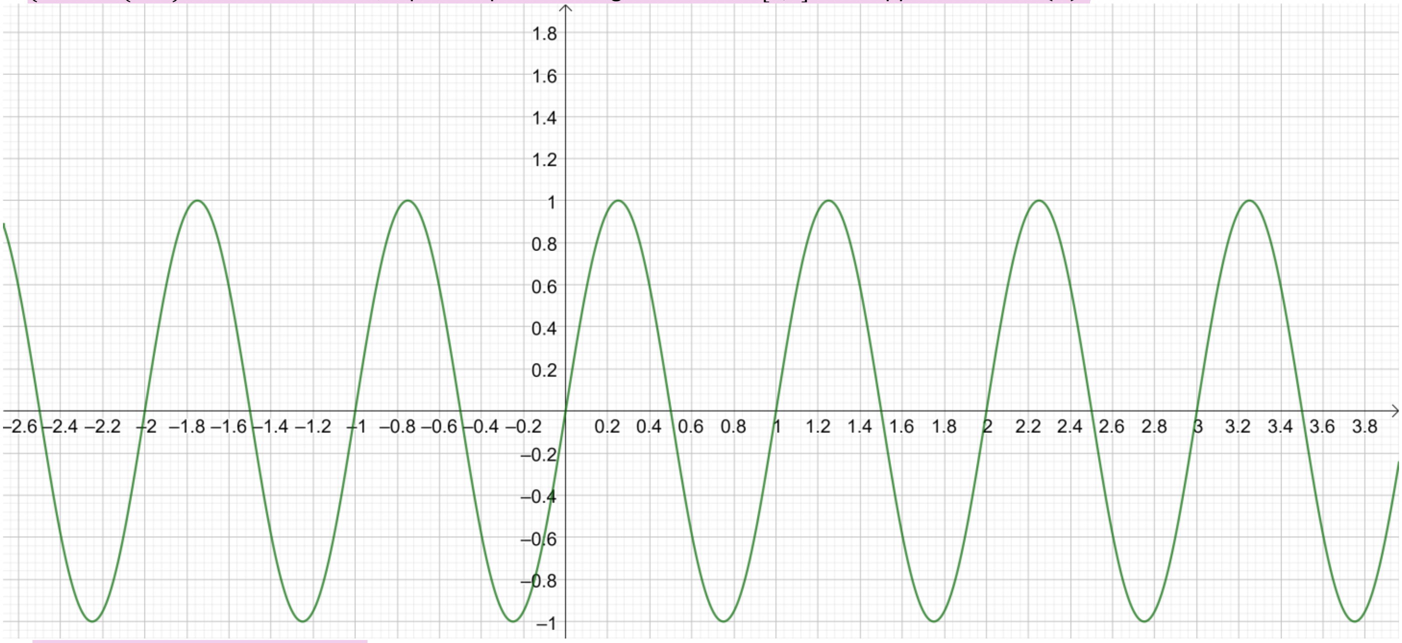
- On a montré dans la question 6. que $Ker(U)\subset\{f\in\mathscr{E}\ /f$ est 1 $-$périodique et $\int_0^1 f(t)dt=0\}$.
- Soit $f\in\mathscr{E}$ telle que f est 1 $-$périodique et $\int_0^1 f(t)dt=0$. Alors $\forall x\in\mathbb{R}$,

$\int_{x-1}^x f(t)dt\underset{en\ applicaquant\ 1.\ avec\ a=x-1}{\underbrace{=}}\int_0^1 f(t)dt=0$.Donc, $f\in Ker(U)$.

Ainsi, $\{f\in\mathscr{E}\ /f$ est 1 $-$périodique et $\int_0^1 f(t)dt=0\}\subset Ker(U)$ et finalement :

$\{f\in\mathscr{E}\ /f$ est 1 $-$périodique et $\int_0^1 f(t)dt=0\}=Ker(U)$.

8. $(x \mapsto \sin(2\pi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, 1-périodique et d'intégrale nulle sur $[0,1]$ donc appartient à $Ker(U)$.



8. U n'est pas surjective de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}$. En effet, nous avons prouvé que les images par U sont des fonctions de classe C^1. Or un élément de $\mathscr{E}$ n'est pas forcément de classe C^1 : par exemple, la valeur absolue est un élément de $\mathscr{E}$ qui n'est pas C^1 car pas dérivable en 0. Donc la fonction valeur absolue n'a pas d'antécédent par U.

10.1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_a(x) = U(f_a)(x) = \int_{x-1}^{x} e^{at}dt = \frac{1}{a}\left[e^{ax} - e^{a(x-1)}\right] = e^{ax}\left[\frac{e^{-a}-1}{-a}\right]$. Donc $U(f_a) = \left[\frac{e^{-a}-1}{-a}\right] f_a$.

10.2. $g : \left(x \mapsto \frac{e^x-1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0, g'(x) = \frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$. Posons $h(x) = (x-1)e^x + 1$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et et $\forall x, h'(x) = xe^x$. Donc $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Par conséquent, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$. Comme $h(0) = 0$, h est positive et ne s'annule qu'en 0 . Et par suite g' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$. Comme de plus, $\lim_{x \to 0} g(x) \overset{T.A.}{\triangleq} 1$, g est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1 et son prolongement $\tilde{g}$ est strictement croissant sur $\mathbb{R}$.

10.3. $\tilde{g}$ est continue et strictement croissant sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to -\infty} \tilde{g}(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \tilde{g}(x) = +\infty$. Par conséquent, $\tilde{g}$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors λadmet un unique antécédent a' par g et s'écrit donc sous la forme $\lambda = g(a') \underbrace{=}_{en\ posant\ a=-a'} g(-a) = \frac{e^{-a}-1}{-a}$. Alors, $f_a$vérifie $U(f_a) = \left[\frac{e^{-a}-1}{-a}\right] f_a = \lambda f_a$. Ainsi, pour tout réel λ strictement positif, il existe une fonction f non nulle telle que $U(f) = \lambda f$.