Programme de colle 25

Chapitre 18 : Applications linéaires.

I Généralités

1. **Définition et règles de calcul**

$f \in \mathscr{L}(E,F)$ dans F lorsque f est une application de E dans F et $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \forall(\alpha,\beta) \in K^2, f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$.

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $f(\overrightarrow{O_E}) = \overrightarrow{O_F}$ et $\forall(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}) \in E^n, \forall(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in K^n, f(\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{u_k}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(\overrightarrow{u_k})$.

2. **Exemples**.

Application linéaire nulle : $\omega: E \to F$ *telle que* $\omega(\vec{x}) = \overrightarrow{O_F}$

Endomorphisme nul $\omega: E \to E$ *telle que* $\omega(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$. Identité $id_E: E \to E$ *telle que* $id_E(\vec{x}) = \vec{x}$.

Homothétie h vectorielle de rapport $\alpha \in K^*$: $h: E \to E$ *telle que* $h(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$.

Endomorphisme f_A canoniquement de K^n associé à la matrice A de $M_n(K)$: $f: ((x_1,x_2,\dots,x_n) \mapsto (y_1,y_2,\dots,y_n))$ telle que : $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Application linéaire de K^p *dans* K^n canoniquement associée à la matrice A de $M_{n,p}(K)$: $f: ((x_1,x_2,\dots,x_p) \mapsto (y_1,y_2,\dots,y_n))$ telle que : $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

Trace, transposition, opérateur Intégral, dérivation (…).

3. **Propriété fondamentale**

Soit $B = (\vec{e_i})_{i\in I}$ une base de l'espace vectoriel E et $(\vec{y_i})_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Il existe une unique application linéaire f de E vers F qui vérifie : $\forall i \in I, f(\vec{e_i}) = \vec{y_i}$.

Une application linéaire f de E *dans* F est entièrement caractérisée par la donnée des images par f des vecteurs d'une base de E. Deux applications linéaires de E dans F coïncidant en tout vecteur d'une base de E sont égales (partout).

Soit $E = E_1 \oplus E_2$ *et* $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$ et $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$. Il existe une unique application linéaire u de E vers F tq : $u_{/E_1} = u_1$ *et* $u_{/E_2} = u_2$.

4. **Opérations sur les applications linéaires.**

Une combinaison linéaire ou une composée d'applications linéaires ou une bijection réciproque d'un isomorphisme est linéaire.

Calculs dans $\mathscr{L}(E)$: $\forall(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})^4, \forall(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{K}^4$, $(\boldsymbol{\alpha f}+\boldsymbol{\beta g}) \circ (\boldsymbol{au}+\boldsymbol{bv}) = \boldsymbol{\alpha a}(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\alpha b}(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{v})$.

Itérés d'un endomorphisme : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. $f^0 = id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f^n \circ f = f \circ f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \in \mathscr{L}(E)$.

Formule du binôme de Newton et formule de factorisation : Si f *et* g sont deux endomorphismes de E tels que $\underbrace{f \circ g = g \circ f}_{f \text{ et } g \text{ commutent}}$, alors

1. $\forall(n,m,p,q) \in \mathbb{N}^4, (f \circ g)^n = f^n \circ g^n = g^n \circ f^n$ et $f^m \circ g^p \circ f^n \circ g^q = f^{m+n} \circ g^{p+q} = g^{p+q} \circ f^{m+n}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (f+g)^n = (f+g) \circ (f+g) \circ \dots \circ (f+g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{f^k g^{n-k}}_{f\circ f\circ..\circ f\circ g\circ g\circ\dots\circ g}$ (FBN).
3. $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} - g^{n+1} = (f-g) \circ (\sum_{k=0}^n f^k \circ g^{n-k}) = (f-g)(\sum_{k=0}^n f^k g^{n-k})$. (Formule de factorisation)

II Noyau, image et rang.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- $Kerf = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \overrightarrow{O_F}\}$. Autrement dit, $\vec{x} \in Kerf \Leftrightarrow \vec{x} \in E$ *et* $f(\vec{x}) = \overrightarrow{O_F}$. $Kerf$ est un ss-e-v de E
- $Imf = \{f(\vec{x}) / \vec{x} \in E\}$. Autrement dit, $\vec{y} \in Imf \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in E / \vec{y} = f(\vec{x})$. Imf est un ss-e-v de F.
- $rg(f) = dim(Im(f))$.
- Si $\mathscr{B} = (\vec{e_i})_{i\in I}$ est une famille génératrice de E alors $f(\mathscr{B}) = (f(\vec{e_i}))_{i\in I}$ est une famille génératrice de $Im(f)$ et $rg(f) = rg(f(\mathscr{B}))$.
- **Théorème du rang (admis)** : Si $dimE < +\infty$ alors $rg(f) + dimKer(f) = \dim(E)$.
- $rg(f) \leq \min(dimE, dimF)$.
- Si G est un ss e v de F alors $f^{-1}\langle G\rangle$, l'ensemble de tous les antécédents par f des éléments de G, est un ss e v de E
- Si H est un ss e v de E alors $f(H)$, l'ensemble de toutes les images par f des éléments de H, est un ss e v de F.
- Le ss e v H de E est stable par f lorsque $f(H) \subset H$ i.e. lorsque $\forall\vec{x} \in H, f(\vec{x}) \in H$ et dans ce cas, $f_H: \begin{pmatrix} H \to H \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de H appelé l'endomorphisme induit par f sur H.

III Application linéaire injective-surjective- bijective

- **Caractérisations de l'injectivité, surjectivité et bijectivité d'une application linéaire**

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

✓ f *est injective* $\Leftrightarrow Ker(f) = \{\overrightarrow{O_E}\}$

✓ f *est surjective* $\Leftrightarrow Im(f) = F$

✓ f *est isomorphisme de* E *sur* $F \Leftrightarrow Ker(f) = \{\overrightarrow{O_E}\}$ *et* $Im(f) = F$

Si $\mathscr{B} = (\vec{e_i})_{i\in I}$ est une base de E alors

✓ f *est injective* $\Leftrightarrow (f(\vec{e_i}))_{i\in I}$ est une famille libre

✓ f *est surjective* $\Leftrightarrow (f(\vec{e_i}))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F

✓ f *est isomorphisme de* E *sur* $F \Leftrightarrow (f(\vec{e_i}))_{i\in I}$ est une base de F.

Si E est de dimension finie alors f $est\ injective \iff rg(f) = dimE$
Si F est de dimension finie alors f $est\ surjective \iff rg(f) = dimF$.
Si $E\ et\ F$ sont de dimension finie alors f $isomorphisme\ de\ E\ sur\ F \iff dimE = rg(f) = dimF$.
Si $dimE = dimF < +\infty$ alors f est un isomorphisme de E sur $F \iff f$ est injective$\iff f$ est surjective de E sur F.

- **Conséquences :**

- E et F isomorphes $\Longrightarrow dimE = dimF$.
- $Si\ dimE = dimF < +\infty$ alors E t F sont isomorphes.

- Si G est un ss e v de F et f est un isomorphisme de E sur F alors $\dim(f^{-1}\langle G\rangle) = dimG$
- Si H est un ss e v de E et f est un isomorphisme de E sur F alors $dimf(H)$=dim H

Si h est un isomorphisme de G sur E et g un isomorphisme de F sur G alors $rg(f \circ g) = rg(f) = rg(g \circ f)$.
Si $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $rg(g \circ f) \leq \min(rg(g), rg(f))$.

IV Projections et symétries vectorielles

- Définition d'une projection et d'une symétrie vectorielle

Soit F et G deux ss-e-v de E tels que $F \oplus G = E. \forall x \in E, \exists! x_F \in F, \exists! x_G \in G / x = x_F + x_G$.
Alors $p(x) = x_F$ est le projeté de x sur F et parallèlement à G.
$q(x) = x_G$ est le projeté de x sur G et parallèlement à F.
s$(x) = x_F - x_G$ est le symétrique de x par rapport à F et parallèlement à G .

- Propriétés : $F = Im(p) = Ker(s - id) = Ker(q)\ et\ \boldsymbol{G} = Ker(p) = Ker(s + id) = Im(q)$

$p\ est\ la\ projection\ sur\ Im(p) et\ parallèlement\ à\ Ker(p)$.
$s\ est\ la\ symétrie\ par\ rapport\ à\ Ker(s - id)\ parallèlement\ à\ Ker(s + id)$.
$p \circ p = p, \quad p + q = id_E \quad , q \circ p = 0 = p \circ q$
$s \circ s = id, \quad s = 2p - id_E = p - q = id - 2q$
$Ker(p) \oplus Im(p) = E$ et $Ker(s + id) \oplus Ker(s - id) = E$
$Ker(p - id) = Im(p)\ ,\ p_{Im(p)} = id_{Im(p)}\ et\ \ p_{Ker(p)} = 0$.

- Définition d'une projecteur et d'une involution

Lorsque $p \in \mathcal{L}(E)\ et\ p \circ p = p$ alors p est un projecteur.
Lorsque $s \in \mathcal{L}(E)\ et\ s \circ s = id$ alors s est un involution.

- Deux caractérisations d'une projection vectorielle si Ede dimension quelconque :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p projection $\iff$ $p \circ p = p \iff Ker(p) \oplus Im(p) = E\ et\ p_{Im(p)} = id$

- Trois caractérisations d'une symétrie vectorielle si Ede dimension quelconque :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. s symétrie$\iff$½ $(s + id)$ projecteur$\iff$ $s \circ s = id \iff Ker(s - id) \oplus Ker(s + id) = E$.

V Hyperplans et formes linéaires

- Définition d'un hyperplan

Un ss-e-v H de E est un hyperplan de E lorsque H lorsqu'il existe une droite vectorielle de E supplémentaire de H dans E.

- Caractérisation d'un hyperplan

Un ss-e-v H de E est un hyperplan de E sietssi $\forall a \in E \backslash H, H \oplus vect(a) = E$
sietssi il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = Ker(\varphi)$.

- Caractérisations d'un hyperplan dans un K-e-v de dimension finie

On suppose que E est de dimension n et $B = (e_i)_{i=1..n}$une base de E.
Un ss-e-v H de E est un hyperplan de E sietssi $dimH = dimE - 1$
sietssi il existe $a_1, .., a_n\ scalaires\ non\ tous\ nuls\ tels\ que\ H = \{\sum_{k=1}^{n} x_i e_i / \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_i a_i = 0}_{\text{équation de } H \text{ dans } B.}\}$

VI Equations linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$. Notons (e): $f(x) = b$ l'équation linéaire d'inconnue $x \in E$
Si $b \notin Im(f)$ alors (e) n'admet aucune solution.
Si $b \in Im(f)$ alors (e) admet au moins une solution « particulière » x_0 et les solutions de (e) sont tous les éléments de E de la forme $x_0 + h$ tel que $h \in Ker(f)$ (i.e. h solution de l'équation homogène associée (eh): $f(x) = 0$)

Chap 19 : Matrices d'une application linéaire.

ICI $dimE = p$ et $dimF = n$. $B_1 = (e_1, e_2, .., e_p)$ une base de E et $B_2 = (v_1, v_2, .., v_n)$ une base de F.

- Définition d'une matrice d'une application linéaire de E dans F .

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $B_1 = (e_1, e_2, .., e_p)$ une base de E et B_2 une base de F. $mat_{B_1,B_2}f = mat_{B_2}(f(e_1), f(e_2), .., f(e_p))$
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $B = (e_1, e_2, .., e_p)$ une base de E . $mat_B f = mat_{B,B} f = mat_B(f(e_1), f(e_2), .., f(e_p))$.

- Propriété fondamentale permettant de calculer $f(\vec{x})$ à partir d'une matrice de f et celle de $\vec{x}$ .Et sa réciproque.

Propriété fondamentale
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $B_1 = (e_1, e_2, .., e_p)$ une base de E et B_2 une base de F.$\forall x \in E,\ mat_{B_2}f(x) = mat_{B_1,B_2}f \times mat_{B_1}(x)$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $B = (e_1, e_2, .., e_p)$ une base de E.$\forall x \in E,\ mat_B f(x) = mat_B f \times mat_B(x)$.
Réciproque : Soit f une application de E dans F.
S' il existe B_1une base de E et B_2 une base de F et $M \in M_{n,p}(K)$ telles que $\forall x \in E,\ mat_{B_2}f(x) = M \times mat_{B_1}(x)$ alors f est linéaire et $M = mat_{B_1,B_2}f$.

- Théorème d'isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $M_{n,p}(K)$.

∇: $\begin{pmatrix} \mathscr{L}(E,F) \to & M_{n,p}(K) \\ f \mapsto mat_{B_1,B_2}f \end{pmatrix}$est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ et $M_{n,p}(K)$ et $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension $dimE \times dimF$.

En particulier,

Toute matrice de $M_{n,p}(K)$ est la matrice d'une application linéaire.

$\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2, \forall (a,b) \in K^2,\ mat_{B_1,B_2}(af+bg) = a.mat_{B_1,B_2}f + b.mat_{B_1,B_2}g$.

f est l'application linéaire de E dans F canoniquement associée à la matrice $A \in M_{n,p}(K)$ lorsque $A = mat_{B_1,B_2}f$ où B_1base canonique de E et B_2base canonique de F i.e. lorsque $\forall x \in E,\ mat_{B_2}f(x) = A \times mat_{B_1}(x)$ où B_1base canonique de E et B_2base canonique de F.

f est l'endomorphisme de E canoniquement associée à la matrice $A \in M_p(K)$ lorsque lorsque $A = mat_B f$ où B base canonique de E i.e. lorsque f est l'application linéaire de E dans F telle que $\forall x \in E,\ mat_B f(x) = A \times mat_B(x)$ où B base canonique de E et B_2base canonique de F.

- Matrice d'une composée

$\forall f \in \mathscr{L}(E,F), \forall g \in \mathscr{L}(F,G),\ mat_{B_1,B_2}(g \circ f) = mat_{B_2,B_3}g \times mat_{B_1,B_2}f$ où B_1, B_2, B_3bases respectives de E, F et G

$\forall f \in \mathscr{L}(E), \forall k \in \mathbb{N}, mat_B(f^k) = (mat_B f)^k$ où B base de E.

- Caractérisation matricielle du rang.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F). rg\left(mat_{B_1,B_2}f\right) = rg(f)$.

- Caractérisation matricielle d'un isomorphisme

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. f est un isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow mat_{B_1,B_2}f$ est inversible . Et le cas échéant, $mat_{B_2,B_1}(f^{-1}) = \left(mat_{B_1,B_2}f\right)^{-1}$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. f est un automorphisme de $E \Leftrightarrow mat_B f$ est inversible . Et le cas échéant, $mat_B(f^{-1}) = (mat_B f)^{-1}$.

- Lecture matricielle de l'image. Recherche du noyau.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F). Im(f) = vect(\underbrace{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)}_{lecture\ dans\ les\ colonnes\ de\ mat_{B_1,B_2}f})$ et $Ker(f) = \{\sum_{k=1}^{p} x_i e_i . / mat_{B_1,B_2}f \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Méthode matricielle « tout en un » de détermination du rang puis d'une base de Imf et puis d'une base de $Kerf$ par opération sur les colonnes +théorème du rang.

- Formule de changement de bases pour les applications linéaires. Cas particulier d'un endomorphisme.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F), B_1, B_1'$ $deux\ bases\ de\ E\ et\ B_2, B_2' deux\ bases\ de\ F. mat_{B_1',B_2'}f = mat_{B_2'}B_2 \times mat_{B_1,B_2}f \times mat_{B_1}B_1'$

Soit $f \in \mathscr{L}(E), B, B'$ $deux\ bases\ de\ E$ $. mat_{B'}f = P^{-1} \times mat_{B_1,B_2}f \times P$ où $P = mat_{B_1}B_1'$ matrice de passage de B_1à B_1'.

Les matrices M et M' sont semblables lorsqu'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $M' = P^{-1} \times M \times P$.

Les matrices M et M' sont semblables sietssi M et M' sont des matrices d'un même endomorphisme.

- Deux caractérisations matricielles d'une projection vectorielle si E de dimension finie :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ $et\ M = mat_B p$ où B base quelconque de E.

p projection$\Leftrightarrow M^2 = M \Leftrightarrow$ il existe une base B' de E $mat_{B'}p = diag(1,..,1,0,..,0)$;

- Deux caractérisations matricielles d'une symétrie vectorielle dans le cas où E de dimension finie :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ $et\ M = mat_B s$ où B base quelconque de E.

s symétrie $\Leftrightarrow M^2 = I \Leftrightarrow$il existe une base B de E tq : $mat_B s = diag(1,..,1,-1,..,-1)$.

Question de cours

1) Soit $B = (\vec{e_i})_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E et $(\vec{y_i})_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Il existe une unique application linéaire f de E vers F qui vérifie : $\forall i \in I, f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$.
2) Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Démontrer que $Ker(u)$ est un ss-e-v de E et u est injective sietssi $Ker(u) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
3) Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Démontrer que $Im(u)$ est un ss-e-v de F et si $(e_1, e_2 \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $Im(u)$.
4) Démontrer le théorème du rang .
5) Soit $u\ et\ v$ deux endomorphismes de E . Soit $\lambda \in K\ et\ k \in \mathbb{N}$. Compléter et justifier :
   a) $u \circ v = 0 \Leftrightarrow \cdots$
   b) $Ker(u^k) \ldots Ker(u^{k+1})\ et\ Im(u^k) \ldots Im(u^{k+1})$.
   c) $Ker(u - \lambda id) = \{\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\}$
6) Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que : p est une projection $\Leftrightarrow p \circ p = p$. Le cas échéant, p est la projection sur $Im(p)$ et parallèlement à $Ker(p)$.
7) Connaitre et démontrer l'une des formules suivantes :

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et soit $g \in \mathscr{L}(F,G)$ et $\vec{x} \in E$. Soit B_1, B_1' deux bases de E, B_2, B_2' deux bases de F et B_3 une base de G.

- Changement de bases pour les vecteurs : $mat_{B_2}\vec{x} = mat_{B_2}B_1 \times mat_{B_1}\vec{x}$
- Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire : $mat_{B_2}f(\vec{x}) = mat_{B_1,B_2}f \times mat_{B_1}\vec{x}$.
- Matrice d'une composée d'applications linéaires : $mat_{B_1,B_3}(g \circ f) = mat_{B_2,B_3}g \times mat_{B_1,B_2}f$
- Matrice de l'isomorphisme réciproque : si f est un isomorphisme alors $mat_{B_2,B_1}(f^{-1}) = \left(mat_{B_1,B_2}f\right)^{-1}$
- Changement de bases pour les applications linéaires : $mat_{B_1',B_2'}f = mat_{B_2'}B_2 \times mat_{B_1,B_2}f \times mat_{B_1}B_1'$.

Savoir clairement énoncer les formules analogues dans le cas où f et g sont des endomorphismes d'une même K-e-v E.