Corrigé TD 19 Applications linéaires.

Sont-elles linéaires ? Si oui, trouver une base du noyau et une base de l'image.

1. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ $par : f(P) = P(2)P'(1)$.
2. u définie sur $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})par : u(f) = f' + 2f$.
3. u définie sur $M_n(\mathbb{C})par : u(M) = \det(M)$.
4. $Soit\ D = diag(a, b)$ où a et b complexes fixés et u définie sur $M_2(\mathbb{C})$ par : $u(M) = DM^T$.
5. Ψ définie sur $\mathbb{R}^2 par : \Psi\big((x, y)\big) = (x - 3y, 2x^2 - y)$.
6. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ $par : f(P) = P + XP' + 1$.
7. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ $par : f(P) = P + P'(1)X$.
8. u définie sur $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})par : u(f) = 2f(0)f''$.
9. Ψ définie sur $\mathbb{R}^4$ $par : \Psi\big((x, y, z, t)\big) = 4y - x + t$.

Réponses : N,O,N,O,N,N,O,N,O

Montrer que f est linéaire et déterminer $Kerf$, Imf et rgf. f est-elle injective ? surjective ? f est-elle un automorphisme ? un isomorphisme ?

1. Soit $\varphi : C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par : $\varphi(f) = g$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x tf(t)dt$.
2. Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \ u\ convergente\}\ et$ φ définie sur E par : $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Soit φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\varphi(P) = P'(2) + 4P^{(3)}(2)$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et φ application définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par : $\varphi(X) = AX - XA$.
5. Soit φ application définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = tr(M)$.
6. Soit φ application définie sur $M_3(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = M - tr(M)I$.
7. Soit φ application définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = M - M^T$.

Soit E un K-e-v de dimension 3 rapporté à une base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3},)$ et $u \in L\ (E)$ telle que :
$u(\vec{e_1}) = 4\vec{e_1} - 2\vec{e_2} - 4\vec{e_3}, u(\vec{e_2}) = -\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}\ et\ u(\vec{e_3}) = 5\vec{e_1} - \vec{e_2} - 5\vec{e_3}$.

a. Déterminer le rang de u.
b. $Ker(u)\ et\ Im(u)$ sont -ils supplémentaires dans E ?
c. $Ker(u^2)\ et\ Im(u^2)$ sont-ils supplémentaires dans E ?

Ex 3 .2

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à J la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients valent 1.

a. Montrer que $ker(\varphi) \oplus Im(\varphi) = \mathbb{R}^3$.

b. Soit p la projection sur $Ker\ \varphi$ et parallèlement à $Im\ \varphi$ et q la projection associée. Déterminer $p((x, y, z))\ et\ q((x, y, z))$.

Corrigé : https://youtu.be/3GSsoCyknH8

φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à J la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients valent 1 ; cela signifie que

$J = mat_{B_c}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $B_c = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$.

a. $rg\varphi = rgJ = 1\ et\ Im(\varphi) = vect\Big(\varphi\big((1,0,0)\big), \varphi\big((0,1,0)\big), \varphi\big((0,0,1)\big)\Big) \overset{\substack{car\ \varphi((1,0,0))=\varphi((0,1,0)) \\ =\varphi((0,0,1))=(1,1,1)}}{\triangleq} vect\big((1,1,1)\big)$.

Comme $(1,1,1)$ est non nul , $((1,1,1))$ est une base de $Im(\varphi)$.

Le théorème du rang assure que : dim $(Ker\varphi) = dim\ \mathbb{R}^3 - rg\varphi = 3 - 1 = 2$. De plus, $\varphi\big((1,0,0)\big) - \varphi\big((0,1,0)\big) = (0,0,0)$
Donc, comme $\varphi\ linéaire$, $\varphi\big((1, -1,0)\big) = (0,0,0)$. De même, $\varphi\big((0,1,0)\big) - \varphi\big((0,0,1)\big) = (0,0,0)$ donc $\varphi\big((0,1, -1)\big) = (0,0,0)$. Donc, $(1, -1,0)$ et $(0,1, -1)$ sont deux vecteurs de $Ker\varphi$, clairement non colinéaires. Donc, $((1, -1,0), (0,1, -1))$ est libre dans $Ker\varphi$ et de cardinal 2 égal à dim $(Ker\varphi)$. Donc, $((1, -1,0), (0,1, -1))$ est une base de $Ker\varphi$.

Vérifions que la concaténation des deux bases respectivement $Ker\varphi$ et $Im\varphi$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $B = ((1,1,1), (1, -1,0), (0,1, -1))$

$P = mat_{B_c}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Donc, $rgB = rgP = 3$ et ainsi, B est une base de $\mathbb{R}^3$. J'en conclus que : $ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.

b. $Soit\ X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Décomposons X en une somme d'un vecteur de $ker(f)$ et d'un vecteur de $Im(f)$. Je cherche donc des réels a, b et c tels que $(x, y, z) = a(1,1,1) + b(1, -1,0) + c\,(0,1, -1)$.

$$(x, y, z) = a(1,1,1) + b(1, -1,0) + c\,(0,1, -1)) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ a - b + c = y \\ a - c = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = x - a \\ a - x + a + a - z = y \\ c = a - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = x - \dfrac{1}{3}(x + y + z) \\ a = \dfrac{1}{3}(x + y + z) \\ c = \dfrac{1}{3}(x + y + z) - z \end{cases}.$$

Donc, $(x, y, z) = \underbrace{\tfrac{1}{3}(x + y + z)(1,1,1)}_{\in Im(\varphi)} + \underbrace{\left(\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}z\right)(1, -1,0) + \left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{2}{3}z\right)(0,1, -1)}_{\in Ker(\varphi)}$.

Donc $p((x, y, z)) = \left(\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}z\right)(1, -1,0) + \left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{2}{3}z\right)(0,1, -1)\ et\ q\big((x, y, z)\big) = \tfrac{1}{3}(x + y + z)(1,1,1)$.

1. Déterminer l'unique forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$telle que: $f\big((1,1,1)\big) = 0, f\big((2,0,1)\big) = 1$ et $f\big((1,2,3)\big) = 4$.
3. Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est $vect\big((1,0,0),(1,1,1)\big)$.
4. Soit $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ dont le noyau est H ?

Soit u définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $u(P) = P + (1 - X)P'$.
1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$..
2. Montrer que $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Calculer $u^2(P)$. Montrer que $Im(u) = Im(u^2)$.
4. Déterminer $s(A + bX + cX^2 + dX^3)$ où s est la symétrie par rapport à $Im(u)$ et parallèlement à $Ker(u)$.

Soit u définie par :$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.
1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer une base de $Im(u)$ et une base de $Ker(u)$.
3. Soit $Q \in Im(u)$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $u(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Ex 7 Pour tout polynôme P, $\varphi(P) = (X^2 - 1)P''(X) - 2XP'(X)$.
1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P.
3. En déduire que φ n'est ni injective ni surjective de $\mathbb{R}[X]$sur $\mathbb{R}[X]$.
4. Justifier que φ induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_2[X]$ noté g. g est-il un automorphisme ?
5. Déterminer l'image et le noyau de g .
6. Soit λ un $réel$. Montrer que $g - \lambda id$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, sauf pour un nombre fini de valeurs de λ que l'on précisera.
7. Montrer que $Ker(g) \oplus Ker(g + 2id) = \mathbb{R}_2[X]$.

Corrigé https://youtu.be/-TYxP8rHsnw?si=umZdnKXEai7gipEf

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\varphi(P) = (X^2 - 1)P''(X) - 2XP'(X) \in \mathbb{R}[X]$.
Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
$\varphi(aP + bQ) = (X^2 - 1)\big(aP''(X) + bQ''(X)\big) - 2X\big(aP'(X) + bQ'(X)\big) = a(X^2 - 1)P'' + b(X^2 - 1)Q'' - a(2XP') - b(2XQ') = a\varphi(P) + b\varphi(Q)$.
Donc, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $degP = d$.

- Supposons $degP = d \geq 2$. Alors il existe un réel $a \neq 0$ et un $polynôme$ Q tel que $\deg(Q) < d$ et $P = aX^d + Q$.

Alors, $\varphi(P) = (X^2 - 1)[ad(d-1)X^{d-2} + Q''] - 2X[adX^{d-1} + Q'] = a[d^2 - 3d]X^d + (X^2 - 1)Q'' - 2XQ'$.
Comme $\deg(Q) < d$, $\deg(Q'') < d - 2$ et $\deg(Q') < d - 1$ et par suite, $\deg\big((X^2 - 1)Q''\big) = \deg(X^2 - 1) + degQ'' < d$ et $\deg(2XQ') = \deg(2X) + \deg(Q') < d$. Alors $\deg \varphi(P) \leq d = \deg(P)$.

- Si $[d^2 - 3d] \neq 0$ i.e. $d \neq 3$ et $d \geq 2$ et alors $\deg \varphi(P) = d = \deg(P)$.
- Si $d = 3$ alors $\deg \varphi(P) < 3 = \deg(P)$.Précisons ce degré : posons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

Alors $\varphi(P) = (X^2 - 1)(6aX + 2b) - 2X(3aX^2 + 2bX + c) = -2bX^2 - 2(3a + c)X - 2b$. Donc $\deg\big(\varphi(P)\big) = \begin{cases} 2 \; si \; b \neq 0 \\ 1 \; si \; b = 0 \; et \; c \neq -3a \\ -\infty \; si \; b = 0 \; et \; c = -3a \end{cases}$.

- Supposons $d \leq 0$ i.e. P est constant. Alors $\varphi(P) = 0$ Donc $\deg\big(\varphi(P)\big) = -\infty$.
- Supposons $d = 1$ et $P = aX + b$ avec $a \neq 0$ alors $\varphi(P) = 2aX$; donc $\deg\big(\varphi(P)\big) = 1 = deg(P)$.

3.Tout polynôme constant a une même image nulle. Donc $Ker(\varphi)$ contient tous les polynômes constants et contient donc des vecteurs non nuls et φ n'est pas injective.
$\varphi(P)$ n'étant jamais de degré 3, les polynômes de degré 3 n'ont pas d'antécédent par φ. Donc φ n'est pas surjective.
4. D'après ce qui précède, Si $\deg(P) \leq 2$ alors $\deg(\varphi(P)) \leq 2$. Donc $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par φ.
Ainsi, $g: \begin{pmatrix} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto (X^2 - 1)P''(X) - 2XP'(X) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Soit $P = aX^2 + bX + c$. Alors, $g(P) = (X^2 - 1)2a - 2X(2aX + b) = -2aX^2 - 2bX - 2a$.
Donc, $P \in Ker(g) \Leftrightarrow g(P) = 0 \Leftrightarrow -2aX^2 - 2bX - 2a = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow P = c$.
Donc $Ker(g) = vect(1)$. Comme $1 \neq 0$, (1) est une base de $Ker(g)$. Alors dim $(Ker(g)) = 1$ et par le théorème du rang, $rg(g) = dim\mathbb{R}_2[X] - dimKer(g) = 3 - 1 = 2$. Or, $g(X) = -2X$ et $g(X^2) = -2X^2 - 2$ sont deux vecteurs de $Im(g)$ linéairement indépendants (car de degré différents) donc $(-2X, -2X^2 - 2)$ est une base de $Im(g)$.
6. Soit $B_c = (1, X, X^2)$ base de$\mathbb{R}_2[X]$.
$g - \lambda id$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X] \Leftrightarrow$ $mat_{B_c}(g - \lambda id)$ inversible.

$$Or, H = mat_{B_c}(g - \lambda id) \underbrace{=}_{\substack{car \\ (g-\lambda id)(1)=g(1)-\lambda=-\lambda \\ (g-\lambda id)(X)=g(X)-\lambda X=-2X-\lambda X=(-2-\lambda)X \\ (g-\lambda id)(X^2)=g(X^2)-\lambda X^2=-2X^2-2-\lambda X^2=(-2-\lambda)X^2-2}} \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} (g-\lambda id)(1) & (g-\lambda id)(X) & (g-\lambda id)(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}. & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

Donc, $\det(H) = -\lambda(-2 - \lambda)^2$. Et par conséquent, H est inversible $\Leftrightarrow \lambda \notin \{0, -2\}$.
Ainsi, $g - \lambda id$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X] \Leftrightarrow \lambda \notin \{0, -2\}$.
Rque : $mat_{B_c}(g - \lambda id) = mat_{B_c}(g) - \lambda mat_{B_c}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. $Ker(g) = vect(1)$.
Soit $P = aX^2 + bX + c$. Alors, $g(P) = (X^2 - 1)2a - 2X(2aX + b) = -2aX^2 - 2bX - 2a$.

Donc, $P \in Ker(g+2id) \Leftrightarrow g(P)+2P=0 \Leftrightarrow -2aX^2-2bX-2a+2aX^2+2bX+2c=0 \Leftrightarrow 2c-2a=0 \Leftrightarrow c=a$
Ainsi, $P \in Ker(g+2id) \Leftrightarrow P=aX^2+bX+a=a(X^2+1)+bX$.
Donc, $Ker(g+2id)=vect(X,X^2+1)$.
De plus, (X,X^2+1) est libre car échelonnée en degré sans polynôme nul. Ainsi, (X,X^2+1) est une base de $Ker(g+2id)$.
Enfin, la famille $(1,X,X^2+1)$, concaténation des deux bases précédentes, est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ car $(1,X,X^2+1)$ est une famille libre (car échelonnée en degré sans polynôme nul) de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ et de cardinal 3 égal à dim $(\mathbb{R}_2[X])$.
J'en conclus que : $Ker(g) \oplus Ker(g+2id)=\mathbb{R}_2[X]$.

Ex 8 Soit $B=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},..,\overrightarrow{e_n})$ une base de E.
1. Montrer que $\varphi: E^* \to K^n$ définie par : $\varphi(f)=(f(\overrightarrow{e_1}),f(\overrightarrow{e_2}),..,f(\overrightarrow{e_n}))$ est un isomorphisme. Qu'en déduit-on sur E^*?
2. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ $e_k{}^*$ l'application définie sur E par : $e_k^*(\vec{x})=la\ composante\ de\ \vec{x}\ selon\ \overrightarrow{e_k}\ dans\ B$.
Montrer que $(e_1^*,e_2^*,..,e_n^*)$ est une base de E^*.
3. Ici $E=\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On considère n réels distincts $a_0,\dots,a_{n-1}$ et f la forme linéaire sur E définie par : $f(P)=\int_{-1}^{1}\frac{P(t)}{1+cos^2(t)}dt$.
Montrer que $\exists(\lambda_0,\lambda_1,..,\lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n / \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], f(P)=\lambda_0P(a_0)+\lambda_1P(a_1)+..+\lambda_{n-1}P(a_{n-1})$.
Corrigé : https://go.screenpal.com/watch/cZfTluVMqNj **puis** https://go.screenpal.com/watch/cZfTlKVMqSF

1. E^*est le ss-e-v de $\mathscr{F}(E,E)$ des formes linéaires sur E ($i.e.$ des applications linéaires de E dans K). Donc $E^* et\ K^n$sont deux K —e-v.
Donc, $\forall f \in E^*, \varphi(f)=\left(\underbrace{f(\overrightarrow{e_1})}_{\in K},\underbrace{f(\overrightarrow{e_2})}_{\in K},..,\underbrace{f(\overrightarrow{e_n})}_{\in K}\right) \in K^n$. **Montrons que φ est linéaire**. $\forall (f,g) \in E^{*2} et \forall (a,b) \in K^2$,
$\varphi(af+bg)=(af(\overrightarrow{e_1})+bg(\overrightarrow{e_1}),af(\overrightarrow{e_2})+bg(\overrightarrow{e_2}),..,af(\overrightarrow{e_n})+bg(\overrightarrow{e_n}))=(af(\overrightarrow{e_1}),af(\overrightarrow{e_2}),..,af(\overrightarrow{e_n}))+(bg(\overrightarrow{e_1}),bg(\overrightarrow{e_2}),..,bg(\overrightarrow{e_n}))=$ $a\,\varphi(f)+b\varphi(g)$. Ainsi, φ est une application linéaire de $E^* dans\ K^n$.
Bijectivité de φ : Soit $(a_1,\dots,a_n) \in K^n$. D'après le cours, il existe une unique forme linéaire f sur E qui vérifie :
$f(\overrightarrow{e_1})=a_1, f(\overrightarrow{e_2})=a_2,..,f(\overrightarrow{e_n})=a_n$. Alors f est l'unique antécédent de $(a_1,\dots,a_n)$ par φ. J'en conclus, φ est bijective et enfin que φ est un isomorphisme de E^* sur K^n. Par conséquent, $dim(E^*)=\dim(K^n)=n$.
Autre méthode : Dans le chapitre suivant, on démontre que $dim\mathscr{L}(E,F)=dimE \times dimF$ et en particulier, $dimE^*=dimE \times dimK=\dim(E)=n$. Et par conséquent dim $(E^*)=dim(K^n)$. Comme φ est une application linéaire de $E^* dans\ K^n$ et $dimE^*=dimK^n<+\infty$, il suffit de prouver l'injectivité de φ pour prouver sa bijectivité et comme φ est linéaire, il suffit de montrer que $Ker(\varphi)$ ne contient que la forme linéaire nulle. Or, la forme linéaire nulle est dans $Ker(\varphi)$ (car φ est linéaire) . Soit $f \in Ker(\varphi)$. Alors $f \in E^*$et $\left(f(\overrightarrow{e_1}),f(\overrightarrow{e_2}),..,f(\overrightarrow{e_n})\right)=(0,\dots,0)$. Donc $f(\overrightarrow{e_1})=f(\overrightarrow{e_2})=..=f(\overrightarrow{e_n})=0$. Alors pour tout $\vec{x}$ dans E , $\vec{x}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots,\overrightarrow{e_n}$ i.e. $\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+\dots+x_n\overrightarrow{e_n}$ et par conséquent, $f(\vec{x}) \underbrace{=}_{\substack{car\\ f\ linéaire}} x_1f(\overrightarrow{e_1})+x_2f(\overrightarrow{e_2})+\dots+x_nf(\overrightarrow{e_n}) \underbrace{=}_{\substack{car\ tous\ les\\ f(\overrightarrow{e_k})\ sont\ nuls}} 0$. Ainsi, f est la forme linéaire nulle. J'en conclus que $Ker(\varphi)$ ne contient que cette forme linéaire nulle et ainsi, φ est injective.
2. $si\ \vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+\dots+x_n\overrightarrow{e_n}\ alors\ e_k^*(\vec{x})=la\ composante\ de\ \vec{x}\ selon\ \overrightarrow{e_k}\ dans\ B \underbrace{=}_{\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+\dots+x_n\overrightarrow{e_n}} x_k$.
Alors, φ^{-1} est un isomorphisme de $K^n\ sur\ E^*$. Donc φ^{-1}envoie la base canonique de K^n sur une base de E^*.

Montrons que $\forall k \in [\![1,n]\!], \varphi^{-1}\left(\left(0,..,0,\underbrace{1}_{\substack{k^{ième}\\ composante}},0,\dots,0\right)\right)=e_k^*$.

$f_k=\varphi^{-1}\left(\left(0,..,0,\underbrace{1}_{\substack{k^{ième}\\ composante}},0,\dots,0\right)\right)$ est l'unique forme linéaire sur E qui vérifie $f_k(\overrightarrow{e_1})=f_k(\overrightarrow{e_2})=\dots=f_k(\overrightarrow{e_{k-1}})=f_k(\overrightarrow{e_{k+1}})=$ $f_k(\overrightarrow{e_n})=0$ et $f_k(\overrightarrow{e_k})=1$. Or, e_k^* est une forme linéaire sur E qui vérifie $e_k^*(\overrightarrow{e_1})=e_k^*(\overrightarrow{e_2})=\dots=e_k^*(\overrightarrow{e_{k-1}})=e_k^*(\overrightarrow{e_{k+1}})=e_k^*(\overrightarrow{e_n})=$

$0\ et\ e_k^*(\overrightarrow{e_k})=1$. Donc, nécessairement, $e_k^*=f_k=\varphi^{-1}\left(\left(0,..,0,\underbrace{1}_{\substack{k^{ième}\\ composante}},0,\dots,0\right)\right)$. J'en déduis que $\varphi^{-1}(B_c)=(e_k^*)_{k=1..n}$ et aisni,

$(e_k^*)_{k=1..n}$ est une base de E^* .
Autre méthode : comme $(e_k^*)_{k=1..n}$ est une famille de vecteurs de E^*de cardinal $n\ égal\ à$ dim (E^*), il suffit de prouver sa liberté pour montrer que c'est une base de E^*. Or, $\sum_{k=1}^{n}\lambda_ke_k^*=0 \Longrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!], \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \underbrace{e_k^*(\overrightarrow{e_j})}_{\substack{=0\ si\ k\neq j\\ =1\ si\ k=j}}=\vec{0} \Longrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!], \lambda_j=0$. Et c'est gagné !

4. Ici $E=\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On considère n réels $a_0,\dots,a_{n-1}$ et f la forme linéaire sur E définie par : $f(P)=\int_{-1}^{1}\frac{P(t)}{1+cos^2(t)}dt$.
J'introduis la base de Lagrange $(L_i)_{i=0..n-1}$de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par $L_i(X)=\prod_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n-1}\frac{X-a_k}{a_i-a_k}$. Alors tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ s'écrit de maniè[re] unique comme combinaison linéaire des polynômes L_i de la façon suivante : $P=P(a_0)L_0+P(a_1)L_1+..+P(a_{n-1})L_{n-1}$.
A Démontrer
Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, on pose $e_k{}^*$ l'application définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par : $e_k^*(P)=la\ composante\ de\ P\ selon\ \ L_k\ dans\ B=P(a_k)$.
D'après la question précédente, $(e_k^*)_{k=0..n-1}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]^*$des formes linéaires sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Soit $f:\mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], f(P)=\int_{-1}^{1}\frac{P(t)}{1+cos^2(t)}dt$. Alors, on montre facilement que f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par conséquent, $\exists\,!\,(\lambda_0,\lambda_1,..,\lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n / f=\lambda_0e_0^*+\lambda_1e_1^*+..+\lambda_{n-1}e_{n-1}^*$.
Cela signifie que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], f(P)=\lambda_0P(a_0)+\lambda_1P(a_1)+..+\lambda_{n-1}P(a_{n-1})$.

Soit F et G deux ss-e-v de E . Soit $\varphi: F\times G\to E$ telle que : $\varphi\big((\vec{x},\vec{y})\big)=\vec{x}+\vec{y}$. Montrer que φ est linéaire . Décrire son noyau et son image. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit injective puis surjective puis bijective.

- Soit $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ deux vecteurs de F , $\overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{y_2}$ deux vecteurs de G, a_1 et a_2 deux scalires.

$\varphi\Big(\big(a_1(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1})+a_2(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2})\big)\Big)=\varphi\big((a_1\overrightarrow{x_1}+a_2\overrightarrow{x_2},a_1\overrightarrow{y_1}+a_2\overrightarrow{y_2})\big)=a_1\overrightarrow{x_1}+a_2\overrightarrow{x_2}+a_1\overrightarrow{y_1}+a_2\overrightarrow{y_2}=a_1(\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{y_1})+a_2(\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{y_2})=a_1\varphi(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1})+a_2\varphi(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2})$. Donc, φ est linéaire.

- $Ker(\varphi)$?

$\varphi\big((\vec{x},\vec{y})\big)=\vec{x}+\vec{y}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{x}=-\vec{y}\Leftrightarrow\vec{x}\in F\cap G$ et $\vec{x}\in F\cap G$. Donc $Ker(\varphi)=(F\cap G)\times(F\cap G)$.

Par conséquent, φ est injective sietssi $Ker(\varphi)=\{(\vec{0},\vec{0})\}\Leftrightarrow F\cap G=\{\vec{O}\}$.

- $Im(\varphi)$?

$\forall(\vec{x},\vec{y})\in F\times G,\varphi\big((\vec{x},\vec{y})\big)=\vec{x}+\vec{y}\in F+G$. Donc $Im(\varphi)\subset F+G$.

Si $(\vec{x},\vec{y})\in F\times G,\vec{x}+\vec{y}=\varphi\big((\vec{x},\vec{y})\big)$ donc $F+G\subset Im(\varphi)$. Ainsi $Im(\varphi)=F+G$.

Par conséquent, φ est surjective sietssi $Im(\varphi)=E$ sietssi $F+G=E$.

Ainsi φ est isomorphisme sietssi $\begin{cases}F+G=E\\F\cap G=\{\vec{O}\}\end{cases}\Leftrightarrow F\oplus G=E$

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. Soit a et b deux scalaires distincts.

1. Montrer que : $Kerf=Kerf^2\Leftrightarrow Imf\cap kerf=\{\vec{O}\}$
2. Montrer que : $Imf^2=Imf\Leftrightarrow Imf+Kerf=E$.
3. Démontrer que $Ker(f-a.id)$ et $Ker(f-b.id)$ sont stables par f et en somme directe.

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ tel qu'il existe un entier naturel p tel que $f^{p-1}\neq O_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^p=O_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Soit $\vec{x}\in E$ tel que $f^{p-1}(\vec{x})\neq\vec{O}$. Montrer que : $B=(\vec{x},f(\vec{x}),f^2(\vec{x}),\dots,f^{p-1}(\vec{x}))$ est libre.
2. Si E est de dimension finie n ,comparer n et p .Que dire de B si $p=n$?

1. Comme $f^{p-1}\neq O_{\mathscr{L}(E)}$, il existe $\vec{x}\in E$ tel que $f^{p-1}(\vec{x})\neq\overrightarrow{O_E}$.

Comme $f^p=O$, $\forall k\geq p,f^{p+k}=f^k\circ f^p\overset{\substack{car\ f^p=0\ et\ f^k lin\acute{e}aire\ donc\\ f^k(\overrightarrow{O_E})=\overrightarrow{O_E}}}{\triangleq}O_{\mathscr{L}(E)}$. Donc, $\forall k\geq p,f^{p+k}(\vec{x})=\overrightarrow{O_E}$.

Montrer que : $B=(\vec{x},f(\vec{x}),f^2(\vec{x}),\dots,f^{p-1}(\vec{x}))$ est libre.

Soit $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n$ réels tels que $\lambda_0\vec{x}+\lambda_1 f(\vec{x})+\lambda_2 f^2(\vec{x})+\dots+\lambda_{p-1}f^{p-1}(\vec{x})=\overrightarrow{O_E}$ $(**)$.

Composons par f^{p-1} : $f^{p-1}\Big(\lambda_0\vec{x}+\lambda_1 f(\vec{x})+\lambda_2 f^2(\vec{x})+\dots+\lambda_{p-1}f^{p-1}(\vec{x})\Big)=f^{p-1}(\overrightarrow{O_E})$. Cela donne, en utilisant la linéarité de f^{p-1}, $\lambda_0 f^{p-1}(\vec{x})+\lambda_1 f^p(\vec{x})+\lambda_2 f^{p+1}(\vec{x})+\dots+\lambda_{p-1}f^{2p-2}(\vec{x})=\overrightarrow{O_E}$. Comme $f^p(\vec{x})=f^{p+1}(\vec{x})=\dots=f^{2p-2}(\vec{x})=\overrightarrow{O_E}$, j'obtiens : $\lambda_0 f^{p-1}(\vec{x})=\overrightarrow{O_E}$. Or, $f^{p-1}(\vec{x})\neq\overrightarrow{O_E}$.Donc nécessairement, $\lambda_0=0$. Alors, $(**)$ s'écrit : $\lambda_1 f(\vec{x})+\lambda_2 f^2(\vec{x})+\dots+\lambda_{p-1}f^{p-1}(\vec{x})=\overrightarrow{O_E}$.

Composons par f^{p-2} : $f^{p-2}\Big(\lambda_1 f(\vec{x})+\lambda_2 f^2(\vec{x})+\dots+\lambda_{p-1}f^{p-1}(\vec{x})\Big)=f^{p-1}(\overrightarrow{O_E})$. Cela donne, en utilisant la linéarité de f^{p-2}, $\lambda_1 f^{p-1}(\vec{x})+\lambda_2 f^p(\vec{x})+\dots+\lambda_{p-1}f^{2p-2}(\vec{x})=\overrightarrow{O_E}$. Comme $f^p(\vec{x})=f^{p+1}(\vec{x})=\dots=f^{2p-2}(\vec{x})=\overrightarrow{O_E}$, j'obtiens : $\lambda_1 f^{p-1}(\vec{x})=\overrightarrow{O_E}$ puis $\lambda_1=0$. Alors, $(**)$ s'écrit $\lambda_2 f^2(\vec{x})+\dots+\lambda_{p-1}f^{p-1}(\vec{x})=\overrightarrow{O_E}$. On itère ce précédé… A la dernière étape, après avoir montré que $\lambda_0=\lambda_1=..=\lambda_{p-2}=0$, $(**)$ s'écrit $\lambda_{p-1}f^{p-1}(\vec{x})=\overrightarrow{O_E}$ et j'en déduis $\lambda_{p-1}=0$.

Je peux ainsi conclure que $B=(\vec{x},f(\vec{x}),f^2(\vec{x}),\dots,f^{p-1}(\vec{x}))$ est libre.

2. B étant une famille libre de vecteurs de E, $card(B)\leq\dim(E)$ i.e. $p\leq n$.

Si $p=n$ alors B est libre et maximale dans E donc B est une base de E.

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ telle que $f^2+6f-7id_E=O$

1. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}en fonction de f et id.
2. Montrer que :$(f-id)\circ(f+7id)=O$. En déduire que $Im(f-id)\subset Ker(f+7id)$et $Im(f+7id)\subset Ker(f-id)$.
3. Démontrer enfin que $Ker(f+7id)\oplus Ker(f-id)=E$.
4. Montrer que $Ker(f+7id)$ et $Ker(f-id)$ sont stables par f . On note h et g les endomorphismes induits par f sur respectivement $Ker(f+7id)$ et $Ker(f-id)$. Reconnaitre g et h .
5. Soit p la projection sur $Ker(f+7id)$ et parallèlement à $Ker(f-id)$ et q l'autre projection associée.
   a. Montrer que $f=-7p+q$.
   b. En déduire que $f^n=(-7)^n p+q$.

Ex 13 Soit f un endomorphisme d'un K-e-v E tel que $f^3=f\circ f\circ f=f$. Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires dans E.

Corrigé : https://go.screenpal.com/watch/cZf3ilVM1s7

Soit $x\in E$. Cherchons $y\in Im(f)$ et $z\in Ker(f)$ tels que $x=y+z$.

Analyse : supposons que de tels vecteurs y et z existent. Alors $\begin{cases}x=y+z\\\exists t\in E/y=f(t)\\f(z)=0\end{cases}$.

Donc $f(x)\overset{car\ f\ lin\acute{e}aire}{\triangleq}f(y)+f(z)=f(y)=f\big(f(t)\big)=f^2(t)$ et $f^2(x)=f\big(f(x)\big)=f^3(t)\overset{car\ f^3=f}{\triangleq}f(t)=y$.

Donc $y=f^2(x)$ et $z=x-f^2(x)$.

Ainsi, si de tels vecteurs y et z existent alors ils sont uniques $y=f^2(x)$ et $z=x-f^2(x)$.

Synthèse : Posons $y=f^2(x)$ et $z=x-f^2(x)$.

Alors $y+z=x$ et $y=f(f(x))\in Im(f)$ et $f(z)=f(x)-f\big(f^2(x)\big)=f(x)-f^3(x)\overset{car\ f^3=f}{\triangleq}0$ donc $z\in Ker(f)$.

Ainsi, y et z conviennent et sont les seuls qui conviennent. Donc tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $Ker(f)$ et d'un vecteur de $Im(f)$. J'en conclus que $Ker(f)\oplus Im(f)=E$.

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que si F et G sont deux ss-e-v de E stables par f alors $F+G$ et $F\cap G$ sont stables f.
2. Montrer que si g est un endomorphisme de E tel que $f\circ g=g\circ f$ alors $Ker(g)$ et $Im(g)$ sont stables par f .

1. Supposons que F et G soient deux ss-e-v de E stables par f. Montrons que $F+G$ et $F\cap G$ sont stables f.

Soit $z=x+y\in F+G$ tq $x\in F$ et $y\in G$. Alors, $f(z) \overset{car\ f\ linéaire}{\triangleq} f(x)+f(y)$ avec $f(x)\in F$ et $f(y)\in G$ car F et G sont stables par f. Donc, $f(z)\in F+G$. J'en conclus que $F+G$ est stable par f.

Soit $z\in F\cap G$. Alors, $z\in F$ et $z\in G$ donc $f(z)\in F$ et $f(z)\in G$ car F et G sont stables par f. Donc, $f(z)\in F\cap G$. J'en conclus que $F\cap G$ est stable par f.

2. Soit $g\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f\circ g=g\circ f$. Montrons que $Ker(g)$ et $Im(g)$ sont stables par f .

Soit $x\in Ker(g)$. Alors $g\big(f(x)\big) \underbrace{=}_{\substack{car\\ f\circ g=g\circ f}} f\big(g(x)\big) \underbrace{=}_{\substack{car\\ x\in Ker(g)}} f(0) \underbrace{=}_{\substack{car\\ f\ linéaire}} 0$. Donc $f(x)\in Ker(g)$. Alors $Ker(g)$ est stable par f.

Soit $y\in Im(g)$. Alors il eixste $t\in E$ tel que $y=g(t)$. $f(y)=f\big(g(t)\big) \underbrace{=}_{\substack{car\\ f\circ g=g\circ f}} g\big(f(t)\big)\in Im(g)$. Donc $Im(g)$ est stable par f.

Soit $f\in E^*$ telle que f non nulle.
1. Montrer que f est surjective.
2. Soit $\vec{a}\in E\backslash Ker(f)$. Montrer que $Ker(f)\oplus vect(\vec{a})=E$. Que peut-on alors dire de $Ker(f)$?

1. F est une application linéaire de E dans K non nulle. Donc il existe un élément $\vec{a}$ de E tel que $f(\vec{a})=\lambda\neq 0$. Alors pour tout $x\in K$, $x=\frac{x}{\lambda}\lambda=\frac{x}{\lambda}f(\vec{a})=f\left(\frac{x}{\lambda}\vec{a}\right)$. Donc tout élément de K a au moins un antécédent par f. Ainsi f est surjective.
2. On considère un élément $\vec{a}$ de E tel que $f(\vec{a})=\lambda\neq 0$. Montrons que $Ker(f)\oplus vect(\vec{a})=E$.

Soit $\vec{u}\in E$. Je cherche $\vec{k}\in Ker(f)$ et $\vec{v}\in vect(\vec{a})$ tels que : $\vec{u}=\vec{k}+\vec{v}$.

Analyse : Supposons que de tels $\vec{k}$ et $\vec{v}$ existent. Alors $\begin{cases}\vec{u}=\vec{k}+\vec{v}.\\ \vec{k}\in Ker(f)\ \ i.e. f(\vec{k})=\vec{0}\ .\\ \vec{v}\in vect(\vec{a})\ \ i.e.\ \vec{v}=\beta\vec{a}\end{cases}$

Alors $\vec{u}=\vec{k}+\beta\vec{a}$ donc $f(\vec{u}) \overset{\substack{car\ f\\ linéaire}}{\triangleq} f(\vec{k})+\beta f(\vec{a})=\beta\lambda$. Donc $\beta=\frac{f(\vec{u})}{\lambda}$ (car $\lambda\neq 0$). Ainsi, $\vec{v}=\frac{f(\vec{u})}{\lambda}\vec{a}$ et $\vec{k}=\vec{u}-\frac{f(\vec{u})}{\lambda}\vec{a}$. Donc s'ils existent , $\vec{k}$ et $\vec{v}$ sont uniques et valent : $\vec{v}=\frac{f(\vec{u})}{\lambda}\vec{a}$ et $\vec{k}=\vec{u}-\frac{f(\vec{u})}{\lambda}$.

Synthèse : Posons $\vec{v}=\frac{f(\vec{u})}{\lambda}\vec{a}$ et $\vec{k}=\vec{u}-\frac{f(\vec{u})}{\lambda}\vec{a}$.

Alors $\vec{v}\in vect(\vec{a})$ et $\vec{k}+\vec{v}=\vec{u}$ et $f(\vec{k}) \overset{\substack{car\ f\\ linéaire}}{\triangleq} f(\vec{u})-\frac{f(\vec{u})}{\lambda}f(\vec{a}) \overset{\substack{car\\ f(\vec{a})=\lambda}}{\triangleq} 0, i.e. \vec{k}\in Ker(f)$. Donc ces vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{v}$ conviennent et d'après ce qui précède, sont les seuls qui précèdent . Ainsi, tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $Ker(f)$ et d'un vecteur de $vect(\vec{a})$.

J'en conclus que $Ker(f)\oplus vect(\vec{a})=E$.

Soit $(u\,,v)\in\mathscr{L}(E)^2$ telle que : $v\circ u=id_E$. Montrer que $E=Ker(v)\oplus Im(u)$.

Soit x un vecteur de E. Je cherche deux vecteurs $k\in Ker(v)$ et $y\in Im(u)$ tels que $x=k+y$.

Analyse : supposons que de tels vecteurs k et y existent. Alors, $\begin{cases}x=k+y\\ v(k)=0\\ \exists t\in E/y=u(t)\end{cases}$.

Donc, $v(x) \overset{v\ linéaire}{\triangleq} \overbrace{v(k)}^{=0}+v(y) \overset{y=u(t)}{\triangleq} v\big(u(t)\big) \overset{v\circ u=id_E}{\triangleq} t$. Donc, $y=u\big(v(x)\big)$ et $k=x-u\big(v(x)\big)$.

J'en déduis que si de tels vecteurs y et k existent, alors ils sont uniques et $y=u\big(v(x)\big)$ et $k=x-u\big(v(x)\big)$.

Synthèse : posons $y=u\big(v(x)\big)$ et $k=x-u\big(v(x)\big)$.

Alors, $y+k=x$; $y\in Im(u)$; $v(k)=v(x)-v\big(u\big(v(x)\big)\big)=v(x)-v\circ u\big(v(x)\big) \underbrace{=}_{\substack{car\\ v\circ u=id_E}} v(x)-v(x)=0$ donc $k\in Ker(v)$.

Donc y et k conviennent et sont les seules qui conviennent d'après l'analyse. J'en conclus que $Im(u)\oplus Ker(v)=E$.

Soit u et v deux endomorphismes d'un K-e-v E de dimension finie n.
1. Soit $B=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},..,\overrightarrow{e_n})$ une base de E. Montrer que : $u\neq 0\Leftrightarrow\exists i_0\in\{1,\dots,n\}/u(\overrightarrow{e_{i_0}})\neq\overrightarrow{0_E}$.
2. Montrer que :
    - Si u est un automorphisme alors $rg(u\circ v)=rg(v\circ u)=rg(v)$.
    - $rg(u\circ v)\leq\min\left(rg(u),rg(v)\right)$
    - $rg(u+v)\leq rg(u)+rg(v)$.
    - $|rg(u)-rg(v)|\leq rg(u-v)$.

1. Il est évident que s'il existe $i_0\in\{1,\dots,n\}$ tel que $u(\overrightarrow{e_{i_0}})\neq\overrightarrow{0_E}$, alors u n'est pas l'endomorphisme nul.

Réciproquement (par contraposée), si $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $u(\overrightarrow{e_i})=\overrightarrow{0_E}$ alors $\forall\vec{x}\in E$ tq $\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+..+x_n\overrightarrow{e_n}$,

$u(\vec{x}) \overset{\substack{car\ u\ est\\ linéaire}}{\triangleq} x_1\overbrace{u(\overrightarrow{e_1})}^{=\overrightarrow{0_E}}+x_2\overbrace{u(\overrightarrow{e_2})}^{=\overrightarrow{0_E}}+..+x_n\overbrace{u(\overrightarrow{e_n})}^{=\overrightarrow{0_E}}=\overrightarrow{0_E}$ ce qui signifie que u est l'endomorphisme nul.

2. a. **Supposons** ICI **(et uniquement ici) que** u **soit un automorphisme**.

$Im(u\circ v)=u\big(v(E)\big)$ et $Im(v)=v(E)$. Comme u est un automorphisme, $\dim(u(v(E)))=\dim\big(v(E)\big)$. Donc $rg(u\circ v)=rg(v)$.

$Im(v\circ u)=v\big(u(E)\big) \underbrace{=}_{\substack{car\ u\ est\\ surjective}} v(E)=Im(v)$. Donc $rg(v\circ u)=rg(v)$.

b. $Im(u \circ v) = u(v(E))$.
$v(E)$ est un ss-e-v de E de dimension $rg(v)$. Alors $u(v(E)) \subset u(E)$. Donc $\mathrm{rg}(u \circ v) = \dim\left(u(v(E))\right) \leq \dim(u(E)) = rg(u)$.
Introduisons $u_{/v(E)}$ la restriction de u à $v(E)$.
$u_{/v(E)}$ est une application linéaire de $v(E)$ dans E. Alors, $rg(u_{/v(E)}) \leq \dim(v(E)) = rg(v)$ (puisque le rang de toute application linéaire de E vers F est inférieur à dim (E) et aussi à $dim(F)$). Or, $u_{/v(E)}(v(E)) = u(v(E))$.Donc , $rg(u_{/v(E)}) = dimu(u(v(E))) = rg(u \circ v)$. Par conséquent, $rg(u \circ v) \leq rg(v)$.
J'en conclus que $rg(u \circ v) \leq \min(rg(u), rg(v))$.
c. D'après Grassmann, $\dim(Im(u) + Im(v)) = \dim(Im(u)) + \dim(Im(v)) - \dim(Im(u) \cap Im(v)) = rg(u) + rg(v) - \dim(Im(u) \cap Im(v))$.
Par conséquent, $\dim(Im(u) + Im(v)) \leq rg(u) + rg(v)$.
De plus, $Im(u + v) = (u + v)(E) = \{u(x) + v(x)/x \in E\} \subset \{u(x) + v(y)/x \in E \; et \; y \in E\} = u(E) + v(E) = Im(u) + Im(v)$.
Donc, $rg(u + v) = dimIm(u + v) \leq \dim(Im(u) + Im(v))$.
Ainsi, $rg(u + v) \leq \dim(Im(u) + Im(v)) \leq rg(u) + rg(v)$.
Alors $rg(u - v) \leq rg(u) + rg(-v). Or, -v(E) = \{-v(x)/x \in E\} = \{v(-x)/x \in E\} = \{v(t)/t \in E\}. Donc, rg(-v) = rg(v)$.
Par conséquent, $rg(u - v) \leq rg(u) + rg(v)$.
d.Alors, $rg(u) = rg((u + v) - v) \leq rg(u + v) + rg(v)$. Donc, $rg(u) - rg(v) \leq rg(u + v)$. De même, $rg(v) - rg(u) \leq rg(u + v)$.
On a donc : $-rg(u + v) \leq rg(u) - rg(v) \leq rg(u + v)$. Ce la signifie que $|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u + v)$.

Ex 18 Soit E de dimension finie n . Soit $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$.
1. On suppose ici que : $E = Im(u) + Im(v) = Ker(u) + Ker(v)$.Montrer que ces deux sommes sont directes.
2. Montrer que $Im(u) = Ker(u) \Leftrightarrow u^2 = 0 \; et \; 2rg(u) = n$.
3. On suppose ici que $u^2 + 2u = 0$. Montrer que $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont supplémentaires dans E et que u induit un automorphisme sur $Im(u)$.
4. On suppose que $rg(u^2) = rg(u)$. Montrer que : $\begin{cases} Im(u^2) = Im(u) \\ Ker(u^2) = Ker(u) \\ Im(u) \oplus Ker(u) = E \end{cases}$.

1. $\dim(Im(u) \cap Im(v)) \overset{Grassmann}{\triangleq} dimIm(u) + dimIm(v) - \dim(Im(u) + Im(v))$
$\overset{car\; Im(u)+Im(v)=E}{\triangleq} dimIm(u) + dimIm(v) - \dim(E)$
$\overset{\text{théorème du rang (s'applique car } dimE<+\infty)}{\triangleq} \dim E - dimKer(u) + dimE - dimKer(v) - \dim(E) = \dim E - dimKer(u) - dimKer(v)$
$\overset{Grassmann}{\triangleq} \dim E - \dim(Ker(u) \cap Ker(v)) + \dim(Ker(u) + Ker(v))$
$\overset{car\; Ker(u)+Ker(v)=E}{\triangleq} - \dim(Ker(u) \cap Ker(v))$.
$\dim(Im(u) \cap Im(v)) \; et \; \dim(Ker(u) \cap Ker(v))$ sont donc deux entiers naturels opposés. Ils sont donc tous les deux nuls.
J'en déduis que $Ker(u) \cap Ker(v) = Im(u) \cap Im(v) = \{\overrightarrow{O_E}\}. Ainsi, E = Im(u) + Im(v) = Ker(u) + Ker(v)$ sont deux sommes directes.

2. $Im(u) = Ker(u) \Leftrightarrow Im(u) \subset Ker(u) \; et \; \dim(Im(u)) = \dim(Ker(u)) \underset{\substack{Imu \subset Kerv \\ si et ssi\; v \circ u = 0}}{\overset{\text{théo du rang}}{\Leftrightarrow}} u^2 = 0 \; et \; 2rg(u) = dimE = n.$

3. $u^2 + 2u = u \circ (u + 2id) = (u + 2id) \circ u = 0$. Donc $Im(u) \subset Ker(u + 2id) \; et \; Im(u + 2id) \subset Ker(u)$.
Le théorème du rang assure que $dimIm(u) + dimKer(u) - \dim(E)$. Donc pour prouver que $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont supplémentaires dans E, il faut et il suffit que $Im(u) \cap Ker(u) = \{\overrightarrow{O_E}\}$.
D'une part, , $u(\overrightarrow{O_E}) = \overrightarrow{O_E}$.Donc, $\overrightarrow{O_E} \in Im(u) \cap Ker(u)$.
D'autre part, considérons $\vec{x} \in Im(u) \cap Ker(u)$. Alors $\vec{x} = u(\vec{t})$ et $u(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$. Donc $u^2(\vec{t}) = \overrightarrow{O_E}$. Donc $u^2 = -2u$. Donc $-2u(\vec{t}) = \overrightarrow{O_E}$.Et par suite , $\vec{x} = u(\vec{t}) = \overrightarrow{O_E}$. J'en conclus que $Im(u) \cap Ker(u)$ ne contient que $\overrightarrow{O_E}$. J'en conclus que $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont supplémentaires dans E.
4. On sait que $Im(u^2) \subset Im(u)$. De plus, par hypothèse, ces deux ss-e-v de E ont la même dimension. J'en conclus que $Im(u^2) = Im(u)$.
De même, on sait que $Ker(u) \subset Ker(u^2)$. De plus, $dimKer(u^2) = dimE - rg(u^2) = dimE - rg(u) = dimKer(u)$. J'en déduis que $Ker(u^2) = Ker(u)$.
Enfin, le théorème du rang assure que $dimIm(u) + dimKer(u) - \dim(E)$. Donc pour prouver que $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont supplémentaires dans E, il faut et il suffit que $Im(u) \cap Ker(u) = \{\overrightarrow{O_E}\}$.
D'une part, , $u(\overrightarrow{O_E}) = \overrightarrow{O_E}$.Donc, $\overrightarrow{O_E} \in Im(u) \cap Ker(u)$.
D'autre part, considérons $\vec{x} \in Im(u) \cap Ker(u)$. Alors $\vec{x} = u(\vec{t})$ et $u(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$. Donc $u^2(\vec{t}) = \overrightarrow{O_E}$. Donc . $\vec{t} \in Ker(u^2) = Ker(u)$. Et par suite , $\vec{x} = u(\vec{t}) = \overrightarrow{O_E}$. J'en conclus que $Im(u) \cap Ker(u)$ ne contient que $\overrightarrow{O_E}$. J'en conclus que $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont supplémentaires dans E.

Ex 19 Soit E de dimension finie n.
1. Montrer que les suites $(Im(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(Ker(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$sont stationnaires.
2. Soit p le plus petit entier tel que $Im(u^p) = Im(u^{p+1})$ Montrer que $\forall k \geq p, Im(u^k) = Im(u^p) \; et \; Ker(u^k) = Ker(u^p)$
3. Montrer que $Im(u^p) \oplus Ker(u^p) = E$.

1. $Im(u^k) \; et \; Ker(u^k)$ sont des ss-e-v de E qui est de dimension finie, $Im(u^k) \; et \; Ker(u^k)$ sont de dimension finie et $0 \leq dim(Im(u^k)) \leq \dim(E) \; et \; 0 \leq \dim(Ker(u^k)) \leq \dim(E)$.
De plus, le cours assure que $\forall k \in \mathbb{N}, Im(u^{k+1}) \subset Im(u^k) \; et \; Ker(u^k) \subset Ker(u^{k+1})$ (en effet, $x \in Ker(u^k) \Rightarrow u^k(x) = 0 \Rightarrow u(u^k(x)) = u(0) = 0 \Rightarrow u^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker(u^{k+1})$ et $x \in Im(u^{k+1}) \Rightarrow \exists t \in E/x = u^{k+1}(t) \Rightarrow \exists t \in E/x = u^k(u(t)) \underset{z=u(t)}{\Rightarrow} \exists z \in E/x = u^k(z) \Rightarrow x \in Im(u^k)$).

Donc, $Im(u^{k+1})$ est un ss-e-v de $Im(u^k)$ et $Ker(u^k)$ est un ss-e-v de $Ker(u^{k+1})$. Donc dim $(Im(u^{k+1})) \leq dim(Im(u^k))$ et dim $(Ker(u^k)) \leq$ dim $(Ker(u^{k+1}))$. Par conséquent les suites d'entiers naturels, $(dim(Im(u^k)))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(dim(Ker(u^k)))_{k\in\mathbb{N}}$ sont respectivement décroissantes et croissantes et bornée par 0 et $\dim(E)$ donc convergent. Or une suite d'entiers converge sietssi elle est stationnaire. Donc, les deux suites $(dim(Im(u^k)))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(dim(Ker(u^k)))_{k\in\mathbb{N}}$sont stationnaires.

Il existe donc un entier k_0 tel que : $\forall k \geq k_0, dim\left(Im(u^k)\right) = dim\left(Im(u^{k_0})\right)$. Alors le théorème du rang permet d'affirmer que : $\forall k \geq k_0$, $dim\left(Ker(u^k)\right) = \dim(E) - dim\left(Im(u^k)\right) = \dim(E) - dim\left(Im(u^{k_0})\right) = dim\left(Ker(u^{k_0})\right)$.

Comme de plus, $\forall k \geq k_0, Im(u^k)\ est\ un\ ss-e-v\ de\ Im(u^{k_0})$ et $Ker(u^{k_0})$ est un ss-e- v de $Ker(u^k)$. Je peux conclure que $\forall k \geq k_0, Im(u^k) = Im(u^{k_0})$ et $Ker(u^{k_0}) = Ker(u^k)$.Les suites $\left(Im(u^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(Ker(u^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont donc stationnaires et la suite des noyaux des itérés est constante à partir du même rang que la suite des images des itérés de u (et réciproquement).

Soit p le plus petit entier naturel tel que : $Im(u^p) = Im(u^{p+1})$. Alors d'après ce qui précède, $Ker(u^p) = Ker(u^{p+1})$.

Montrons par récurrence sur k que $\forall k \geq p, \underbrace{Ker(u^k) = Ker(u^p)}_{H(k)}$.

- $H(p)$ est vraie.
- Supposons $H(k)$ vrais pour un entier naturel $k \geq p$. Montrons qu'alors, $Ker(u^{k+1}) = Ker(u^p)$.

Nous savons déjà que $Ker(u^p) \subset Ker(u^{k+1})$. Prouvons l'autre inclusion : Soit $x \in Ker(u^{k+1})$. $u^{k+1}(x) = 0\ donc\ u^k\left(u(x)\right) = 0$. Donc $u(x) \in Ker(u^k)$. Or, par hypothèse de récurrence, $Ker(u^k) = Ker(u^p)$. Donc $u(x) \in Ker(u^p)\ i.e.\ u^p\left(u(x)\right) = 0$ i.e. $u^{p+1}(x) = 0$. Donc , $x \in Ker(u^{p+1})$. Comme $Ker(u^p) = Ker(u^{p+1})$, $x \in Ker(u^p)$.Ainsi, $Ker(u^{k+1}) \subset Ker(u^p)$ et finalement, $Ker(u^p) = Ker(u^{k+1})$.

- J'en conclus que $\forall k \geq p, Ker(u^k) = Ker(u^p)$. La suite des noyaux des itérés de u est donc constante à partir du rang p et il en va donc de même de la suite des images des itérés de u.

D'après le théorème du rang $\dim\left(Im(u^p)\right) + \dim\left(Ker(u^p)\right) = \dim(E)$. Donc pour prouver que $Im(u^p) \oplus Ker(u^p) = E$, il suffit de montrer que $Im(u^p) \cap Ker(u^p) = \{0_E\}$.

- 0_E est dans $Im(u^p) \cap Ker(u^p)$ car $u^p(0_E) = 0_E$.
- Soit $x \in Im(u^p) \cap Ker(u^p)$. Alors $x \in Im(u^p)\ i.e.\ \exists t \in E / x = u^p(t)$ et $x \in Ker(u^p)\ i.e.\ u^p(x) = 0_E$.

Alors, $u^p(u^p(t)) = 0_E$ i.e. $u^{2p}(t) = 0_E$. Donc, $t \in Ker(u^{2p})$. Or, $2p \geq p$ donc, $Ker(u^{2p}) = Ker(u^p)$. Par conséquent, $t \in Ker(u^p)$ et par suite, $x = u^p(t) = 0_E$.

J'en conclus que $Im(u^p) \cap Ker(u^p)$ ne contient que le vecteur nul. Et ainsi, $Im(u^p) \oplus Ker(u^p) = E$.

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On étudie sur des cas particuliers les solutions de l'équation
(eq) : $(f + id_E)^{2n} = id$ où $f \in$ L (E) est l'inconnue.
Déterminer les homothéties vectorielles sur E qui sont solutions de (eq)
Soit s une symétrie. Exprimer$(s + id)^{2n} - id$ fonction de $s\ et\ id_E$. En déduire les symétries solutions de (eq).
Déterminer les projections vectorielles de E solutions de (eq).

Soit E un K-e-v et u un vecteur de E et p un projecteur et s une involution dans E .

1. Résoudre l'équation $x + p(x) = u$ d'inconnue x élément de E .
2. Résoudre l'équation $x + s(x) = u$ d'inconnue x élément de E .

Propriétés des projections

Soit $p\ et\ q$ deux projecteurs d'un K-e-v E non associés tels que $Im(p) = Im(q)\ et\ q \circ p = p \circ q$. Montrer que $p = q$.

p est la projection sur $Im(p)$ et parallèlement à $Ker(p)$ et q est la projection sur $Im(q)$ et parallèlement à $Ker(q)$. Donc, pour prouver que $p = q$, il suffit de montrer que $Ker(p) = Ker(q)$.

De plus, compte-tenu du rôle symétrique de p et q, il suffit de prouver que $\mathrm{Ker}(p) \subset Ker(q)$.

Soit $x \in Ker(p)$.

Comme $Ker(q) \oplus Im(q) = E$, il existe $t \in Ker(q)\ et\ y \in Im(q)$ tels que $x = t + y$. Puis il existe $z \in E$ tel que $y = q(z)$.

Alors $x = t + q(z)\ et\ \ 0 = p(x) \underbrace{=}_{car\ p\ linéaire} p(t) + p\left(q(z)\right)$. Donc $p\left(q(z)\right) = -p(t) = p(-t)$.

Or, $Im(p) = Im(q)$ donc $q(z) \in Im(p)$. De plus, $\forall u \in Im(p), p(u) = u$. Donc, $p\left(q(z)\right) = q(z) = y$. Ainsi, $y = p(-t)$.

Alors, $q(y) = q\left(p(-t)\right) \underbrace{=}_{car\ q\ et\ p\ linéaires} -q(p(t)) \underbrace{=}_{car\ q\circ p = p\circ q} -p\left(q(t)\right) \underbrace{=}_{car\ t\in Ker(q)} -p(0) \underbrace{=}_{car\ p\ linéaire} 0$. Donc $y \in Ker(q)$.

Alors $y \in Ker(q) \cap Ker(q)$.Or,$Ker(q) \cap Ker(q) = \{O\}$. Donc, $y = 0$ et par suite $x = t \in Ker(q)$.

J'en déduis que $\mathrm{Ker}(p) \subset Ker(q)$ et je peux alors conclure que $p = q$.

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}\ et\ \ f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ telle que : $f(P) = (P(0), P'(0), .., P^{(n)}(0))$. Montrer que f est un isomorphisme et préciser f^{-1}.

Corrigé https://go.screenpal.com/watch/cZf31KVM1d6

Tout d'abord, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = (P(0), P'(0), .., P^{(n)}(0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Montrons que f est linéaire : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(aP + bQ) = \left(aP(0) + bQ(0), aP'(0) + bQ'(0), .., aP^{(n)}(0) + bQ^{(n)}(0)\right)$$
$$= \left(aP(0), aP'(0), .., aP^{(n)}(0)\right) + \left(bQ(0), bQ'(0), .., +bQ^{(n)}(0)\right) = af(P) + bf(Q).$$

J'en conclus que f est bien une application **linéaire** de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Comme $\boldsymbol{dim\mathbb{R}_n[X] = n+1 = dim\mathbb{R}^{n+1}}$, l'injectivité ou la surjectivité de f suffit à prouver que f est un isomorphisme. Or f est linéaire donc $f\ injective\ sietssi\ Ker(f) = \{0\}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $f(P) = 0 \Leftrightarrow \left(P(0), P'(0), .., P^{(n)}(0)\right) = (0,0, \dots ,0) \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!], P^{(k)}(0) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k \\ formule\ de\ Taylor \\ pour\ les\ polynômes\ en\ 0}} P = 0$.

Donc $Ker(f) = \{0\}$. Ainsi f est injective et finalement f est un isomorphisme.

Remarque :

1) j'aurais pu aussi étudier la surjectvité de f : $Im(f) \overset{car\ (1,X,..,X^n) base\ de\ \mathbb{R}_n[X]}{=} vect(f(1), f(X), \ldots, f(X^n))$ $= vect((1,0,..,0),(0,1,0,\ldots),(0,0,2,0,\ldots),\ldots,(0,0,\ldots,,n!)) = vect(\underbrace{((1,0,..,0),(0,1,0,\ldots),(0,0,1,0,\ldots),\ldots.(0,0,\ldots,,1))}_{base\ canonique\ de\ \mathbb{R}^{n+1}}) = \mathbb{R}^{n+1}$. Donc f est surjective et ainsi, f est un isomorphisme.Tapez une équation ici.

2) j'aurais pu aussi utiliser la caractérisation matricielle : f isomorphisme sietssi sa matrice dans deux bases choisies est inversible. Prenons les bases canoniques B_1 et B_2 de respectivement $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
Comme $f(1) = (1,0,..,0), f(X) = (0,1,0,\ldots), f(X^2) = (0,0,2,0,\ldots),\ldots, f(X^k) = (0,\ldots,0,k!,0,\ldots,0),\ldots, f(X^n) = (0,0,\ldots,,n!)$,
$M = mat_{B_1,B_2} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \square & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \square & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n! \end{pmatrix} = diag(0!,1!,2!,3!,\ldots,n!)$. Aucun coefficient de la diagonale n'est nul, donc M est inversible et par suite , f est un isomorphisme.

Retour à l'exercice : déterminons f^{-1} :
Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Cherchons une expression de l'unique antécédent $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ par f.
$f(P) = \left(P^{(0)}(0), \ldots, P^{(n)}(0)\right) = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ donc $\forall k \in [\![0,n]\!], a_k = P^{(k)}(0)$. Or, d'après Taylor, $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$
donc $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} X^k$. Ainsi, $f^{-1}: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n[X] \\ (a_0, a_1, \ldots, a_n) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} X^k \end{pmatrix}$.

Remarque : on peut aussi utiliser la caractérisation matricielle $mat_{B_2,B_1} f^{-1} = M^{-1} = diag\left(\frac{1}{0!},\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\ldots,\frac{1}{n!}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \square & 0 \\ \vdots & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \square & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n!} \end{pmatrix}$.

Alors $mat_{B_1} f^{-1}((a_0, a_1, \ldots, a_n)) = M^{-1} \times mat_{B_2}(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \square & 0 \\ \vdots & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \square & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_0}{0!} \\ \frac{a_1}{1!} \\ \frac{a_2}{2!} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{n!} \end{pmatrix}$.

Donc $f^{-1}((a_0, a_1, \ldots, a_n)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} X^k$

Soit f et g deux endomorphismes d'un K-e-v E tels que : $f \circ g = id_E$. Montrer que $Ker(f) = Ker(g \circ f)$ et $Im(f) = Im(g \circ f)$.

Soit p et q deux projecteurs d'un K-e-v E qui commutent mais pas forcément associés.
On pose : $r = p + q - pq$.
1) Montrer que r est un projecteur.
2) Calculer $p \circ r$ et $q \circ r$.
3) Montrer que $Ker(r) = Ker(p) \cap Ker(q)$.
4) Montrer que $Im(r) = Im(p) + Im(q)$.

Ex29 Soit p et q deux projecteurs (pas associés) dans un K-e-v E qui commutent.
1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
2. On suppose de plus que $p \circ q = q \circ p = 0$ .Montrer que $p + q$ est un projecteur.
   1. $p \circ q \circ p \circ q \underbrace{=}_{car\ p\ et\ q\ commutent} p \circ p \circ q \circ q \underbrace{=}_{car\ p^2=p\ et\ q^2=q} p \circ q$. Donc $p \circ q$ est un projecteur.
   2. $(p+q) \circ (p+q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q. Donc$ $p + q$ est un projecteur

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $f(P) = P(-X) - P(X)$.
1) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2) Montrer que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}_n[X]$.

Soit E, F et G trois K-e-v tels que dim $(F) = n$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
1) Monter que si H est un ss-e-v de F alors $g(H)$ est un ss $- e - v$ de G et $\dim(g(H)) \leq \dim(H)$. On pourra utiliser $h: \begin{pmatrix} H \to G \\ \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) \end{pmatrix}$.
2) En utilisant $h: \begin{pmatrix} Im(f) \to G \\ \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) \end{pmatrix}$, montrer que $rg(g \circ f) = rg(f) + rg(g) - n$.

Problème On note $\mathscr{E}$ le $\mathbb{R}$-e-v des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $f \in \mathscr{E}$, on note $U(f)$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)dt$.
1. Soit $f \in \mathscr{E}$, T-périodique. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que si f est T-périodique alors f' l'est aussi .
   b) Justifier que la réciproque est fausse.

3. Montrer que pour tout $f \in \mathscr{E}$, $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4. Montrer que U qui à $f \in \mathscr{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

5. Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ .On note E_n , l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n et $\mathscr{B}_n = (f_0, f_1, f_2, .., f_n)$ où $f_k: (t \mapsto t^k)$ est la base canonique de E_n

5.1 Montrer que U induit un endomorphisme sur E_n que l'on note U_n.

5.2 Ecrire la matrice M de U_n dans $\mathscr{B}_n$.

5.3 U_n est-il bijectif ?

5.4 Démontrer que $U_n - id_{E_n}$ est nilpotent.

5.5 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que : $Ker\left(U_n - \lambda id_{E_n}\right) \neq \{O\} \Leftrightarrow \lambda = 1$.

6. Justifier que si l'élément f de $\mathscr{E}$ est dans $Ker(U)$ alors.

(i) $\int_0^1 f(t)dt = 0.$

(ii) $f\ est\ 1 - périodique.$

7. A-t-on $Ker(U) = \{f \in \mathscr{E}\ /f$ est 1 $-$période et $\int_0^1 f(t)dt = 0\}$?

8. Donner explicitement une fonction non nulle et élément de $KerU$ et en donner une représentation graphique sur $[-1,2]$.

9. L'endomorphisme U est -il surjectif ?

10. Soit a un réel non nul et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(t) = e^{at}$.

10.1 Déterminer $F_a = U(f_a)$.

10.2 Dresser le tableau des variations de $g: \left(x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}\right)$.

10.3 En déduire que pour tout réel λ strictement positif, il existe une fonction f non nulle telle que $U(f) = \lambda f$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \underbrace{\int_T^{a+T} f(t)dt}_{\overrightarrow{CV\ u=t-T}} = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^a f(u+T)dt = \int_0^T f(t)dt.$

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors $g: \left(x \mapsto f(x+T)\right) est\ dérivable\ sur\ \mathbb{R}$

c) Supposons que f est T-périodique. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)$ donc $g'(x) = f'(x)$ $i.e. f'(x+T) = f'(x)$. Ains, f' est T-périodique.

d) Trouvons un contre-exemple. Prenons $f(x) = \sin(x) + x$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = \cos(x) + 1$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) + 1 = \cos(x) + 1 = f'(x)$ mais $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + x + 2\pi = f(x) + 2\pi \neq f(x)$. Donc f' est 2π $-$périodique mais f ne l'est pas.

3. Soit$f \in \mathscr{E}$; Alors le cours assure que f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = F(x) - F(x-1)$. Alors,
comme F et $(x \mapsto x-1)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left(U(f)\right)'(x) = F'(x) - F'(x-1) = f(x) - f(x-1).$$

4.Pour tout $f \in \mathscr{E}$, $U(f) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathscr{E}$.

De plus, $\forall (f,g) \in \mathscr{E}^2$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $U(af+bg)(x) = \int_{x-1}^x (af+bg)(t)dt = a\int_{x-1}^x f(t)dt + b\int_{x-1}^x g(t)dt = aU(f)(x) + bU(g)(x) = [aU(f) + bU(g)](x).$

Donc $U(af+bg) = aU(f) + bU(g)$

Ainsi, U est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

5.1.$Soit\ k \in [\![0,n]\!]$. $\forall x \in \mathbb{R}, U(f_k)(x) = \int_{x-1}^x t^k dt = \frac{1}{k+1}[x^{k+1} - (x-1)^{k+1}] = \frac{1}{k+1}\left[-\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j}(-1)^{k+1-j}x^j\right] =$
$\frac{1}{k+1}\left[\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j}(-1)^{k-j}x^j\right]$. Donc $deg\left(U(f_k)\right) \leq k \leq n$. Par conséquent, par linéarité de U, l'image par U de toute combinaison linéaire des f_k tq $k \in [\![0,n]\!]$ est une combinaison linéaire des f_k tq $k \in [\![0,n]\!]$. Ainsi, $E_n$est stable par U et par suite U induit sur E_n un endomorphisme noté U_n.

5.2.$\forall k \in [\![0,n]\!], \forall x \in \mathbb{R}$, $U_n(f_k)(x) = \frac{1}{k+1}\left[\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j}(-1)^{k-j}x^j\right] = \frac{1}{k+1}\left[(k+1)x^k + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}(-1)^{k-j}x^j\right]$
$= x^k + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j}(-1)^{k-j}x^j = f_k(x) + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j}(-1)^{k-j}f_j(x)$.

Donc, $U_n(f_k) = f_k + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j}(-1)^{k-j}f_j$.

Donc $M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} U_n(f_0) & U_n(f_1) & U_n(f_k) & U_n(f_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{0} & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{0} \\ 0 & 1 & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{1} & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{1} \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{k-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{array} \end{array}$.

5.3.$\det(M) = 1$ donc M est inversible et par suite $U_n$est un automorphisme de E_n.

5.3. $$N = mat_{B_c}\left(U_n - Id_{E_n}\right) = M - I_{n+1} = \begin{array}{c} \begin{matrix} (U_n-id)(f_0) & (U_n-id)(f_1) & (U_n-id)(f_k) & (U_n-id)(f_n) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{0} & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{0} \\ 0 & 0 & & \\ \square & 0 & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{1} & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{1} \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & & \square \\ \square & \square & \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{k-1} & \square \\ \vdots & \vdots & & \square \\ \square & \square & 0 & \square \\ \square & \square & 0 & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n-1} \\ \square & \square & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_0 \\ f_1 \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ f_n \end{array}.$$

Soit $H(k)$ la propriété : $(U_n - id)^k(f_k) = 0$. Montrons par une récurrence forte et finie que $\forall k \in [\![0,n]\!], H(k)$ est vraie.

Initialisation : D'après la matrice N , $(U_n - id)^0(f_0) = 0$.

Propagation : Soit k un entier naturel inférieur à $n-1$. Supposons que : $\forall j \in [\![0,k]\!], (U_n - id)^j(f_j) = 0$. Montrons que $(U_n - id)^{k+1}(f_{k+1}) = 0$.

$$(U_n - id)^{k+1}(f_{k+1}) = (U_n - id)^k\left(\underbrace{(U_n - id)^{\square}(f_{k+1})}_{\substack{est\ une\ combi.linéaire \\ des\ f_0,f_1,\dots,f_k}}\right) = (U_n - id)^k\left(\sum_{j=0}^k a_j f_j\right) = \sum_{j=0}^k a_j \underbrace{(U_n - id)^k(f_j)}_{=0(**)} = 0 \text{ OK!!}$$

$(**)$puisque $\forall j \in [\![0,k]\!], (U_n - id)^k(f_j) \underset{car\ j\le k}{\underbrace{=}} (U_n - id)^{k-j}((U_n - id)^j(f_j)) = (U_n - id)^{k-j}(0) = 0.$

$= 0\ car$

CCL : $\forall k \in [\![0,n]\!], H(k)$ est vraie.Et par suite , $\forall j \in [\![0,k]\!], (U_n - id)^n(f_j) = 0. L'endomorphisme\ (U_n - id)^n$ envoie tous les vecteurs de la base canonique sur 0. J'en dédeuis que l'endomorphisme $(U_n - id)^n est\ nul.$ $U_n - id$ est donc nilpotent.

5.4.Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$Ker\left(U_n - \lambda id_{E_n}\right) \neq \{O\} \Leftrightarrow U_n - \lambda id_{E_n} n'est\ pas\ injectif \Leftrightarrow U_n - \lambda id_{E_n} n'est\ pas\ bijectif \Leftrightarrow$ det $(M - \lambda I_{n+1}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{0} \\ 0 & 1-\lambda & \\ \square & 0 & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{1} \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \vdots & \vdots & \square \\ \square & \square & \\ \square & \square & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n-1} \\ \square & \square & \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^{n+1} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

6.$f \in Ker(U) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-1}^x f(t)dt = 0 \underset{en\ prenant\ x=1}{\underbrace{\Rightarrow}} \int_0^1 f(t)dt = 0.$

$$f \in Ker(U) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-1}^x f(t)dt = 0 \underset{\substack{où\ F\ est\ une\ primtipve\ de\ f\ sur\ \mathbb{R} \\ (F\ existe\ car\ f\ est\ continue\ sur\ \mathbb{R})}}{\underbrace{\Leftrightarrow}} \forall x \in \mathbb{R}, F(x) - F(x-1) = 0 \Leftrightarrow F\ est\ 1-périodique \underset{d'après 2)}{\underbrace{\Rightarrow}} f$$
$$= F'est\ 1-périodique.$$

7.

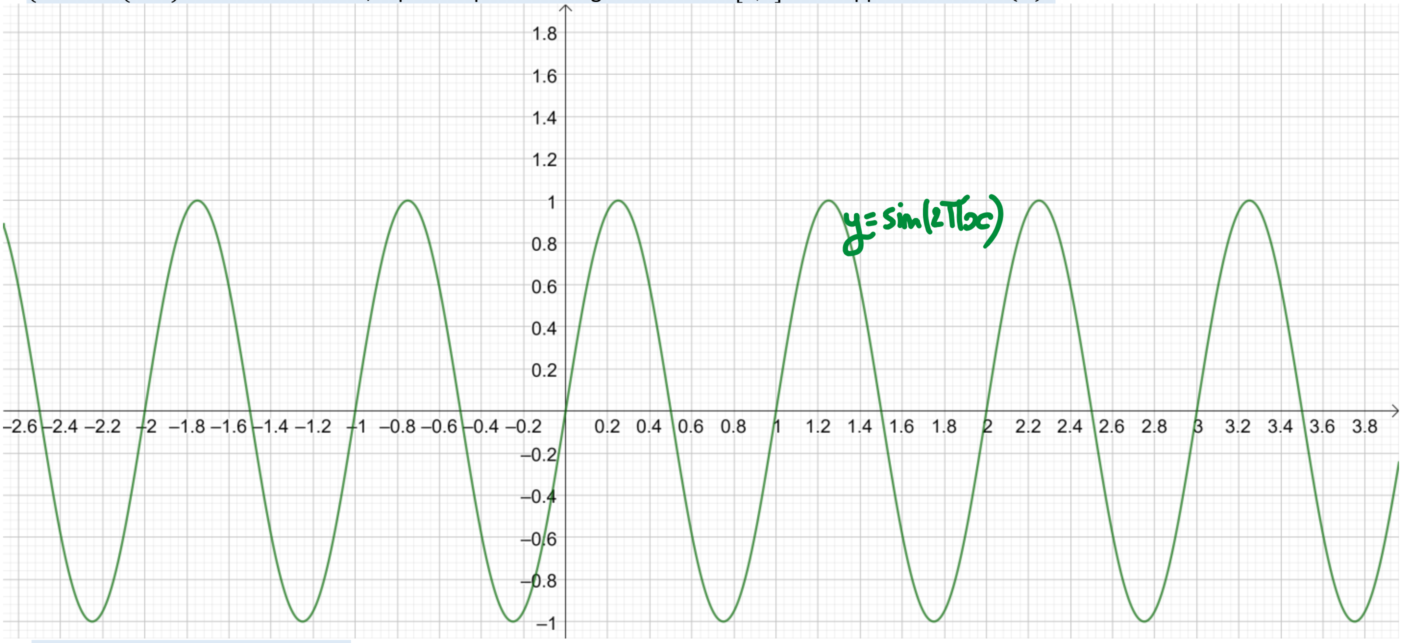
- On a montré dans la question 6. que $Ker(U) \subset \{f \in \mathscr{E} \ /f$ est 1 −périodique et $\int_0^1 f(t)dt = 0\}$.
- Soit $f \in \mathscr{E}$ telle que f est 1 −périodique et $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\int_{x-1}^x f(t)dt \underset{en\ applicaquant\ 1.\ avec\ a=x-1}{\underbrace{=}} \int_0^1 f(t)dt = 0$.Donc, $f \in Ker(U)$.

Ainsi, $\{f \in \mathscr{E} \ /f$ est 1 −périodique et $\int_0^1 f(t)dt = 0\} \subset Ker(U)$ et finalement :

$\{f \in \mathscr{E} \ /f$ est 1 −périodique et $\int_0^1 f(t)dt = 0\} = Ker(U)$.

8. $(x \mapsto \sin(2\pi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, 1-périodique et d'intégrale nulle sur $[0,1]$ donc appartient à $Ker(U)$.



8. U n'est pas surjective de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}$. En effet, nous avons prouvé que les images par U sont des fonctions de classe C^1. Or un élément de $\mathscr{E}$ n'est pas forcément de classe C^1 : par exemple, la valeur absolue est un élément de $\mathscr{E}$ qui n'est pas C^1 car pas dérivable en 0. Donc la fonction valeur absolue n'a pas d'antécédent par U.

10.1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_a(x) = U(f_a)(x) = \int_{x-1}^{x} e^{at}dt = \frac{1}{a}\left[e^{ax} - e^{a(x-1)}\right] = e^{ax}\left[\frac{e^{-a}-1}{-a}\right]$. Donc $U(f_a) = \left[\frac{e^{-a}-1}{-a}\right] f_a$.

10.2. $g : \left(x \mapsto \frac{e^x-1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0, g'(x) = \frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$. Posons $h(x) = (x-1)e^x + 1$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et et $\forall x, h'(x) = xe^x$. Donc $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Par conséquent, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$. Comme $h(0) = 0$, h est positive et ne s'annule qu'en 0 . Et par suite g' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$. Comme de plus, $\lim_{x\to 0} g(x) \overset{T.A.}{\triangleq} 1$, g est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1 et son prolongement $\tilde{g}$ est strictement croissant sur $\mathbb{R}$.

10.3. $\tilde{g}$ est continue et strictement croissant sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to-\infty} \tilde{g}(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \tilde{g}(x) = +\infty$. Par conséquent, $\tilde{g}$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors λadmet un unique antécédent a' par g et s'écrit donc sous la forme $\lambda = g(a') \underbrace{=}_{en\ posant\ a=-a'} g(-a) = \frac{e^{-a}-1}{-a}$. Alors, $f_a$vérifie $U(f_a) = \left[\frac{e^{-a}-1}{-a}\right] f_a = \lambda f_a$. Ainsi, pour tout réel λ strictement positif, il existe une fonction f non nulle telle que $U(f) = \lambda f$.

A toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on associe la fonction $T(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt & si\ x \neq 0 \\ f(0)\ si\ x = 0 \end{cases}$.

Partie I : Exemples. Déterminer $T(\ f\ )$ dans les cas suivants :

1. $f(t) = t^2\cos(t^3 - 1)$
2. $f(t) = \cos(2t)\,sin^3(t)$
3. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}$

Partie II : Etude de T sur E_n. Soit n un entier naturel. On note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

1. Donner une base et la dimension de E_n .
2. Montrer que E_n est stable par T. On note T_n l'endomorphisme de E_n induit par T.
3. Montrer que T_n est un automorphisme de E_n.
4. Déterminer tous les réels λ tels que : $\exists P \in E_n\backslash\{0\}, T_n(P) = \lambda P$.
5. Pour chacune des valeurs de λ trouvées précédemment, donner une base de $Ker(T_n - \lambda Id)$.

Partie III : Etude de T dans $C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $f \in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que $T(\ f\ )$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et est solution sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle : $xy' + y = f(x)$ d'inconnue y .
2. Etudier la continuité de $T(\ f\ )$ en 0.
3. Montrer que T définit un endomorphisme sur $C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Justifier que T est injective mais n'est pas surjective.
5. Déterminer $Ker\left(T - \frac{1}{2}Id\right)$.

Partie 1

1. Soit x un réel.

$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x t^2\cos(t^3-1)dt & si\ x \neq 0 \\ 0\ \ si\ x = 0 \end{cases}$. Alors, $\int_0^x t^2\cos(t^3-1)dt = \frac{1}{3}\int_0^x 3t^2\cos(t^3-1)dt = \frac{1}{3}[\sin(t^3-1)]_0^x$. Donc,

$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x}[\sin(t^3-1) + \sin(1)]\ si\ x \neq 0 \\ 0\ \ si\ x = 0 \end{cases}$.

2. $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x \cos(2t)\,sin^3(t)dt & si\ x \neq 0 \\ 0\ \ si\ x = 0 \end{cases}$.

$$\cos(2t)\,sin^3(t) = \frac{e^{i2t}+e^{-i2t}}{2}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{16i}\left(e^{i2t}+e^{-i2t}\right)\left(e^{i3t}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-i3t}\right)$$
$$= \frac{-1}{16i}\left(e^{i5t}-e^{-i5t}-3e^{3it}+3e^{-3it}+4e^{it}-4e^{-it}\right)$$
$= \frac{-1}{16i}\left(2isin(5t)-6isin(3t)+8isin(t)\right) = \frac{1}{8}\left(3\sin(3t)-\sin(5t)-4\sin(t)\right).$

Donc, $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{8x}\left(-\cos(3x)+\frac{1}{5}\cos(5x)+4\cos(x)-\frac{16}{5}\right) si\ x \neq 0 \\ 0 \quad si\ x = 0 \end{cases}$

3. $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt \ \ si\ x \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ si\ x = 0 \end{cases}$

$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}}dt \underset{u=\frac{t}{\sqrt{2}}}{\overset{CV}{=}} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\sqrt{2}du = \left[\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\right]_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}\right) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)-\frac{1}{2}\ln(2).$

Donc, $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)-\frac{1}{2}\ln(2)\right) si\ x \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \quad si\ x = 0 \end{cases}$

PARTIE 2

1. Posons $f_k: (t \mapsto t^k)$. La famille $B = (f_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$est une base de $E_n\ et\ dimE_n = n+1$.
2. T est linéaire . En effet, soit $(f,g) \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout réel x,

$T(af+bg)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x af(t)+bg(t)dt \ \ si\ x \neq 0 \\ af(0)+bg(0) \ \ si\ x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{a}{x}\int_0^x f(t)dt + \frac{b}{x}\int_0^x g(t)dt \ \ si\ x \neq 0 \\ af(0)+bg(0) \ \ si\ x = 0 \end{cases} = \begin{cases} aT(f)(x)+bT(g)(x)\ si\ x \neq 0 \\ aT(f)(0)+bT(g)(0) \ \ si\ x = 0 \end{cases}$

Donc, $T(af+bg) = aT(f)+bT(g)$.

De plus, Soit $k \in [\![0,n]\!]$. $T(f_k)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x t^k dt \ \ si\ x \neq 0 \\ 0\ pour\ k \geq 1\ et\ 1\ pour\ k=0 \ \ si\ x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x}\frac{x^{k+1}}{k+1} \ \ si\ x \neq 0 \\ 0\ pour\ k \geq 1\ et\ 1\ pour\ k=0 \ \ si\ x = 0 \end{cases} =$ $\begin{cases} \frac{x^k}{k+1} \ \ si\ x \neq 0 \\ 0\ pour\ k \geq 1\ et\ 1\ pour\ k=0 \ \ si\ x = 0 \end{cases} = \frac{1}{k+1}f_k(x)$. Ainsi, $\forall k \in [\![0,n]\!], T(f_k) = \frac{1}{k+1}f_k$.

Par conséquent pour tout $\varphi = \sum_{k=0}^n a_k f_k \in E_n$, il existe des réels $a_k$tels que $\varphi = \sum_{k=0}^n a_k f_k\ .Alors,\ T(\varphi) = T(\sum_{k=0}^n a_k f_k) =$ $\sum_{k=0}^n a_k T(f_k) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{k+1}f_k = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1}f_k \in E_n$ puisque $vect((f_k)_{k\in[\![0,n]\!]}) = E_n.J$'en conclus alors que $E_n$est stable par T et T induit un endomorphisme T_n sur E_n.

3. $T_n$envoie la base B sur la famille $B' = \left(\frac{1}{k+1}f_k\right)_{k=0..n}$.

Or B' est aussi une base de $E_n$puisque multiplier chaque vecteur d'une famille par un scalaire non nul n'altère ni le caractère générateur, ni la liberté de cette famille. $T_n$envoie donc une base de $E_n$sur une base de E_n. J'en déduis que $T_n$est un automorphisme de E_n.

4. Soit $\lambda \in K$.

$\exists P \in\ E_n\backslash\{0\}$ tels que $T_n\ (P) = \lambda P$
$\Leftrightarrow \exists P \in\ E_n\backslash\{0\}$ tels que $(T_n-\lambda id)(P) = 0 \Leftrightarrow \exists P \in\ E_n\backslash\{0\}$ tels que $P \in Ker\ (T_n-\lambda id)$
$\Leftrightarrow Ker\ (T_n-\lambda id) \neq \{0\} \Leftrightarrow T_n-\lambda id\ non\ injective \Leftrightarrow T_n-\lambda id\ non\ bijective$
$\Leftrightarrow \det\ (T_n-\lambda id) = 0 \Leftrightarrow \det\ (\mathrm{mat}_B\ (T_n-\lambda id)) = 0.$

Or, $\mathrm{mat}_B\ (T_n-\lambda id)$= $\mathrm{mat}_B(T_n)-\lambda\mathrm{mat}_B(id) = \begin{bmatrix} 1 & & & (0) & \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{3} & & \\ & & & \ddots & \\ & (0) & & & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & & & (0) & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & & & (0) & \\ & \frac{1}{2}-\lambda & & & \\ & & \frac{1}{3}-\lambda & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{n+1}-\lambda \end{bmatrix}.$

Donc, $\det\ (\mathrm{mat}_B\ (T_n-\lambda id)) = (1-\lambda)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\ldots\left(\frac{1}{n+1}-\lambda\right)$. Ainsi, $\exists P \in\ E_n\backslash\{0\}$ tels que $T_n\ (P) = \lambda P \Leftrightarrow \lambda \in \left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\ldots;\frac{1}{n+1}\right\}$.

5. Soit $j \in [\![0,n]\!]\ et\ \lambda = \frac{1}{j+1}$. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k f_k \in E_n. Alors, T_n\ (P) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1}f_k$.

Donc, $P \in Ker\left(T_n-\lambda Id_{E_n}\right) \Leftrightarrow T_n\ (P) = \frac{1}{j+1}P \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1}f_k = \frac{1}{j+1}\sum_{k=0}^n a_k f_k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{j+1}\right)f_k = 0 \Leftrightarrow \forall k, a_k\left(\underbrace{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{j+1}}_{\neq 0\ si\ k\neq j}\right) = 0.$

Ainsi, $P \in Ker(T_n-\lambda Id_{E_n}) \Leftrightarrow\Leftrightarrow \forall k \neq j, a_k = 0$. Autrement dit, $Ker\left(T_n-\frac{1}{j+1}Id_{E_n}\right) = \{a_j f_j / a_j \in \mathbb{R}\} = vect\left(\underbrace{f_j}_{\neq 0\ donc\ libre}\right)$. Ainsi, (f_j) est une base de $Ker\left(T_n-\frac{1}{j+1}Id_{E_n}\right)$.

Partie 3

1. Comme $f \in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$, le cours assure que $F: \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right)$ est de classe C^1sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$ .Par conséquent, $T(f)$ est de classe C^1sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de deux fonctions $F\ et\ \left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)\ C^1$sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*, T(f)'(x) = -\frac{1}{x^2}F(x)+\frac{1}{x}F'(x) = -\frac{1}{x}T(f)(x)+\frac{1}{x}f(x)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, xT(f)'(x)+T(f)(x) = f(x)$. J'en conclus que $T(f)$ est solution sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle : $xy'+y = f(x)$.
2. $T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$. Comme F est de classe C^1sur $\mathbb{R}$ et $F' = f, \lim_{x\to 0} T(f)(x) = F'(0) = f(0) = T(f)(0)$. Ainsi $T(f)$ est continue en 0.

3. T est linéaire et pour tout $f \in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $T(f)$: $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)$ est de classe C^1sur $\mathbb{R}^*$donc continue sur sur $\mathbb{R}^*$amis aussi continue en 0 donc finalement et pour tout $f \in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $T(f) \in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ainsi, T définit un endomorphisme sur $C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. T étant linéaire, décrivons le noyau de T pour étudier son injectivité. $Ker(T)$contient la fonction nulle. Soit $f \in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
$f \in Ker(T) \Leftrightarrow T(f) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \neq 0, \frac{1}{x}F(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \neq 0, F(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \neq 0, F'(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \neq 0, f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f = 0.$
Ainsi, $Ker(T)$ ne contient que la fonction nulle. Donc T est injective.
Nous avons montré que toutes les images par T sont de classe C^1sur $\mathbb{R}^*$. Par conséquent, la fonction u: $(x \mapsto |x-1|)$ qui appartient à $C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mais qui n'est pas de classe C^1sur $\mathbb{R}^*$. Par conséquent, u n'a pas d'antécédent par T. T n'est donc pas surjective de $C°(\mathbb{R},\mathbb{R}) sur\ C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
5. Soit $f \in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $f \in Ker\left(T - \frac{1}{2}Id\right) \Leftrightarrow T(f) = \frac{1}{2}f \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \forall x \neq 0, \frac{1}{x}F(x) = \frac{1}{2}f(x) \\ f(0) = \frac{1}{2}f(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \neq 0, F'(x) - \frac{2}{x}F(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{a(x)=-\frac{2}{x} \\ A(x)=-2\ln(x)=-\ln(x^2) \\ e^{-A(x)}=x^2}} \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}/\forall x \neq 0, F(x) = kx^2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}/\forall x \neq 0, f(x) = 2kx \\ f(0) = 0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{en\ posant \\ k'=2k}} \exists k' \in \frac{\mathbb{R}}{\forall x} \neq 0, f(x) = k'x \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{R}/f = k'id_{\mathbb{R}}.$$

Ainsi, $Ker\left(T - \frac{1}{2}Id\right) = vect(id)$.

Soit l'application Δ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
1. Montrer que si (P_n)est une suite de polynômes telle que: $\forall n, \deg(P_n) = n$ alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* base de $\mathbb{R}$[X].
2. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer $Ker(\Delta)$ et $Im(\Delta)$.
4. Montrer qu'il existe une et une seule famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $H_0 = 1\ et\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(H_n) = H_{n-1}\ et\ H_n(0) = 0$.
5. Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une base de $\mathbb{R}[X]$.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_p[X]$. Montrer que $P = \sum_{n=0}^{p}(\Delta^n(P))(0)H_n$.
7. Montrer que : $\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(X+k)$ puis $(\Delta^nP)(0) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(k)$.
8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \frac{1}{n!}X(X-1)(X-2)..(X-n+1)$.

1. Soit (P_n) une suite de polynômes telle que: $\forall n, \deg(P_n) = n$. Montrons que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* base de $\mathbb{R}[X]$ i.e. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}$[X].

$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}$[X].
<u>Liberté : Soit $n \in \mathbb{N}$.</u> La famille $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$étant échelonnée en degré et sans polynôme nul, cette famille est libre. J'en déduis que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. Ajoutons aussi que la famille $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ de cardinal $n+1$, égal à dim $(\mathbb{R}_n[X])$; en conséquence, la famille $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
<u>Genèse : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$</u>. Considérons un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \deg(P)$. Alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, P s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$. Ainsi, tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est bien une combinaison linéaire des polynômes $P_n\ tq\ n \in \mathbb{N}$. J'en conclus que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]$.
Ainsi, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* base de $\mathbb{R}[X]$. En conséquence, tout polynôme de $\mathbb{R}$[X] s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\Delta(P) = P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}[X]$.

Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
$\Delta(aP+bQ) = \big(aP(X+1) + bQ(X+1)\big) - \big(aP(X) + bQ(X)\big) = a\big(P(X+1) - P(X)\big) + b\big(Q(X+1) - Q(X)\big) = a\,\Delta(P) + b\,\Delta(Q)$.
Ainsi, Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3. ***<u>$Im(\Delta)$</u>***: Comme $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$, $(\Delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $Im(\Delta)$.

Or, $\Delta(X^n) = (X+1)^n - X^n = \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right] - X^n = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}X^k\ si\ n \geq 1 \\ 0\ si\ n = 0 \end{cases}$. Donc, $\deg\big(\Delta(X^n)\big) = \begin{cases} n-1\ si\ n \geq 1 \\ -\infty\ si\ n = 0 \end{cases}$.
Par conséquent, $(\Delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est encore génératrice de $Im(\Delta)$. De plus, $(\Delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg\big(\Delta(X^n)\big) = n-1$; donc, d'après la première question, $(\Delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. J'en conclus que $Im(\Delta) = vect(\Delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}} = \mathbb{R}[X]$. J'en déduis que Δ est surjective de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}[X]$.
<u>$Ker(\Delta)$</u>: Il est évident que tout polynôme P constant vérifie $P(X+1) - P(X) = 0$ et se trouve dans $Ker(\Delta)$. De plus, imaginons un instant que $Ker(\Delta)$ contienne un polynôme P non constant ; alors, d'après d' Alembert Gauss, P admet au moins un racine complexe a. Comme $\Delta(P) = 0, P(X+1) = P(X)$. Alors, $P(a+1) \underbrace{=}_{car\ P(X+1)=P(X)} P(a) \underbrace{=}_{\substack{car\ a \\ racine\ de\ P}} 0$. Puis $P(a+2) \underbrace{=}_{car\ P(X+1)=P(X)} P(a+1) \underbrace{=}_{\substack{car\ a \\ racine\ de\ P}} 0$.
On montre alors facilement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(a+n) = 0$. Ainsi, tous les complexes $a+n$, tels que $n \in \mathbb{N}$, sont les racines de P. P a donc une infinité de racines et par suite, P est le polynôme nul ce qui contredit le fait que P n'est pas constant. J'en conclus que $Ker(\Delta)$ ne contient pas de polynôme non constant.
J'en conclus que $Ker(\Delta)$ est l'ensemble des polynômes constants i.e. $Ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$. J'en déduis que Δ $n'est\ pas\ injective$.

4. Posons $H_0 = 1$.

<u>Initialisation</u> : $H_0\ existe$.
Comme Δ est surjective de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}[X]$, H_0 admet un antécédent T_0 par Δ et le cours assure que les polynômes T vérifiant $\Delta(T) = H_0$ sont les polynômes de la forme $T_0 + K$ tel que $K \in Ker(\Delta)$ i.e. de la forme $T_0 + \lambda$ tel que $\lambda \in \mathbb{R}$.
Or, $(T_0 + \lambda)(0) = 0 \Leftrightarrow T_0(0) + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -T_0(0)$.
Ainsi, $H_1 = T_0 - T_0(0)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\Delta(H_1) = H_0$ et $H_1(0) = 0$. Donc H_1 *existe* et est unique.

Propagation : Soit n un entier naturel. Supposons construis et uniques les polynômes $H_0, H_1, \dots, H_n$ $tels\ que\ \ \forall k \in [\![1,n]\!], \Delta(H_k) = H_{k-1}\ et\ H_k(0) = 0$. Construisons H_{n+1}:
Comme Δ est surjective de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}[X], H_n$ admet un antécédent T_n par Δ et le cours assure que les polynômes T vérifiant $\Delta(T) = H_n$ sont les polynômes de la forme $T_n + K$ tel que $K \in Ker(\Delta)$ i.e. de la forme $T_n + \lambda$ tel que $\lambda \in \mathbb{R}$.
Or, $(T_n + \lambda)(0) = 0 \Leftrightarrow T_n(0) + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -T_n(0)$.
Ainsi, $H_{n+1} = T_n - T_n(0)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\Delta(H_{n+1}) = H_n$ et $H_{n+1}(0) = 0$. Donc H_{n+1} $existe$ et est unique.
Conclusion : il existe une et une seule famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $H_0 = 1\ et\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(H_n) = H_{n-1}\ et\ H_n(0) = 0$.

9. Nous allons appliquer le résultat démontré au 1. Pour cela, il faut prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, deg(H_n) = n$.

Tout d'abord, montrons que $\forall P \in \mathbb{R}[X], non\ constant,, \deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$. J'ai prouvé que $\forall k \in \mathbb{N}, \deg\left(\Delta(X^k)\right) = \begin{cases} k-1\ si\ k \geq 1 \\ -\infty\ si\ k = 0 \end{cases}$.
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]\ tq\ \deg(P) = n \geq 1\ et\ a_n \neq 0$. Alors , $\Delta(P) \underbrace{=}_{\substack{car \\ \Delta\ linéaire}} \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta(X^k)$.
Comme $a_n \neq 0, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \deg\big(a_n\Delta(X^n)\big) = \deg\big(\Delta(X^n)\big) = n - 1 > k - 1 = \deg\left(\Delta(X^k)\right) \geq \deg\left(a_k\Delta(X^k)\right)$
Par conséquent, $deg\Delta(P) = \deg(P) - 1$. Ainsi, $\forall P \in \mathbb{R}[X], non\ constant,, \deg\big(\Delta(P)\big) = \deg(P) - 1$
Ensuite, montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, deg(H_n) = n$.
Initialisation : H_0 est constant non nul donc $deg(H_0) = 0$.
Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $deg(H_n) = n$. Alors $n = deg(H_n) = deg(\Delta(H_{n+1})) = deg(H_{n+1}) - 1$. Donc, $deg(H_{n+1}) = n + 1$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, deg(H_n) = n$.
Alors, d'après la question 1., je peux conclure que : $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une base de $\mathbb{R}[X]$.

10. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_p[X]$.
$(H_n)_{n\in[\![0,p]\!]}$est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_p[X]$ de cardinal $p + 1$, égal à dim $(\mathbb{R}_p[X])$. De plus, cette famille est extraite de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$qui est libre (car base de $\mathbb{R}[X]$); par conséquent, $(H_n)_{n\in[\![0,p]\!]}$est libre. J'en conclus que $(H_n)_{n\in[\![0,p]\!]}$est une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Donc P s'écrit comme combinaison linéaire des polynômes $H_0, H_1, \dots, H_p$. Il existe donc des uniques réels $\alpha_0, .., \alpha_n$ tels que : $P = \sum_{n=0}^{p} \alpha_n H_n$.
Alors $\forall k \in [\![0,p]\!], \Delta^k(P) \underbrace{=}_{\substack{car \\ \Delta^k\ linéaire}} \sum_{n=0}^{p} \alpha_n \Delta^k(H_n) \underbrace{=}_{\substack{car\ si\ k>n, \\ \Delta^k(H_n)=0}} \sum_{n=k}^{p} \alpha_n \Delta^k(H_n) \underbrace{=}_{\substack{car \\ \Delta(H_n)=H_{n-1} \\ \Delta^2(H_n)=\Delta(H_{n-1})=H_{n-2} \\ \vdots \\ \Delta^k(H_n)=H_{n-k}}} \sum_{n=k}^{p} \alpha_n H_{n-k}$ $et\ par\ suite,$

$\Delta^k(P)(0) = \sum_{n=k}^{p} \alpha_n H_{n-k}(0) \underbrace{=}_{car\ si\ l\geq 1, H_l(0)=0} \alpha_k H_0(0) = \alpha_k$. Ainsi, $P = \sum_{n=0}^{p} (\Delta^n(P))(0) H_n$.

11. Montrer par récurrence sur n que : $\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k)$.
Initialisation : $\Delta^0(P) = P = (-1)^{0-0}\binom{0}{0} P(X+0) = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} P(X+k)$.
Propagation : Soit n un entier naturel. Supposons que $\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} P(X+k)$.
Alors $\Delta^{n+1}(P) = \Delta\big(\Delta^n(P)\big) = \Delta\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} P(X+k)\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} \Delta\big(P(X+k)\big)$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\big(P(X+k+1) - P(X+k)\big) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} P(X+k+1) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} P(X+k)$$

Changement d'indice $j = k + 1$ sur la première somme

$$= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n-j+1}\binom{n}{j-1} P(X+j) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} P(X+k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n-j+1}\binom{n}{j-1} P(X+j) - \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\binom{n}{j} P(X+j)$$

On isole le dernier terme de la 1ère somme et le premier terme de la 2ème somme.

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j+1}\binom{n}{j-1} P(X+j) - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j}\binom{n}{j} P(X+j) + (-1)^0\binom{n}{n} P(X+n+1) - (-1)^n\binom{n}{0} P(X)$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j+1}\binom{n}{j-1} P(X+j) - (-1)^{n-j}\binom{n}{j} P(X+j)\right] + (-1)^0\binom{n}{n} P(X+n+1) - (-1)^n\binom{n}{0} P(X)$$

Formule de Pascal

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j+1}[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}] P(X+j)\right] + (-1)^0\binom{n}{n} P(X+n+1) + (-1)^{n+1}\binom{n}{0} P(X)$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j+1}\binom{n+1}{j} P(X+j)\right] + P(X+n+1) + (-1)^{n+1} P(X)$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n-j+1}\binom{n+1}{j} P(X+j)\right]\ OK\ !!!$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} P(X+k)$.
Par suite, $(\Delta^n P)(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} P(k)$.

12. Posons $V_0 = 1 = H_0\ et\ \forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \frac{1}{n!} X(X-1)(X-2)..(X-n+1)$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n(0) = 0\ et$
$V_1 = X\ donc\ \Delta(V_1) = X + 1 - X = 1 = V_0 = H_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}, \Delta(V_n) = V_n(X+1) - V_n(X) = \left(\frac{1}{n!}(X+1)X(X-1)..(X+1-n+1)\right) - \left(\frac{1}{n!}X(X-1)(X-2)..(X-n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{n!} X(X-1)(X-2)..(X+2-n)[(X+1) - (X-n+1)]$$

$$= \frac{1}{n!}X(X-1)(X-2)..(X+2-n)[n] \ = \frac{1}{(n-1)!}X(X-1)(X-2)..(X-(n-1)+1) = V_{n-1}$$

Donc, la suite (V_n) vérifie $V_0 = 1 = H_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n(0) = 0$ et $\Delta(V_n) = V_{n-1}$. Donc, par l'unicité de la suite (H_n), la suite (V_n) est la suite (H_n). J'en conclus que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \frac{1}{n!}X(X-1)(X-2)..(X-n+1)$.

Soit Ψ l'application qui, à une fonction f, associe sa dérivée f'.

1. Montrer que Ψ est un endomorphisme de $F = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Est-ce un automorphisme de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Soit E L'ensemble des fonctions de la forme $\left(x \mapsto \tilde{P}(x)\cos(x) + \tilde{Q}(x)\sin(x)\right)$où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$.

3. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Montrer que $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E.
   où $f_1: (x \mapsto sin(x))$ $f_2: (x \mapsto xsin(x))$ $f_3: (x \mapsto \cos(x))$ et $f_4: (x \mapsto xcos(x))$.
5. Montrer que E est stable par Ψ. On note D l'endomorphisme de E induit par Ψ. On note Id_E l'application identité sur E.
6. Montrer que D est un automorphisme de E .
7. Déterminer, selon les valeurs du réel λ, le rang de $D^2 - \lambda Id_E$.
8. Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de $D^2 + Id_E$.
9. En déduire que $D^4 + 2D^2 + Id_E$ est l'application nulle de E.
10. Retrouver alors que D est bijective et calculer D^{-1} en fonction de D.

On note V le sous-espace de $\mathscr{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2.

11. Déterminer la dimension de V.
12. Vérifier que V est stable par composition.
13. Montrer que les éléments de V bijectifs sont les éléments de la forme : $\alpha Id_E + \beta\, D^2$ tel que α et β réels distincts.
14. Résoudre dans **R** l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.
15. Déterminer le noyau de $\Psi^2 + Id_F$.
16. Montrer que E est le noyau de $(\Psi^2 + Id_F)^2$.
17. Conclure que E est exactement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$.

1. $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), f' \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $(f,g) \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ et a, et b réels , $\Psi(\mathrm{af}+\mathrm{bf}) = (af+bg)' = af' + bg'f) = a\Psi(\mathrm{f}) + b\Psi(\mathrm{g})$. Ainsi, Ψ est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Non, Ψ n'est pas un automorphisme de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$ donc Ψ n'es pas injective.
3. $E = \{\left(x \mapsto \tilde{P}(x)\cos(x) + \tilde{Q}(x)\sin(x)\right) / \ P , Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$={ $(x \mapsto (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x))/a,b,c,d$ réels}

$E = \{af_4 + bf_3 + cf_2 + df_1 / a,b,c,d$ réels }. Ainsi, $E = vect(f_1,f_2,f_3,f_4)$. Comme (f_1,f_2,f_3,f_4) est une famille de vecteurs de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, E est le ss-e-v de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par (f_1,f_2,f_3,f_4).

4. Montrons que (f_1,f_2,f_3,f_4) est libre : Soit a,b,c,d réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$=0.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, asin\,(x) + bxsin(x) + ccos(x) + dxcos(x) = 0$.

En particulier pour $x = 0, c = 0$.Puis pour $x = \pi, -c - d\pi = 0$ donc $d = 0$. Puis pour $x = \frac{\pi}{2}$ puis $x = -\frac{\pi}{2}, a + b\frac{\pi}{2} = 0$ et $-a + b\frac{\pi}{2} = 0$ docn $a = b = 0$. Ainsi, (f_1,f_2,f_3,f_4) est libre et est une base de E. J'en déduis que $\dim(E) = 4$.

5. Soit f un élément de E. Alors il existe a,b,c et d réels tels que : $f = (af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4)$.

Ψ étant linéaire, $\Psi(af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4) = a\Psi(f_1) + b\Psi(f_2) + c\Psi(f_3) + d\Psi(f_4)$.

Or, $\Psi(f_1) = f_3$, $\Psi(f_2) = f_1 + f_4$, $\Psi(f_3) = -f_1$ et $\Psi(f_4) = -f_2 + f_3$. Donc, $\Psi(f_1), \Psi(f_2), \Psi(f_3)$ et $\Psi(f_4)$ sont dans E.

Comme E est stable par combinaison linéaire, , $\Psi(af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4) = a\Psi(f_1) + b\Psi(f_2) + c\Psi(f_3) + d\Psi(f_4). \in E$. J'en conclus que E est stable par Ψ. Par conséquent $D: \begin{pmatrix} E \to E \\ f \mapsto f' \end{pmatrix}$ est l'endomorphisme de E induit par Ψ .

6. 1ère méthode matricielle : $M = mat_B D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $M \sim_c \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $rgM = 4$. Donc M est inversible et ainsi D est un automorphisme de E.
7. 2ème méthode par le noyau : Ker(D) contient la fonction nulle ω car $D\,(\omega) = \omega' = \omega$. Soit f un élément de E. Alors il existe a,b,c et d réels tels que : $f = (af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4)$ et $\Psi(f) = \omega$.

Ψ étant linéaire, $\Psi(f) = \Psi(af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4) = a\Psi(f_1) + b\Psi(f_2) + c\Psi(f_3) + d\Psi(f_4) = af_3 + bf_1 + bf_4 - cf_1 - df_2 + df_3$.

Alors, $(a+d)f_3 + (b-c)f_1 + bf_4 - df_2 = \omega$. Comme Best libre, nécessairement, $a + d = b - c = b = -d = 0$ et par suite, $a = b = c = d = 0$. Ainsi, $Ker(D) = \{\omega\}$. D est donc injective. Comme E est de dimension finie et d est un endomorphisme de E, l'injectivité de D suffit à conclure que ainsi D est un automorphisme de E.

8. $mat_B(D^2 - \lambda Id_E) = mat_B(D^2) - \lambda mat_B(Id_E) = M^2 - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda I_4 = \underbrace{\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire inférieure}}$.

   Si $\lambda = -1$ alors $rgD^2 - \lambda Id_E = 1$ car $M^2 - \lambda I_4$ne contient qu'une colonne non nulle.
   Si $\lambda \neq -1$ alors $rgD^2 - \lambda Id_E = 4$. Car $M^2 - \lambda I_4$est triangulaire avec aucun coeff. de la diagonale nul.

9. $rgD^2 + Id_E = 1$. Donc le théorème du rang assure que $\dim Ker(D^2 + Id_E) = 3$.

De plus, $mat_B D^2 + Id_E = M^2 + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, f_1, f_3, f_4 sont éléments de $Ker(D^2 + Id_E)$. De pkus, la famille , (f_1, f_3, f_4) étant extraite de la famille libre B , est libre aussi et maximale dans $Ker(D^2 + Id_E)$. Ainsi, (f_1, f_3, f_4) est une base de $Ker(D^2 + Id_E)$.

De plus, $(D^2 + Id_E)(f_2) = 2f_3$ donc $(D^2 + Id_E)\left(\frac{1}{2}f_2\right) = f_3$. Ainsi, $f_3 \in Im(D^2 + Id_E)$. Comme f_3 est non nul , (f_3) est libre et maximale dans $Im(D^2 + Id_E)$.Ainsi (f_3) est une base de $Im(D^2 + Id_E)$.

10. Comme $f_3 \in\ Ker(D^2+Id_E), vect(f_3) = \ Im(D^2+Id_E) \subset Ker(D^2+Id_E)$ ($car\ \ Ker(D^2+Id_E)\ est\ table\ par\ c.l.$). J'en déduis que que $(D^2+Id_E)\circ(D^2+Id_E) = 0$ ce qui donne : $D^4+2D^2+Id_E=0$.
Rque : on aurait pu démontrer ce résultat matriciellement en prouvant, par le calcul, que $M^4+2M^2+Id_E=0$.
11. Alors, $(-D^3-2D^1)\circ D = Id_E = D\circ(-D^3-2D^1)$. Donc D bijectif et $D^{-1}=(-D^3-2D^1)$.
12. $V = vect(D^2, id)$. Comme D² et id sont des éléments de de $\mathscr{L}(E)$, V est un ss-e-v de $\mathscr{L}(E)$, est le ss-e-v de $\mathscr{L}(E)$ engendré par D^2 et Id_E. De plus, D^2 et Id_E ne sont pas colinéaires puisque M^2 et I_4 ne le sont pas ; ainsi, (D^2, id) est une base de V. Donc $dimV = 2$.
13. $(aD^2+bid_E)\circ(a'D^2+b'id_E) = aa'D^4+(ab'+a'b)D^2+bb'id_E = aa'(id_E-2D^2)+(ab'+a'b)D^2+bb'id_E$
$= (-2aa'+ab'+a'b)D^2+(aa'+bb')id \in V$. Donc V est stable par composition.
14. Soit $u = aD^2+bid_E \in V$.

$mat_B u = aM^2+bI_4 = \begin{pmatrix} -a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+b & 0 & 0 \\ 0 & 2a & -a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a+b \end{pmatrix}$. $Et\ \det(aM^2+bI_4) = (b-a)^4$. Donc

Alors, $u\ bijective \Leftrightarrow aM^2+bI_4\ inversible \Leftrightarrow \det(aM^2+bI_4)\neq 0 \Leftrightarrow b\neq a$.
Ainsi, les éléments bijectifs de V sont les endomorphismes $aD^2+bid_E\ tq\ b\neq a$.

15. Les solutions de $y''+y=0$ sont toutes les fonctions de la forme $\alpha cos+\beta sin$ tq α,β réels . Ce sont donc toutes les combinaisons linéaires de $f_1\ et\ f_3$. Toutes les solutions de cette équation différentielles sont dans $F = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
16. Soit $f\in F$.
$f\in Ker(\psi^2+Id_F) \Leftrightarrow f''+f=0 \Leftrightarrow f\in vect(f_1, f_3)$. Ainsi, $Ker(\psi^2+Id_F) = vect(f_1, f_3)$.
17. Soit $f\in F$.
$f\in Ker((\psi^2+Id_F)^2) \Leftrightarrow (\psi^4+2\psi^2+Id_F)(f)=0 \Leftrightarrow (\psi^2+Id_F)((\psi^2+Id_F)(f))=0 \Leftrightarrow (\psi^2+Id_F)(f)\in\ Ker(\psi^2+Id_F)$
$\Leftrightarrow (\psi^2+Id_F)(f)\in vect(f_1, f_3)$.
$\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2/f''+f=\alpha f_1+\beta f_3$.
$\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2/\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)+f(x)=\alpha\sin(x)+\beta\cos(x)$
<u>Résolvons l'équation différentielle : $(edl2)$: $y''+y=\alpha\sin(x)+\beta\cos(x)$</u>
$Sol(edl2H) = vect(f_1, f_3)$.
Solution particulière ?
Cherchons une solution particulière de <u>$(edl2)$</u>de la forme $g: (x\mapsto (Ax+B)\sin(x)+(Cx+D)\cos(x))$ tq A,B,C,D réels à déterminer.

$$\forall x\in\mathbb{R}, g''(x)+g(x)=\alpha\sin(x)+\beta\cos(x)$$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}, (2A-D-Cx)\cos(x)-(2C+B+Ax)\sin(x)+(Ax+B)\sin(x)+(Cx+D)\cos(x)=\alpha\sin(x)+\beta\cos(x)$
$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}, (2A-\beta)\cos(x)-(2C+\alpha)\sin(x)=0$
$\overset{car\ la\ famille\ (\cos,\sin) est\ libre}{\Leftrightarrow} \begin{cases}2A-\beta=0\\2C+\alpha=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=\frac{1}{2}\beta\\C=\frac{1}{2}\alpha\end{cases}$. Donc, $g: (x\mapsto\left(\frac{1}{2}\beta x\right)\sin(x)+\left(\frac{1}{2}\alpha x\right)\cos(x))$ est une solution particulière de notre équation différentielle <u>$(edl2)$</u>. Ainsi, les solutions de $(edl2)$ sont toutes les fonctions de la forme $(x\mapsto\left(\frac{1}{2}\beta x+k\right)\sin(x)+\left(\frac{1}{2}\alpha x+k'\right)\cos(x))$ tq k et k' réels .
Alors, $f\in Ker((\psi^2+Id_F)^2) \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 et\exists(k,k')\in\mathbb{R}^2/\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\left(\frac{1}{2}\beta x+k\right)\sin(x)+\left(\frac{1}{2}\alpha x+k'\right)\cos(x)$
$\Leftrightarrow \exists(\alpha',\beta')\in\mathbb{R}^2 et\exists(k,k')\in\mathbb{R}^2/\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=(\beta' x+k)\sin(x)+(\alpha' x+k')\cos(x)$
$\Leftrightarrow f\in vect(f_1, f_2, f_3, f_4)$.
Ainsi, $Ker(\psi^2+Id_F)^2) = vect(f_1, f_2, f_3, f_4) = E$.
18. Tout d'abord , on montre facilement par récurrence qu'une solution de $(edl4) = f^{(4)}+2f^{(2)}+f=0$ est de classe $C^\infty sur\ \mathbb{R}$.
Soit $f\in F. f^{(4)}+2f^{(2)}+f=0. \Leftrightarrow (\psi^4+2\psi^2+Id_F)(f)=0 \Leftrightarrow f\in Ker((\psi^2+Id_F)^2)$. Donc, $Ker((\psi^2+Id_F)^2)$ est l'ensemble des solutions de $(edl4)$. Alors d'après la question précédente , je peux conclure que E est exactement l'ensemble des solutions de $f^{(4)}+2f^{(2)}+f=0$. Ainsi , $Sol(edl4) = vect(f_1, f_2, f_3, f_4) = E$