PROBLEMES CORRIGES D'ALGEBRE LINEAIRE

Problème 1 On note $\mathscr{E}$ le $\mathbb{R}$-e-v des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $f \in \mathscr{E}$, on note $U(f)$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)dt$.

1. Soit $f \in \mathscr{E}$, T-périodique. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si f est T-périodique alors f' l'est aussi.

b) Justifier que la réciproque est fausse.

3. Montrer que pour tout $f \in \mathscr{E}$, $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4. Montrer que U qui à $f \in \mathscr{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

5. Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On note E_n, l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n et $\mathscr{B}_n = (f_0, f_1, f_2, .., f_n)$ où $f_k : (t \mapsto t^k)$ est la base canonique de E_n

5.1 Montrer que U induit un endomorphisme sur E_n que l'on note U_n.

5.2 Ecrire la matrice M de U_n dans $\mathscr{B}_n$.

5.3 U_n est-il bijectif ?

5.4 Démontrer que $U_n - id_{E_n}$ est nilpotent.

5.5 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que : $Ker(U_n - \lambda id_{E_n}) \neq \{O\} \Leftrightarrow \lambda = 1$.

6. Justifier que si l'élément f de $\mathscr{E}$ est dans $Ker(U)$ alors.

(i) $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

(ii) $f \text{ est } 1 - périodique$.

7. A-t-on $Ker(U) = \{f \in \mathscr{E} / f$ est 1 –périodique et $\int_0^1 f(t)dt = 0\}$?

8. Donner explicitement une fonction non nulle et élément de $KerU$ et en donner une représentation graphique sur $[-1,2]$.

9. L'endomorphisme U est -il surjectif ?

10. Soit a un réel non nul et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(t) = e^{at}$.

10.1 Déterminer $F_a = U(f_a)$.

10.2 Dresser le tableau des variations de $g : \left(x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}\right)$.

10.3 En déduire que pour tout réel λ strictement positif, il existe une fonction f non nulle telle que $U(f) = \lambda f$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \underbrace{\int_T^{a+T} f(t)dt}_{\overrightarrow{CV\, u=t-T}} = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^a f(u+T)dt = \int_0^T f(t)dt$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors $g : (x \mapsto f(x+T)) est\ dérivable\ sur\ \mathbb{R}$

c) Supposons que f est T-périodique. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)$ donc $g'(x) = f'(x)$ $i.e. f'(x+T) = f'(x)$. Ains, f' est T-périodique.

d) Trouvons un contre-exemple. Prenons $f(x) = \sin(x) + x$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \cos(x) + 1$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) + 1 = \cos(x) + 1 = f'(x)$ mais $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + x + 2\pi = f(x) + 2\pi \neq f(x)$. Donc f' est 2π –périodique mais f ne l'est pas.

3. Soit $f \in \mathscr{E}$; Alors le cours assure que f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = F(x) - F(x-1)$. Alors, comme F et $(x \mapsto x - 1)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(U(f))'(x) = F'(x) - F'(x-1) = f(x) - f(x-1).$$

4. Pour tout $f \in \mathscr{E}$, $U(f) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathrm{E}$.

De plus, $\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $U(af+bg)(x) = \int_{x-1}^{x} (af+bg)(t)dt = a\int_{x-1}^{x} f(t)dt + b\int_{x-1}^{x} g(t)dt = aU(f)(x) + bU(g)(x) = [aU(f) + bU(g)](x)$.

Donc $U(af+bg) = aU(f) + bU(g)$

Ainsi, U est un endomorphisme de E.

5.1. $Soit\ k \in [\![0,n]\!]$. $\forall x \in \mathbb{R}, U(f_k)(x) = \int_{x-1}^{x} t^k dt = \frac{1}{k+1}[x^{k+1} - (x-1)^{k+1}] = \frac{1}{k+1}\left[-\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} (-1)^{k+1-j} x^j\right] = \frac{1}{k+1}\left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} (-1)^{k-j} x^j\right]$. Donc $deg(U(f_k)) \leq k \leq n$. Par conséquent, par linéarité de U, l'image par U de toute combinaison linéaire des f_k tq $k \in [\![0,n]\!]$ est une combinaison linéaire des f_k tq $k \in [\![0,n]\!]$. Ainsi, E_n est stable par U et par suite U induit sur E_n un endomorphisme noté U_n.

5.2. $\forall k \in [\![0,n]\!], \forall x \in \mathbb{R}$, $U_n(f_k)(x) = \frac{1}{k+1}\left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} (-1)^{k-j} x^j\right] = \frac{1}{k+1}\left[(k+1)x^k + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} (-1)^{k-j} x^j\right]$

$= x^k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^{k-j} x^j = f_k(x) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^{k-j} f_j(x)$.

Donc, $U_n(f_k) = f_k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^{k-j} f_j$.

$$\text{Donc } M = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \overbrace{U_n(f_0)} & \overbrace{U_n(f_1)} & \overbrace{U_n(f_k)} & \overbrace{U_n(f_n)} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{0} & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{0} \\ 0 & 1 & & \\ \square & 0 & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{1} & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{1} \\ \square & \square & & \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{k-1} & \square \\ \vdots & \vdots & & \square \\ \square & \square & 1 & \square \\ \square & \square & 0 & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n-1} \\ \square & \square & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} f_0 \\ f_1 \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ f_n \end{matrix} \end{array}.$$

5.3.$\det(M) = 1$ donc M est inversible et par suite $U_n$est un automorphisme de E_n.

$$5.3.\ N = mat_{B_c}(U_n - Id_{E_n}) = M - I_{n+1} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \overbrace{(U_n-id)(f_0)} & \overbrace{(U_n-id)(f_1)} & \overbrace{(U_n-id)(f_k)} & \overbrace{(U_n-id)(f_n)} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{0} & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{0} \\ 0 & 0 & & \\ \square & 0 & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{1} & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{1} \\ \square & \square & & \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{k-1} & \square \\ \vdots & \vdots & & \square \\ \square & \square & 0 & \square \\ \square & \square & 0 & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n-1} \\ \square & \square & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} f_0 \\ f_1 \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ f_n \end{matrix} \end{array}$$

Soit $H(k)$ la propriété : $(U_n - id)^k(f_k) = 0$. Montrons par une récurrence forte et finie que $\forall k \in [\![0,n]\!], H(k)$ est vraie.

Initialisation : D'après la matrice N , $(U_n - id)^0(f_0) = 0$.

Propagation : Soit k un entier naturel inférieur à $n-1$. Supposons que : $\forall j \in [\![0,k]\!], (U_n - id)^j(f_j) = 0$. Montrons que $(U_n - id)^{k+1}(f_{k+1}) = 0$.

$$(U_n - id)^{k+1}(f_{k+1}) = (U_n - id)^k\left(\underbrace{(U_n - id)^{\square}(f_{k+1})}_{\substack{est\ une\ combi.linéaire \\ des\ f_0,f_1,\dots,f_k}}\right) = (U_n - id)^k\left(\sum_{j=0}^k a_j f_j\right) = \sum_{j=0}^k a_j \underbrace{(U_n - id)^k(f_j)}_{=0(**)} = 0 \text{ OK!!}$$

$= 0\ car$

(**)puisque $\forall j \in [\![0,k]\!], (U_n - id)^k(f_j) \underbrace{=}_{car\ j\le k} (U_n - id)^{k-j}((U_n - id)^j(f_j)) = (U_n - id)^{k-j}(0) = 0$.

CCL : $\forall k \in [\![0,n]\!], H(k)$ est vraie.Et par suite , $\forall j \in [\![0,k]\!], (U_n - id)^n(f_j) = 0.$ *L'endomorphisme* $(U_n - id)^n$ envoie tous les vecteurs de la base canonique sur 0. J'en dédeuis que l'endomorphisme $(U_n - id)^n$ *est nul*. $U_n - id$ est donc nilpotent.

5.4.Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$Ker(U_n - \lambda id_{E_n}) \neq \{O\} \Leftrightarrow U_n - \lambda id_{E_n}$ *n'est pas injectif* $\Leftrightarrow U_n - \lambda id_{E_n}$ *n'est pas bijectif* $\Leftrightarrow \det(M - \lambda I_{n+1}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{0} \\ 0 & 1-\lambda & \\ \square & 0 & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{1} \\ \square & \square & \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \vdots & \vdots & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n-1} \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^{n+1} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

6.$f \in Ker(U) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-1}^x f(t)dt = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{en\ prenant\ x=1} \int_0^1 f(t)dt = 0.$

$$f \in Ker(U) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-1}^x f(t)dt = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{où\ F\ est\ une\ primtipve\ de\ f\ sur\ \mathbb{R} \\ (F\ existe\ car\ f\ est\ continue\ sur\ \mathbb{R})}} \forall x \in \mathbb{R}, F(x) - F(x-1) = 0 \Leftrightarrow F\ est\ 1-périodique \underbrace{\Rightarrow}_{d'après 2)} f$$

$= F'est\ 1 - périodique$.

7.

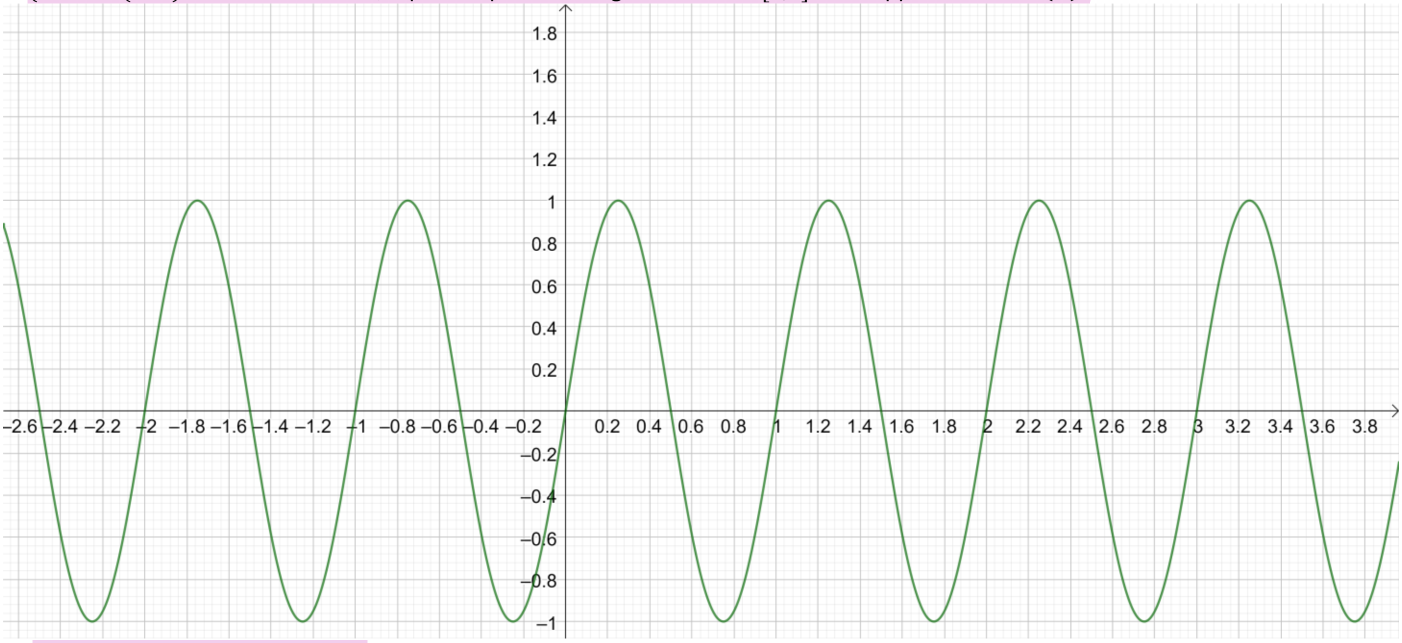
- On a montré dans la question 6. que $Ker(U) \subset \{f \in \mathscr{E} \ /f$ est 1 –périodique et $\int_0^1 f(t)dt = 0\}$.
- Soit $f \in \mathscr{E}$ telle que f est 1 –périodique et $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\int_{x-1}^x f(t)dt \underbrace{=}_{en\ applicaquant\ 1.\ avec\ a=x-1} \int_0^1 f(t)dt = 0$.Donc, $f \in Ker(U)$.

Ainsi, $\{f \in \mathscr{E} \ /f$ est 1 –périodique et $\int_0^1 f(t)dt = 0\} \subset Ker(U)$ et finalement :

$\{f \in \mathscr{E} \ /f$ est 1 –périodique et $\int_0^1 f(t)dt = 0\} = Ker(U)$.

8. $(x \mapsto \sin(2\pi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, 1-périodique et d'intégrale nulle sur $[0,1]$ donc appartient à $Ker(U)$.



8. U n'est pas surjective de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}$. En effet, nous avons prouvé que les images par U sont des fonctions de classe C^1. Or un élément de $\mathscr{E}$ n'est pas forcément de classe C^1 : par exemple, la valeur absolue est un élément de $\mathscr{E}$ qui n'est pas C^1 car pas dérivable en 0. Donc la fonction valeur absolue n'a pas d'antécédent par U.

10.1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_a(x) = U(f_a)(x) = \int_{x-1}^{x} e^{at}dt = \frac{1}{a}\left[e^{ax} - e^{a(x-1)}\right] = e^{ax}\left[\frac{e^{-a}-1}{-a}\right]$. Donc $U(f_a) = \left[\frac{e^{-a}-1}{-a}\right] f_a$.

10.2. $g : \left(x \mapsto \frac{e^x-1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ $et\ \forall x \neq 0, g'(x) = \frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$. Posons $h(x) = (x-1)e^x + 1$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $et\ \forall x, h'(x) = xe^x$. Donc $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Par conséquent, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$. Comme $h(0) = 0$, h est positive et ne s'annule qu'en 0 . Et par suite g' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$. Comme de plus, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \overset{T.A.}{=} 1$, g est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1 et son prolongement $\tilde{g}$ est strictement croissant sur $\mathbb{R}$.

10.3. $\tilde{g}$ est continue et strictement croissant sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \tilde{g}(x) = 0\ et \lim\limits_{x\to+\infty} \tilde{g}(x) = +\infty$. Par conséquent, $\tilde{g}$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors λ admet un unique antécédent a' par g et s'écrit donc sous la forme $\lambda = g(a') \underbrace{=}_{en\ posant\ a=-a'} g(-a) = \frac{e^{-a}-1}{-a}$. Alors, f_a vérifie $U(f_a) = \left[\frac{e^{-a}-1}{-a}\right] f_a = \lambda f_a$. Ainsi, pour tout réel λ strictement positif, il existe une fonction f non nulle telle que $U(f) = \lambda f$.

Problème 2

A toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on associe la fonction $T(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt & si\ x \neq 0 \\ f(0) & si\ x = 0 \end{cases}$.

Partie I : Exemples. Déterminer $T(f)$ dans les cas suivants :

1. $f(t) = t^2\cos(t^3-1)$
2. $f(t) = \cos(2t)\sin^3(t)$
3. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}$

Partie II : Etude de T sur E_n. Soit n un entier naturel. On note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

1. Donner une base et la dimension de E_n .
2. Montrer que E_n est stable par T. On note T_n l'endomorphisme de E_n induit par T.
3. Montrer que T_n est un automorphisme de E_n.
4. Déterminer tous les réels λ tels que : $\exists P \in E_n\backslash\{0\}, T_n(P) = \lambda P$.
5. Pour chacune des valeurs de λ trouvées précédemment, donner une base de $Ker(T_n - \lambda Id)$.

Partie III : Etude de T dans $C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $f \in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et est solution sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle : $xy' + y = f(x)$ d'inconnue y .
2. Etudier la continuité de $T(f)$ en 0.
3. Montrer que T définit un endomorphisme sur $C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Justifier que T est injective mais n'est pas surjective.
5. Déterminer $Ker\left(T - \frac{1}{2}Id\right)$.

Partie 1

1. Soit x un réel.

$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x t^2\cos(t^3-1)dt & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$. Alors, $\int_0^x t^2\cos(t^3-1)dt = \frac{1}{3}\int_0^x 3t^2\cos(t^3-1)dt = \frac{1}{3}[\sin(t^3-1)]_0^x$. Donc,

$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x}[\sin(t^3-1) + \sin(1)] & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.

2. $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x \cos(2t)\, sin^3(t)dt \ \ si\ x \neq 0 \\ 0 \ \ si\ x = 0 \end{cases}$.

$$\cos(2t)\, sin^3(t) = \frac{e^{i2t}+e^{-i2t}}{2}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{16i}\left(e^{i2t}+e^{-i2t}\right)\left(e^{i3t}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-i3t}\right)$$
$$= \frac{-1}{16i}\left(e^{i5t}-e^{-i5t}-3e^{3it}+3e^{-3it}+4e^{it}-4e^{-it}\right)$$
$= \frac{-1}{16i}(2isin(5t)-6isin(3t)+8isin(t)) = \frac{1}{8}(3\sin(3t)-\sin(5t)-4\sin(t))$.

Donc, $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{8x}\left(-\cos(3x)+\frac{1}{5}\cos(5x)+4\cos(x)-\frac{16}{5}\right) si\ x \neq 0 \\ 0 \ \ si\ x = 0 \end{cases}$

3. $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt \ \ si\ x \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ \ si\ x = 0 \end{cases}$

$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}}dt \overset{CV}{\underset{u=\frac{t}{\sqrt{2}}}{=}} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\sqrt{2}du = \left[\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\right]_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}\right) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)-\frac{1}{2}\ln(2)$.

Donc, $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)-\frac{1}{2}\ln(2)\right) si\ x \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ \ si\ x = 0 \end{cases}$

PARTIE 2

1. Posons $f_k: (t \mapsto t^k)$. La famille $B = (f_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$est une base de $E_n\ et\ dimE_n = n+1$.
2. T est linéaire . En effet, soit $(f,g) \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout réel x,

$T(af+bg)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x af(t)+bg(t)dt \ \ si\ x \neq 0 \\ af(0)+bg(0) \ \ si\ x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{a}{x}\int_0^x f(t)dt + \frac{b}{x}\int_0^x g(t)dt \ \ si\ x \neq 0 \\ af(0)+bg(0) \ \ si\ x = 0 \end{cases} = \begin{cases} aT(f)(x)+bT(g)(x)\ si\ x \neq 0 \\ aT(f)(0)+bT(g)(0) \ \ si\ x = 0 \end{cases}$

Donc, $T(af+bg) = aT(f)+bT(g)$.

De plus, Soit $k \in [\![0,n]\!]$. $T(f_k)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x t^k dt \ \ si\ x \neq 0 \\ 0\ pour\ k \geq 1\ et\ 1\ pour\ k = 0 \ \ si\ x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x}\frac{x^{k+1}}{k+1} \ \ si\ x \neq 0 \\ 0\ pour\ k \geq 1\ et\ 1\ pour\ k = 0 \ \ si\ x = 0 \end{cases} =$
$\begin{cases} \frac{x^k}{k+1} \ \ si\ x \neq 0 \\ 0\ pour\ k \geq 1\ et\ 1\ pour\ k = 0 \ \ si\ x = 0 \end{cases} = \frac{1}{k+1}f_k(x)$. Ainsi, $\forall k \in [\![0,n]\!], T(f_k) = \frac{1}{k+1}f_k$.

Par conséquent pour tout $\varphi = \sum_{k=0}^n a_k f_k \in E_n$, il existe des réels $a_k$tels que $\varphi = \sum_{k=0}^n a_k f_k$. $Alors,\ T(\varphi) = T(\sum_{k=0}^n a_k f_k) =$ $\sum_{k=0}^n a_k T(f_k) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{k+1} f_k = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} f_k \in E_n$ puisque $vect((f_k)_{k\in[\![0,n]\!]}) = E_n$. J'en conclus alors que $E_n$est stable par T et T induit un endomorphisme T_n sur E_n.

3. $T_n$envoie la base B sur la famille $B' = \left(\frac{1}{k+1}f_k\right)_{k=0..n}$.

Or B' est aussi une base de $E_n$puisque multiplier chaque vecteur d'une famille par un scalaire non nul n'altère ni le caractère générateur, ni la liberté de cette famille. $T_n$envoie donc une base de $E_n$sur une base de E_n. J'en déduis que $T_n$est un automorphisme de E_n.

4. Soit $\lambda \in K$.

$\exists P \in\ E_n\backslash\{0\}$ tels que $T_n\ (P) = \lambda P$
$\Leftrightarrow \exists P \in\ E_n\backslash\{0\}$ tels que $(T_n - \lambda id)(P) = 0 \Leftrightarrow \exists P \in\ E_n\backslash\{0\}$ tels que $P \in Ker\ (T_n - \lambda id)$
$\Leftrightarrow Ker\ (T_n - \lambda id) \neq \{0\} \Leftrightarrow T_n - \lambda id\ non\ injective \Leftrightarrow T_n - \lambda id\ non\ bijective$
$\Leftrightarrow \det(T_n - \lambda id) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathrm{mat}_B\,(T_n - \lambda id)) = 0$.

Or, $\mathrm{mat}_B\,(T_n - \lambda id)$= $\mathrm{mat}_B(T_n) - \lambda \mathrm{mat}_B(id) = \begin{bmatrix} 1 & & & (0) & \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{3} & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & & & (0) & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & & & (0) & \\ & \frac{1}{2}-\lambda & & & \\ & & \frac{1}{3}-\lambda & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{n+1}-\lambda \end{bmatrix}$.

Donc, $\det(\mathrm{mat}_B\,(T_n - \lambda id)) = (1-\lambda)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\ldots\left(\frac{1}{n+1}-\lambda\right)$. Ainsi, $\exists P \in\ E_n\backslash\{0\}$ tels que $T_n\ (P) = \lambda P \Leftrightarrow \lambda \in \left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\ldots;\frac{1}{n+1}\right\}$.

5. Soit $j \in [\![0,n]\!]\ et\ \lambda = \frac{1}{j+1}$. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k f_k \in E_n. Alors, T_n\ (P) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} f_k$.

Donc, $P \in Ker\left(T_n - \lambda Id_{E_n}\right) \Leftrightarrow T_n\ (P) = \frac{1}{j+1}P \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} f_k = \frac{1}{j+1}\sum_{k=0}^n a_k f_k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{j+1}\right) f_k = 0 \Leftrightarrow \forall k, a_k \left(\underbrace{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{j+1}}_{\neq 0\ si\ k\neq j}\right) = 0$.

Ainsi, $P \in Ker(T_n - \lambda Id_{E_n}) \Leftrightarrow\Leftrightarrow \forall k \neq j, a_k = 0$. Autrement dit, $Ker\left(T_n - \frac{1}{j+1}Id_{E_n}\right) = \{a_j f_j / a_j \in \mathbb{R}\} = vect\left(\underbrace{f_j}_{\substack{\neq 0\ donc \\ libre}}\right)$. Ainsi, (f_j) est une base de $Ker\left(T_n - \frac{1}{j+1}Id_{E_n}\right)$.

Partie 3

1. Comme $f \in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$, le cours assure que $F: \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right)$ est de classe C^1sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$ .Par conséquent, $T(f)$ est de classe C^1sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de deux fonctions $F\ et\ \left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)\ C^1$sur $\mathbb{R}^*$. De plus,

$\forall x \in \mathbb{R}^*, T(f)'(x) = -\frac{1}{x^2}F(x) + \frac{1}{x}F'(x) = -\frac{1}{x}T(f)(x) + \frac{1}{x}f(x)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, xT(f)'(x) + T(f)(x) = f(x)$. J'en conclus que $T(f)$ est solution sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle : $xy' + y = f(x)$.

2. $T(f)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$. Comme F est de classe C^1sur $\mathbb{R}$ et $F'=f$,$\lim_{x\to 0}T(f)(x)=F'(0)=f(0)=T(f)(0)$. Ainsi $T(f)$ est continue en 0.
3. T est linéaire et pour tout $f\in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $T(f)$: $\left(x\mapsto\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)$ est de classe C^1sur $\mathbb{R}^*$donc continue sur sur $\mathbb{R}^*$amis aussi continue en 0 donc finalement et pour tout $f\in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $T(f)\in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ainsi, T définit un endomorphisme sur $C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. T étant linéaire, décrivons le noyau de T pour étudier son injectivité. $Ker(T)$contient la fonction nulle. Soit $f\in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
$f\in Ker(T)\Leftrightarrow T(f)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\neq 0,\frac{1}{x}F(x)=0\\ f(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\neq 0,F(x)=0\\ f(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall x\neq 0,F'(x)=0\\ f(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall x\neq 0,f(x)=0\\ f(0)=0\end{cases}\Rightarrow f=0.$
Ainsi, $Ker(T)$ ne contient que la fonction nulle. Donc T est injective.
Nous avons montré que toutes les images par T sont de classe C^1sur $\mathbb{R}^*$. Par conséquent, la fonction u: $(x\mapsto|x-1|)$ qui appartient à $C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mais qui n'est pas de classe C^1sur $\mathbb{R}^*$. Par conséquent, u n'a pas d'antécédent par T. T n'est donc pas surjective de
$C°(\mathbb{R},\mathbb{R})sur\ C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
5. Soit $f\in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $f\in Ker\left(T-\frac{1}{2}Id\right)\Leftrightarrow T(f)=\frac{1}{2}f\ \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\forall x\neq 0,\frac{1}{x}F(x)=\frac{1}{2}f(x)\\ f(0)=\frac{1}{2}f(0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\neq 0,F'(x)-\frac{2}{x}F(x)=0\\ f(0)=0\end{cases}\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{a(x)=-\frac{2}{x}\\ A(x)=-2\ln(x)=-\ln(x^2)\\ e^{-A(x)}=x^2}}\begin{cases}\exists k\in\mathbb{R}/\forall x\neq 0,F(x)=kx^2\\ f(0)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\exists k\in\mathbb{R}/\forall x\neq 0,f(x)=2kx\\ f(0)=0\end{cases}\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{en\ posant\\ k'=2k}}\exists k'\in\frac{\mathbb{R}}{\forall x}\neq 0,f(x)=k'x\Leftrightarrow\exists k'\in\mathbb{R}/f=k'id_{\mathbb{R}}.$$

Ainsi, $Ker\left(T-\frac{1}{2}Id\right)=vect(id)$.

Problème 3 Soit l'application Δ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\Delta(P)=P(X+1)-P(X)$.
1. Montrer que si (P_n)est une suite de polynômes telle que: $\forall n,\deg(P_n)=n$ alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* base de $\mathbb{R}$[X].
2. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer $Ker(\Delta)$ et $Im(\Delta)$.
4. Montrer qu'il existe une et une seule famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $H_0=1\ et\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\Delta(H_n)=H_{n-1}\ et\ H_n(0)=0$.
5. Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une base de $\mathbb{R}[X]$.
6. Soit $p\in\mathbb{N}$ et $P\in\mathbb{R}_p[X]$. Montrer que $P=\sum_{n=0}^{p}(\Delta^n(P))(0)H_n$.
7. Montrer que : $\Delta^n(P)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(X+k)$ puis $(\Delta^nP)(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(k)$.
8. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,H_n=\frac{1}{n!}X(X-1)(X-2)..(X-n+1)$.

1. Soit (P_n) une suite de polynômes telle que: $\forall n,\deg(P_n)=n$. Montrons que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* base de $\mathbb{R}[X]$ i.e. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}$[X].

$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}$[X].
Liberté : Soit $n\in\mathbb{N}$. La famille $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$étant échelonnée en degré et sans polynôme nul, cette famille est libre. J'en déduis que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. Ajoutons aussi que la famille $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ de cardinal $n+1$, égal à dim $(\mathbb{R}_n[X])$; en conséquence, la famille $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Genèse : Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Considérons un entier $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq\deg(P)$. Alors $P\in\mathbb{R}_n[X]$. Comme $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, P s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$. Ainsi, tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est bien une combinaison linéaire des polynômes $P_n\ tq\ n\in\mathbb{N}$. J'en conclus que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]$.
Ainsi, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* base de $\mathbb{R}[X]$. En conséquence, tout polynôme de $\mathbb{R}$[X] s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. $\forall P\in\mathbb{R}[X]$, $\Delta(P)=P(X+1)-P(X)\in\mathbb{R}[X]$.

Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
$\Delta(aP+bQ)=\big(aP(X+1)+bQ(X+1)\big)-\big(aP(X)+bQ(X)\big)=a\big(P(X+1)-P(X)\big)+b\big(Q(X+1)-Q(X)\big)=a\,\Delta(P)+b\,\Delta(Q)$.
Ainsi, Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3. ***$Im(\Delta)$*** : Comme $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$, $(\Delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $Im(\Delta)$.

Or, $\Delta(X^n)=(X+1)^n-X^n=\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right]-X^n=\begin{cases}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}X^k\ si\ n\geq 1\\ 0\ si\ n=0\end{cases}$. Donc, $\deg\big(\Delta(X^n)\big)=\begin{cases}n-1\ si\ n\geq 1\\ -\infty\ si\ n=0\end{cases}$.
Par conséquent, $(\Delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est encore génératrice de $Im(\Delta)$. De plus, $(\Delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\deg\big(\Delta(X^n)\big)=n-1$; donc, d'après la première question, $(\Delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. J'en conclus que $Im(\Delta)=vect(\Delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}}=\mathbb{R}[X]$. J'en déduis que Δ est surjective de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}[X]$.
$Ker(\Delta)$: Il est évident que tout polynôme P constant vérifie $P(X+1)-P(X)=0$ et se trouve dans $Ker(\Delta)$. De plus, imaginons un instant que $Ker(\Delta)$ contienne un polynôme P non constant ; alors, d'après d' Alembert Gauss, P admet au moins un racine complexe a. Comme $\Delta(P)=0$, $P(X+1)=P(X)$. Alors, $P(a+1)\underbrace{=}_{car\ P(X+1)=P(X)}P(a)\underbrace{=}_{\substack{car\ a\\ racine\ de\ P}}0$. Puis $P(a+2)\underbrace{=}_{car\ P(X+1)=P(X)}P(a+1)\underbrace{=}_{\substack{car\ a\\ racine\ de\ P}}0$.
On montre alors facilement par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},P(a+n)=0$. Ainsi, tous les complexes $a+n$, tels que $n\in\mathbb{N}$, sont les racines de P. P a donc une infinité de racines et par suite, P est le polynôme nul ce qui contredit le fait que P n'est pas constant. J'en conclus que $Ker(\Delta)$ ne contient pas de polynôme non constant.
J'en conclus que $Ker(\Delta)$ est l'ensemble des polynômes constants i.e. $Ker(\Delta)=\mathbb{R}_0[X]$. J'en déduis que Δ *n'est pas injective.*

4. Posons $H_0=1$.

Initialisation : H_0 *existe.*

Comme Δ est surjective de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}[X]$, H_0 admet un antécédent T_0 par Δ et le cours assure que les polynômes T vérifiant $\Delta(T) = H_0$ sont les polynômes de la forme $T_0 + K$ tel que $K \in Ker(\Delta)$ i.e. de la forme $T_0 + \lambda$ tel que $\lambda \in \mathbb{R}$.
Or, $(T_0 + \lambda)(0) = 0 \Leftrightarrow T_0(0) + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -T_0(0)$.
Ainsi, $H_1 = T_0 - T_0(0)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\Delta(H_1) = H_0$ et $H_1(0) = 0$. Donc H_1 *existe* et est unique.
<u>Propagation :</u> Soit n un entier naturel. Supposons construis et uniques les polynômes $H_0, H_1, \dots, H_n$ $tels\ que$ $\forall k \in [\![1,n]\!], \Delta(H_k) = H_{k-1}$ et $H_k(0) = 0$. Construisons H_{n+1}:
Comme Δ est surjective de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}[X]$, H_n admet un antécédent T_n par Δ et le cours assure que les polynômes T vérifiant $\Delta(T) = H_n$ sont les polynômes de la forme $T_n + K$ tel que $K \in Ker(\Delta)$ i.e. de la forme $T_n + \lambda$ tel que $\lambda \in \mathbb{R}$.
Or, $(T_n + \lambda)(0) = 0 \Leftrightarrow T_n(0) + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -T_n(0)$.
Ainsi, $H_{n+1} = T_n - T_n(0)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\Delta(H_{n+1}) = H_n$ et $H_{n+1}(0) = 0$. Donc H_{n+1} *existe* et est unique.
<u>Conclusion :</u> il existe une et une seule famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $H_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(H_n) = H_{n-1}$ et $H_n(0) = 0$.

9. Nous allons appliquer le résultat démontré au 1. Pour cela, il faut prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, deg(H_n) = n$.

<u>Tout d'abord,</u> montrons que $\forall P \in \mathbb{R}[X], non\ constant,, \deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$. J'ai prouvé que $\forall k \in \mathbb{N}, \deg\left(\Delta(X^k)\right) = \begin{cases} k-1\ si\ k \geq 1 \\ -\infty\ si\ k = 0 \end{cases}$. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ tq $\deg(P) = n \geq 1$ et $a_n \neq 0$. Alors, $\Delta(P) \underbrace{=}_{\substack{car \\ \Delta\ linéaire}} \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta(X^k)$.
Comme $a_n \neq 0, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \deg(a_n\Delta(X^n)) = \deg(\Delta(X^n)) = n - 1 > k - 1 = \deg\left(\Delta(X^k)\right) \geq \deg\left(a_k\Delta(X^k)\right)$
Par conséquent, $deg\Delta(P) = \deg(P) - 1$. Ainsi, $\forall P \in \mathbb{R}[X], non\ constant,, \deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$
<u>Ensuite,</u> montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, deg(H_n) = n$.
Initialisation : H_0 est constant non nul donc $deg(H_0) = 0$.
Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $deg(H_n) = n$. Alors $n = deg(H_n) = deg(\Delta(H_{n+1})) = deg(H_{n+1}) - 1$. Donc, $deg(H_{n+1}) = n + 1$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, deg(H_n) = n$.
Alors, d'après la question 1., je peux conclure que : $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une base de $\mathbb{R}[X]$.

10. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_p[X]$.

$(H_n)_{n\in[\![0,p]\!]}$est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_p[X]$ de cardinal $p + 1$, égal à $\dim(\mathbb{R}_p[X])$. De plus, cette famille est extraite de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$qui est libre (car base de $\mathbb{R}[X]$); par conséquent, $(H_n)_{n\in[\![0,p]\!]}$est libre. J'en conclus que $(H_n)_{n\in[\![0,p]\!]}$est une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Donc P s'écrit comme combinaison linéaire des polynômes $H_0, H_1, \dots, H_p$. Il existe donc des uniques réels $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que : $P = \sum_{n=0}^{p} \alpha_n H_n$.
Alors $\forall k \in [\![0, p]\!], \Delta^k(P) \underbrace{=}_{\substack{car \\ \Delta^k\ linéaire}} \sum_{n=0}^{p} \alpha_n \Delta^k(H_n) \underbrace{=}_{\substack{car\ si\ k>n, \\ \Delta^k(H_n)=0}} \sum_{n=k}^{p} \alpha_n \Delta^k(H_n) \underbrace{=}_{\substack{car \\ \Delta(H_n)=H_{n-1} \\ \Delta^2(H_n)=\Delta(H_{n-1})=H_{n-2} \\ \vdots \\ \Delta^k(H_n)=H_{n-k}}} \sum_{n=k}^{p} \alpha_n H_{n-k}$ et par suite,

$\Delta^k(P)(0) = \sum_{n=k}^{p} \alpha_n H_{n-k}(0) \underbrace{=}_{car\ si\ l\geq 1, H_l(0)=0} \alpha_k H_0(0) = \alpha_k$. Ainsi, $P = \sum_{n=0}^{p} (\Delta^n(P))(0) H_n$.

11. Montrer par récurrence sur n que : $\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X + k)$.

Initialisation : $\Delta^0(P) = P = (-1)^{0-0}\binom{0}{0} P(X + 0) = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X + k)$.

Propagation : Soit n un entier naturel. Supposons que $\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X + k)$.

Alors $\Delta^{n+1}(P) = \Delta(\Delta^n(P)) = \Delta\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X + k)\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \Delta(P(X + k))$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (P(X + k + 1) - P(X + k)) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X + k + 1) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X + k)$$

Changement d'indice $j = k + 1$ sur la première

$$= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n-j+1} \binom{n}{j-1} P(X + j) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X + k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n-j+1} \binom{n}{j-1} P(X + j) - \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X + j)$$

On isole le dernier terme de la 1ère somme et le premier terme de la 2ème somme.

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j+1} \binom{n}{j-1} P(X + j) - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X + j) + (-1)^0 \binom{n}{n} P(X + n + 1) - (-1)^n \binom{n}{0} P(X)$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j+1} \binom{n}{j-1} P(X + j) - (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X + j)\right] + (-1)^0 \binom{n}{n} P(X + n + 1) - (-1)^n \binom{n}{0} P(X)$$

Formule de Pascal

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j+1} [\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}] P(X + j)\right] + (-1)^0 \binom{n}{n} P(X + n + 1) + (-1)^{n+1} \binom{n}{0} P(X)$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j+1} \binom{n+1}{j} P(X + j)\right] + P(X + n + 1) + (-1)^{n+1} P(X)$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n-j+1} \binom{n+1}{j} P(X + j)\right]\ OK\ !!!$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X + k)$.

Par suite, $(\Delta^n P)(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k)$.

12. Posons $V_0 = 1 = H_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \frac{1}{n!} X(X-1)(X-2)..(X-n+1)$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n(0) = 0$ et

$V_1 = X$ *donc* $\Delta(V_1) = X + 1 - X = 1 = V_0 = H_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}, \Delta(V_n) = V_n(X+1) - V_n(X) = \left(\frac{1}{n!}(X+1)X(X-1)..(X+1-n+1)\right) - \left(\frac{1}{n!}X(X-1)(X-2)..(X-n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{n!}X(X-1)(X-2)..(X+2-n)[(X+1)-(X-n+1)]$$

$$= \frac{1}{n!}X(X-1)(X-2)..(X+2-n)[n] = \frac{1}{(n-1)!}X(X-1)(X-2)..(X-(n-1)+1) = V_{n-1}$$

Donc, la suite (V_n) vérifie $V_0 = 1 = H_0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n(0) = 0$ et $\Delta(V_n) = V_{n-1}$. Donc, par l'unicité de la suite (H_n), la suite (V_n) est la suite (H_n). J'en conclus que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \frac{1}{n!}X(X-1)(X-2)..(X-n+1)$.

Problème 4

Soit Ψ l'application qui, à une fonction f, associe sa dérivée f'.

1. Montrer que Ψ est un endomorphisme de $F = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Est-ce un automorphisme de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Soit E L'ensemble des fonctions de la forme $\left(x \mapsto \tilde{P}(x)\cos(x) + \tilde{Q}(x)\sin(x)\right)$où P *et* Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$.

3. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Montrer que $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E.
   où $f_1: (x \mapsto \sin(x))$ $f_2: (x \mapsto x\sin(x))$ $f_3: (x \mapsto \cos(x))$ *et* $f_4: (x \mapsto x\cos(x))$.
5. Montrer que E est stable par Ψ. On note D l'endomorphisme de E induit par Ψ. On note Id_E l'application identité sur E.
6. Montrer que D est un automorphisme de E .
7. Déterminer, selon les valeurs du réel λ, le rang de $D^2 - \lambda Id_E$.
8. Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de $D^2 + Id_E$.
9. En déduire que $D^4 + 2D^2 + Id_E$ est l'application nulle de E.
10. Retrouver alors que D est bijective et calculer D^{-1} en fonction de D.

On note V le sous-espace de $\mathscr{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2.

11. Déterminer la dimension de V.
12. Vérifier que V est stable par composition.
13. Montrer que les éléments de V bijectifs sont les éléments de la forme : $\alpha Id_E + \beta\, D^2$ tel que α *et* β réels distincts.
14. Résoudre dans **R** l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.
15. Déterminer le noyau de $\Psi^2 + Id_F$.
16. Montrer que E est le noyau de $(\Psi^2 + Id_F)^2$.
17. Conclure que E est exactement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$.

1. $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), f' \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $(f,g) \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ *et* a, *et* b *réels* , $\Psi(\mathrm{af} + \mathrm{bf}) = (af + bg)' = af' + bg'f) = a\Psi(\mathrm{f}) + b\Psi(\mathrm{g})$. Ainsi, Ψ est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Non, Ψ n'est pas un automorphisme de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$ donc Ψ n'es pas injective.
3. $E = \{\left(x \mapsto \tilde{P}(x)\cos(x) + \tilde{Q}(x)\sin(x)\right) / \, P\,, Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$={ $(x \mapsto (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x))/a, b, c, d$ réels}

$E = \{af_4 + bf_3 + cf_2 + df_1/a, b, c, d$ réels $\}$. Ainsi, $E = vect(f_1, f_2, f_3, f_4)$. Comme (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille de vecteurs de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, E est le ss-e-v de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par (f_1, f_2, f_3, f_4).

4. Montrons que (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre : Soit a, b, c, d réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$=0.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, a\sin(x) + bx\sin(x) + c\cos(x) + dx\cos(x) = 0$.

En particulier pour $x = 0, c = 0$.Puis pour $x = \pi, -c - d\pi = 0$ donc $d = 0$. Puis pour $x = \frac{\pi}{2}$ *puis* $x = -\frac{\pi}{2}, a + b\frac{\pi}{2} = 0$ *et* $-a + b\frac{\pi}{2} = 0$ docn $a = b = 0$. Ainsi, (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre et est une base de E. J'en déduis que $\dim(E) = 4$.

5. Soit f un élément de E. Alors il existe a, b, c et d réels tels que : $f = (af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4)$.

Ψ étant linéaire, $\Psi(af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4) = a\Psi(f_1) + b\Psi(f_2) + c\Psi(f_3) + d\Psi(f_4)$.

Or, $\Psi(f_1) = f_3$, $\Psi(f_2) = f_1 + f_4, \Psi(f_3) = -f_1$ *et* $\Psi(f_4) = -f_2 + f_3$. Donc, $\Psi(f_1), \Psi(f_2), \Psi(f_3)$ *et* $\Psi(f_4)$ sont dans E.

Comme E est stable par combinaison linéaire, , $\Psi(af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4) = a\Psi(f_1) + b\Psi(f_2) + c\Psi(f_3) + d\Psi(f_4). \in E$. J'en conclus que E est stable par Ψ. Par conséquent D: $\begin{pmatrix} E \to E \\ f \mapsto f' \end{pmatrix}$ est l'endomorphisme de E induit par Ψ .

6. 1[ère] méthode matricielle : $M = mat_B D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $M \sim_c \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $rgM = 4$. Donc M est inversible et ainsi D est un automorphisme de E.
7. 2[ème] méthode par le noyau : Ker(D) contient la fonction nulle ω car $D(\omega) = \omega' = \omega$. Soit f un élément de E. Alors il existe a, b, c et d réels tels que : $f = (af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4)$ *et* $\Psi(f) = \omega$.

Ψ étant linéaire, $\Psi(f) = \Psi(af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4) = a\Psi(f_1) + b\Psi(f_2) + c\Psi(f_3) + d\Psi(f_4) = af_3 + bf_1 + bf_4 - cf_1 - df_2 + df_3$.

Alors, $(a+d)f_3 + (b-c)f_1 + bf_4 - df_2 = \omega$. Comme Best libre, nécessairement, $a + d = b - c = b = -d = 0$ et par suite, $a = b = c = d = 0$. Ainsi, $Ker(D) = \{\omega\}$. D est donc injective. Comme E est de dimension finie et d est un endomorphisme de E, l'injectivité de D suffit à conclure que ainsi D est un automorphisme de E.

8. $mat_B(D^2 - \lambda Id_E) = mat_B(D^2) - \lambda mat_B(Id_E) = M^2 - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda I_4 = \underbrace{\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire inférieure}}$.

   Si $\lambda = -1$ alors $rgD^2 - \lambda Id_E = 1$ car $M^2 - \lambda I_4$ne contient qu'une colonne non nulle.
   Si $\lambda \neq -1$ alors $rgD^2 - \lambda Id_E = 4$. Car $M^2 - \lambda I_4$est triangulaire avec aucun coeff. de la diagonale nul.
9. $rgD^2 + Id_E = 1$. Donc le théorème du rang assure que $\dim Ker(D^2 + Id_E) = 3$.

De plus, $mat_B D^2 + Id_E = M^2 + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, f_1, f_3, f_4 *sont éléments de* $Ker(D^2 + Id_E)$. De pkus, la famille , (f_1, f_3, f_4) étant extraite de la famille libre B , est libre aussi et maximale dans $Ker(D^2 + Id_E)$. Ainsi, (f_1, f_3, f_4) est une base de $Ker(D^2 + Id_E)$.

De plus, $(D^2 + Id_E)(f_2) = 2f_3$ donc $(D^2 + Id_E)\left(\frac{1}{2}f_2\right) = f_3$. Ainsi, $f_3 \in Im(D^2 + Id_E)$. Comme f_3 est non nul , (f_3) est libre et maximale dans $Im(D^2 + Id_E)$.Ainsi (f_3) est une base de $Im(D^2 + Id_E)$.

10. Comme $f_3 \in Ker(D^2 + Id_E), vect(f_3) = Im(D^2 + Id_E) \subset Ker(D^2 + Id_E)$ (*car* $Ker(D^2 + Id_E)$ *est table par c.l.*). J'en déduis que que $(D^2 + Id_E) \circ (D^2 + Id_E) = 0$ ce qui donne : $D^4 + 2D^2 + Id_E = 0$.

    Rque : on aurait pu démontrer ce résultat matriciellement en prouvant, par le calcul, que $M^4 + 2M^2 + Id_E = 0$.
11. Alors, $(-D^3 - 2D^1) \circ D = Id_E = D \circ (-D^3 - 2D^1)$. Donc D bijectif et $D^{-1} = (-D^3 - 2D^1)$.
12. $V = vect(D^2, id)$. Comme D^2 et id sont des éléments de de $\mathscr{L}(E)$, V est un ss-e-v de $\mathscr{L}(E)$, est le ss-e-v de $\mathscr{L}(E)$ engendré par D^2 et Id_E. De plus, D^2 et Id_E ne sont pas colinéaires puisque M^2 et I_4 ne le sont pas ; ainsi, (D^2, id) est une base de V. Donc $dimV = 2$.
13. $(aD^2 + bid_E) \circ (a'D^2 + b'id_E) = aa'D^4 + (ab' + a'b)D^2 + bb'id_E = aa'(id_E - 2D^2) + (ab' + a'b)D^2 + bb'id_E$

$= (-2aa' + ab' + a'b)D^2 + (aa' + bb')id \in V$. Donc V est stable par composition.

14. Soit $u = aD^2 + bid_E \in V$.

$mat_B u = aM^2 + bI_4 = \begin{pmatrix} -a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+b & 0 & 0 \\ 0 & 2a & -a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a+b \end{pmatrix}$. *Et* $\det(aM^2 + bI_4) = (b-a)^4$. Donc

Alors, u *bijective* $\Leftrightarrow aM^2 + bI_4$ *inversible* $\Leftrightarrow \det(aM^2 + bI_4) \neq 0 \Leftrightarrow b \neq a$.

Ainsi, les éléments bijectifs de V sont les endomorphismes $aD^2 + bid_E$ *tq* $b \neq a$.

15. Les solutions de $y'' + y = 0$ sont toutes les fonctions de la forme $\alpha cos + \beta sin$ tq α, β réels . Ce sont donc toutes les combinaisons linéaires de f_1 *et* f_3. Toutes les solutions de cette équation différentielles sont dans $F = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
16. Soit $f \in F$.

$f \in Ker(\psi^2 + Id_F) \Leftrightarrow f'' + f = 0 \Leftrightarrow f \in vect(f_1, f_3)$. Ainsi, $Ker(\psi^2 + Id_F) = vect(f_1, f_3)$.

17. Soit $f \in F$.

$f \in Ker((\psi^2 + Id_F)^2) \Leftrightarrow (\psi^4 + 2\psi^2 + Id_F)(f) = 0 \Leftrightarrow (\psi^2 + Id_F)((\psi^2 + Id_F)(f)) = 0 \Leftrightarrow (\psi^2 + Id_F)(f) \in Ker(\psi^2 + Id_F)$

$\Leftrightarrow (\psi^2 + Id_F)(f) \in vect(f_1, f_3)$.

$\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / f'' + f = \alpha f_1 + \beta f_3$.

$\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$

Résolvons l'équation différentielle : $(edl2): y'' + y = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$

$Sol(edl2H) = vect(f_1, f_3)$.

Solution particulière ?

Cherchons une solution particulière de $(edl2)$de la forme $g: (x \mapsto (Ax + B)\sin(x) + (Cx + D)\cos(x))$ tq A, B, C, D réels à déterminer.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) + g(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (2A - D - Cx)\cos(x) - (2C + B + Ax)\sin(x) + (Ax + B)\sin(x) + (Cx + D)\cos(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (2A - \beta)\cos(x) - (2C + \alpha)\sin(x) = 0$

$\underset{\substack{car\ la\ famille \\ (\cos,\sin) est\ libre}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2A - \beta = 0 \\ 2C + \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2}\beta \\ C = \frac{1}{2}\alpha \end{cases}$. Donc, $g: \left(x \mapsto \left(\frac{1}{2}\beta x\right)\sin(x) + \left(\frac{1}{2}\alpha x\right)\cos(x)\right)$ est une solution particulière de notre équation différentielle $(edl2)$. Ainsi, les solutions de $(edl2)$ sont toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto \left(\frac{1}{2}\beta x + k\right)\sin(x) + \left(\frac{1}{2}\alpha x + k'\right)\cos(x)\right)$ tq k et k' réels .

Alors, $f \in Ker((\psi^2 + Id_F)^2) \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 et \exists(k, k') \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{1}{2}\beta x + k\right)\sin(x) + \left(\frac{1}{2}\alpha x + k'\right)\cos(x)$

$\Leftrightarrow \exists(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2 et \exists(k, k') \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (\beta' x + k)\sin(x) + (\alpha' x + k')\cos(x)$

$\Leftrightarrow f \in vect(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Ainsi, $Ker((\psi^2 + Id_F)^2) = vect(f_1, f_2, f_3, f_4) = E$.

18. Tout d'abord , on montre facilement par récurrence qu'une solution de $(edl4) = f^{(4)} + 2f^{(2)} + f = 0$ est de classe $C^\infty sur\ \mathbb{R}$.

Soit $f \in F. f^{(4)} + 2f^{(2)} + f = 0. \Leftrightarrow (\psi^4 + 2\psi^2 + Id_F)(f) = 0 \Leftrightarrow f \in Ker((\psi^2 + Id_F)^2)$. Donc, $Ker((\psi^2 + Id_F)^2)$ est l'ensemble des solutions de $(edl4)$. Alors d'après la question précédente , je peux conclure que E est exactement l'ensemble des solutions de $f^{(4)} + 2f^{(2)} + f = 0$. Ainsi , $Sol(edl4) = vect(f_1, f_2, f_3, f_4) = E$