Démonstrations du chapitre sur les matrices d'applications linéaires

Def :

Matrice d'une application linéaire :

Soit $B_1 = (\overrightarrow{e_k})_{k=1..p}$ une base du K-e-v E $(dimE = p)$ et $B_2 = (\overrightarrow{v_k})_{k=1..n}$ une base du K-e-v F $(dimF = n)$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

La matrice de f dans les bases B_1 et B_2, notée $mat_{B_1,B_2}(f)$, est la matrice de la famille $(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots, f(\overrightarrow{e_p}))$ dans la base B_2. Autrement dit,

$$M = mat_{B_1,B_2}(f) = mat_{B_2}\left(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots, f(\overrightarrow{e_p})\right) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & .. & f(\overrightarrow{e_p}) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots a_{2p} \\ & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots a_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} selon\ \vec{v}_1 \\ selon\ \vec{v}_2 \\ \dots \\ selon\ \vec{v}_n \end{matrix} \end{array} \in M_{n,p}(K).$$

$$f(\overrightarrow{e_k}) = a_{1k}\overrightarrow{v_1} + a_{2k}\overrightarrow{v_2} + \dots + a_{nk}\overrightarrow{v_n}$$

Matrice d'un endomorphisme:

Soit $B = (\overrightarrow{e_k})_{k=1..p}$ une base du K-e-v E $(dimE = p)$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.

La matrice de f dans la base B notée $mat_B(f)$, est la matrice de la famille $(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots, f(\overrightarrow{e_p}))$ dans la base B. Autrement dit,

$$M = mat_B(f) = mat_B\left(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots, f(\overrightarrow{e_p})\right) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & .. & f(\overrightarrow{e_p}) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots a_{2p} \\ & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots a_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} selon\ \vec{e}_1 \\ selon\ \vec{e}_2 \\ \dots \\ selon\ \vec{e}_p \end{matrix} \end{array} \in M_p(K).$$

$$f(\overrightarrow{e_k}) = a_{1k}\overrightarrow{E_1} + a_{2k}\overrightarrow{E_2} + \dots + a_{Pk}\overrightarrow{e_p}$$

NB : Une telle matrice se lit donc en colonne : la colonne k contient les composantes du vecteurs $f(\overrightarrow{e_k})$ dans la base B_2 ce qui signifie que $f(\overrightarrow{e_k}) = a_{1k}\overrightarrow{v_1} + a_{2k}\overrightarrow{v_2} + \dots + a_{nk}\overrightarrow{v_n}$.

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par : $f(P) = (\tilde{P}(0) + 4\widetilde{P'}(1), 3\tilde{P}(1) - \tilde{P}'(2))$. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$ et donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$.

$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) \in \mathbb{R}^2$.

$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, f(aP+bQ) = \left(\widetilde{aP+bQ}(0) + 4(\widetilde{aP+bQ})'(1), 3(\widetilde{aP+bQ})(1) - (\widetilde{aP+bQ})'(2)\right)$

$$= \left(a\tilde{P}(0) + b\tilde{Q}(0) + 4a\widetilde{P'}(1) + 4b\widetilde{Q'}(1), 3a\tilde{P}(1) + 3b\tilde{Q}(1) - a\widetilde{P'}(2) - b\widetilde{Q'}(2)\right)$$

$$= \left(a\tilde{P}(0) + 4a\tilde{P}'(1), 3a\tilde{P}(1) - a\widetilde{P'}(2)\right) + \left(b\tilde{Q}(0) + 4b\widetilde{Q'}(1), 3b\tilde{Q}(1) - b\widetilde{Q'}(2)\right)$$

$$= a\left(\tilde{P}(0) + 4\widetilde{P'}(1), 3\tilde{P}(1) - \widetilde{P'}(2)\right) + b\left(\tilde{Q}(0) + 4\widetilde{Q'}(1), 3\tilde{Q}(1) - \widetilde{Q'}(2)\right)$$

$$= af(P) + bf(Q)$$

Ainsi, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$.

Soit $B_1 = (1, X, X^2)$ et $B_2 = ((1,0),(0,1))$ les bases canoniques de respectivement $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$.

$f(1) = (1,3) = 1(1,0) + 3(0,1)$

$f(X) = (4,3) = 4(1,0) + 3(0,1)$

$f(X^2) = (8,-1) = 8(1,0) - 1(0,1)$

Donc, $M = mat_{B_1,B_2}(f) = mat_{B_2}(f(1), f(X), f(X^2)) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple important : les matrices de l'identité

Soit B_1, B_2 deux bases de E et $\dim(E) = p$. Alors,

$$mat_{B_2}\, id_E = mat_{B_1}\, id_E = I_p \quad \text{et} \quad mat_{B_2,B_1}\, id_E = mat_{B_1}\, B_2 = matrice\ de\ passage\ de\ B_1\ à\ B_2 = P(B_1, B_2).$$

Démo : Soit $B_1 = (e_1, e_2, .., e_p)$ et $B_2 = (u_1, u_2, .., u_p)$.

Alors, $\forall k \in [\![1,p]\!], id(e_k) = e_k = 0e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_{k-1} + 1e_k + 0e_{k+1} + .. + 0e_n$. Donc, $mat_{B_1}\, id_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_p$.

De Plus, $\underbrace{mat_{B_1}\, B_2}_{matrice\ de\ passage\ de\ B_1\ à\ B_2.} = mat_{B_1}(u_1, u_2, .., u_p) = mat_{B_1}(id(u_1), id(u_2), .., id(u_p)) = mat_{B_2,B_1} id.$

QDC 7 Propriété fondamentale :
Soit $B_1=(\vec{e_k})_{k=1..p}$ une base du K-e-v E $(dimE=p)$ et $B_2=(\vec{v_k})_{k=1..n}$ une base du K-e-v F $(dimF=n)$.
Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $M=mat_{B_1,B_2}(f)$ Alors,

$$\forall\vec{x}\in E,\ \underbrace{mat_{B_2}\big(f(\vec{x})\big)}_{Y}=\underbrace{mat_{B_1,B_2}(f)}_{M}\times\underbrace{mat_{B_1}(\vec{x})}_{X}\quad i.e.\ Y=MX\,.$$

Démo de la propriété fondamentale : Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$et $M=mat_{B_1,B_2}(f)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots\ldots a_{1p}\\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots a_{2p}\\ & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots a_{np}\end{pmatrix}$.

Montrons que : $\forall\vec{x}\in E,\ mat_{B_2}(f(\vec{x}))=mat_{B_1,B_2}(f)\times mat_{B_1}(\vec{x})=MX$.

On a : $M=mat_{B_2}\Big(f(\vec{e_1}),f(\vec{e_2}),\ldots,f(\vec{e_p})\Big)=\begin{array}{c}\begin{matrix}f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & .. & f(\vec{e_k}) & .. & f(\vec{e_p})\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1k} & ..a_{1p}\\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2k} & ..a_{2p}\\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nk} & ..a_{np}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}selon\ \vec{v_1}\\ selon\ \vec{v_2}\\ \cdots\\ selon\ \vec{v_n}\end{array}$ i.e. $\forall k\in[\![1,n]\!],\ f(\vec{e_k})=a_{1k}\vec{v_1}+a_{2k}\vec{v_2}+\cdots+a_{nk}\vec{v_n}$.

Soit $\vec{x}\in E$ et $X=mat_{B_1}(\vec{x})=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$ ce qui signifie que : $\vec{x}=\sum_{k=1}^{p}x_k\vec{e_k}$. Par suite,

$f(\vec{x})=f(\sum_{k=1}^{p}x_k\vec{e_k})\underbrace{=}_{car\ f\ linéaire}\sum_{k=1}^{p}x_kf(\vec{e_k})=\sum_{k=1}^{p}x_k(\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\vec{v_i})=\sum_{k=1}^{p}(\sum_{i=1}^{n}x_ka_{ik}\vec{v_i})=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{p}x_ka_{ik}\vec{v_i})=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{p}x_ka_{ik})\vec{v_i}$.

Donc,

$$Y=mat_{B_2}(f(\vec{x}))=\begin{array}{c}f(\vec{x})\\ \begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{p}x_ka_{1k}\\ \vdots\\ \\ \sum_{k=1}^{p}x_ka_{nk}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}selon\ \vec{v_1}\\ selon\ \vec{v_2}\\ \cdots\\ selon\ \vec{v_n}\end{array}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots\ldots a_{1p}\\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots a_{2p}\\ & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots a_{np}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}=MX.$$ OK !

Remarque : on peut prouver réciproquement que si f est une **application** de E dans F telle qu'il existe une matrice M vérifiant : $\forall\vec{x}\in E,\ mat_{B_2}\big(f(\vec{x})\big)=M\times mat_{B_1}(\vec{x})$ alors $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $M=mat_{B_1,B_2}(f)$.

VIDEO : http://youtu.be/FmrdCYMGF1E?hd=1

Théorème fondamentale : Soit $B_1=(\vec{e_k})_{k=1..p}$ une base du K-e-v E et $B_2=(\vec{v_k})_{k=1..n}$ une base du K-e-v F.
Alors, $\nabla:\ \mathscr{L}(E,F)\to M_{n,p}(K)$ est un isomorphisme.
$\qquad f\mapsto mat_{B_1,B_2}f$
En particulier, une application linéaire de E dans F est entièrement définie par sa matrice dans deux bases fixées et toute matrice est la matrice d'une application linéaire.

Démo : $\forall f\in\mathscr{L}(E,F),\nabla(f)\in M_{n,p}(K)$. $\forall(f,g)\in\mathscr{L}(E,F)^2$, $\forall(a,b)\in K^2$,

$\nabla(af+bg)=mat_{B_1,B_2}(af+bg)=mat_{B_2}\Big(af(\vec{e_1})+bg(\vec{e_1}),af(\vec{e_2})+bg(\vec{e_2}),\ldots,af(\vec{e_p})+bg(\vec{e_p})\Big)$

$\underbrace{=}_{par\Delta:(\vec{x}\mapsto mat_{B_2}\vec{x})\ est\ linéaire}a.mat_{B_2}\Big(f(\vec{e_1}),f(\vec{e_2}),\ldots,f(\vec{e_p})\Big)+b.mat_{B_2}\Big(g(\vec{e_1}),g(\vec{e_2}),\ldots,g(\vec{e_p})\Big)=amat_{B_1,B_2}(f)+bmat_{B_1,B_2}(g)$

$=a\nabla(f)+b\nabla(g)$.

Donc, ∇ est une application linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $M_{n,p}(K)$.
Montrons que ∇ est bijective. Ne connaissant pas la dimension de $\mathscr{L}(E,F)$, je dois montrer que ∇ est injective et surjective. Pour cela, montrons que toute matrice de $M_{n,p}(K)$ admet un unique antécédent par ∇.

Soit $M\in M_{n,p}(K)$. Alors $M=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots\ldots a_{1p}\\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots a_{2p}\\ & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots a_{np}\end{pmatrix}$. Posons $\forall k\in[\![1,n]\!],\vec{w_k}=a_{1k}\vec{v_1}+a_{2k}\vec{v_2}+\cdots+a_{nk}\vec{v_n}$. Alors $(\vec{w_k})_{k=1..n}$est une famille de vecteurs de F. Donc d' après le chapitre précédent, il existe une unique $f\in\mathscr{L}(E,F)$ telle que : $\forall k\in[\![1,n]\!],f(\vec{e_k})=\vec{w_k}$. Ainsi, $\exists!\,f\in\mathscr{L}(E,F)/\nabla(f)=M$. Ainsi, ∇ est bijective.

J'en déduis que : $\mathscr{L}(E,F)$est de dimension finie et $dim(\mathscr{L}(E,F))=dim(M_{n,p}(K))=n\times p=dimE\times dimF$

De plus , la famille $\left(\nabla^{-1}(E_{ij})\right)_{\substack{i=1..n\\ j=1...p}}$ est une base de $\mathscr{L}(E,F)$ (car tout automorphisme envoie une base sur une base). De plus , $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, posons $\nabla^{-1}(E_{ij})=f_{ij}$ i.e. $mat_{B_1,B_2}f_{ij}=E_{ij}$; alors, on a : $\forall k\in[\![1,p]\!],f_{ij}(\vec{e_k})=\delta_{kj}\vec{v_i}$.
Je peux donc énoncer le théorème suivant :

Théorème : Si E et F sont de dimension finie alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathscr{L}(E,F))=\dim(E)\times\dim(F)$.
De plus, une base de $\mathscr{L}(E,F)$ est la famille $(f_{ij})_{\substack{i=1..n\\ j=1..p}}$ telle que : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\forall k\in[\![1,p]\!],f_{ij}(\vec{e_k})=\delta_{kj}\vec{v_i}$
En particulier, si E est de dimension finie alors $\dim(E^*)=\dim(E)\dim(K)=\dim(E)$.

VIDEO : https://youtu.be/9NG0uwSoOI0

Caractérisation matricielle du rang, image et noyau d'une application linéaire et d'un isomorphisme

Soit $B_1 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, .., \overrightarrow{e_p})$ base de E et $B_2 = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, .., \overrightarrow{v_n})$.base de F .

VIDEO : https://youtu.be/Cj-p3mEltDs?si=mzXbljxtP2xM_Pe3

Théorème : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $M = mat_{B_1,B_2}(f)$. Alors, $rg(f) = rg(M)$.

Démo : $rg(f) \underbrace{=}_{chap\ application\ linéaire} rg((f(\overrightarrow{e_i}))_{i\in\{1,..,p\}} \underbrace{=}_{chap\ e.v\ de\ dimfinie} rg\left(mat_{B_2}(f(\overrightarrow{e_i}))_{i\in\{1,..,p\}}\right) \underbrace{=}_{\text{def } d'une\ matrice\ d'app.lin.} rgM$.

Théo : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $M = mat_{B_1,B_2}(f)$. Les colonnes de M sont les composantes dans B_2 des vecteurs d'une famille génératrice de $Im(f)$.

Démo : $Imf = vect\ ((f(\overrightarrow{e_i}))_{i\in\{1,..,p\}}$. Or, les colonnes de la matrice M sont les composantes des vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots, f(\overrightarrow{e_p})$ dans la base B_2 .

Théo : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $M = mat_{B_1,B_2}(f)$. Soit $\vec{x} \in E$ et $X = mat_{B_1}\vec{x}$. Alors $\vec{x} \in Ker(f) \Leftrightarrow MX = 0 \Leftrightarrow X \in Ker(M)$.

Démo : Soit $\vec{x} \in E$. Alors, $\vec{x} = \sum_{k=1}^{p} x_k \overrightarrow{e_k}$. Donc, $X = mat_{B_1}\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

$$\vec{x} \in Ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow mat_{B_2}(f(\vec{x})) = mat_{B_2}(\vec{0}) \underset{prop\ 3}{\Longleftrightarrow} mat_{B_1,B_2}(f) \times mat_{B_1}(\vec{x}) = (0)$$

$$\Leftrightarrow MX = 0 \Leftrightarrow X \in Ker(M) \underbrace{\Leftrightarrow}_{M=(a_{ij})} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}.$$

Donc, $Ker(f) = \left\{ \sum_{k=1}^{p} x_k \overrightarrow{e_k} / x_1, ., x_p \ scalaires\ \ et\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = 0 \end{cases} \right\}$.

Je résous le système. Certaines inconnues passeront paramètres (inconnues secondaires). On remplace dans l'expression de $\vec{x}$ les inconnues par leurs expressions en fonction des paramètres afin de trouver une famille génératrice $\mathscr{G}$ de $Ker(f)$. Il suffira alors soit que $\mathscr{G}$ est libre, soit que card $\mathscr{G}$ = dim$Ker(f)$ (cette dimension étant obtenue par le théo du rang par exemple).

Exemple : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & -8 & 2 \\ 4 & 14 & 1 \end{pmatrix}$. Donnons une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$.

Première méthode. On a : $B = (1, X, X^2)$ et $M = mat_B f = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & -8 & 2 \\ 4 & 14 & 1 \end{pmatrix}$.

$rg(f) = rg(M)$. Or, $M \sim_C \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim_C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim_C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donc, $rg(f) = rg(M) = 2$.

De plus, $Im(f) = vect\left(f(1), f(X), f(X^2)\right) = vect(2 - X + 4X^2, 6 - 8X + 14X^2, 1 + 2X + X^2)$.
Donc $\mathscr{F} = (2 - X + 4X^2, 6 - 8X + 14X^2)$ est une famille de $Im(f)$, de cardinal $2 = dim(Im(f))$ et clairement libre, $\mathscr{F}$ est donc une base de $Im(f)$.Le théorème du rang assure alors que $\dim\left(Ker(f)\right) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - rg(f) = 3 - 2 = 1$. Donc $Ker(u)$ est une droite vectorielle.

Cherchons un vecteur non nul de cette droite : Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tq $P = a + bX + cX^2$. Alors $mat_B P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$f(P) = O \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 6b + c = 0 \\ -a - 8b + 2c = 0 \\ 4a + 14b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10b + 5c = 0 \\ -a - 8b + 2c = 0 \\ -18b + 9c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4b \\ c = 2b \end{cases} \Leftrightarrow P = b(-4 + X + 2X^2)$. Donc,

$Ker(f) = vect\left(\underbrace{-4 + X + 2X^2}_{base\ de\ Ker(f)}\right)$.

Deuxième méthode : tout en 1 ci-dessous.
On a : $B = (1, X, X^2)$ et $M = mat_B f$.

$rg(f) = rg(M)$. Or, $M \underbrace{\sim_C}_{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1 \\ C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & 2 \\ \underbrace{2}_{f(1-2X^2)} & \underbrace{2}_{f(X-3)} & \underbrace{1}_{f(X^2)} \end{pmatrix} \underbrace{\sim_C}_{C_1 \leftarrow C_1 - C_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ \underbrace{0}_{f(4-X-2X^2)} & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donc, $rg(f) = rg(M) = 2$ et $Im(f) = vect(0, -5X + 2X^2, 1 + 2X + X^2)$. Donc $\mathscr{F} = (-5X + 2X^2, 1 + 2X + X^2)$ est une famille de $Im(f)$, de cardinal $2 = dim(Im(f))$ et génératrice de $Im(f)$, $\mathscr{F}$ est donc une base de $Im(f)$. Le théorème du rang assure alors que $\dim\left(Ker(f)\right) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - rg(f) = 3 - 2 = 1$. Donc $Ker(f)$ est une droite vectorielle. Or $f(4 - X - 2X^2) = 0$ d'après l'étude du rang de f. Donc, $(4 - X - 2X^2)$est une base de $Ker(f)$.

Théorème : ICI $\underline{\boldsymbol{dimE = dimF} < +\infty.}$ B_1, B_2 bases de respectivement E et F.
1) Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $M = mat_{B_1,B_2}(f)$. $f \in Isom(E,F) \Leftrightarrow M$ inversible $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective.
2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $M = mat_{B_1}(f)$. $f \in GL(E) \Leftrightarrow M$ inversible $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective.

VIDEO https://youtu.be/x9RSS9wNE9M?si=PJ9FaZJc_YJtyKpk

Démo :Posons $n = dim(E) = dim(F) < +\infty. Soit\ f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors, $f\ isomorphisme \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ dim(E)=dim(F)<+\infty.} f\ surjective \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ n=dimF} rgf = dimF = n \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ rgf=rgM} rgM = n \Leftrightarrow M\ inversible.$

Rque : $f\ isomorphisme \Leftrightarrow f\ injective \Leftrightarrow Ker(f) = \{O\} \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E, (f(\vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0)$
$\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E, (mat_{B_2}f(\vec{x}) = 0 \Rightarrow mat_{B_1}\vec{x} = \vec{0}) \Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(K), (MX = O \Rightarrow X = 0) \Leftrightarrow Ker(M) = \{O\} \Leftrightarrow M\ inversible.$

Exemple : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ .Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto \alpha P - XP'$. Pour quelles valeurs de α, f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
Pour répondre à cette question, introduisons la matrice M de f dans la base canonique $B = (1, X, X^2, .., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
$\forall k \in [\![0,n]\!], f(X^k) = \alpha X^k - kX^k = (\alpha - k)X^k = 0.1 + 0.X + 0.X^2 + \ldots + 1X^k + .. + 0X^n$. Donc $M = mat_B f = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & & & (0) \\ & \alpha - 2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \alpha - n \end{pmatrix}$.
Par suite, $\det(M) = (\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - n)$. Alors, $f\ automorphisme\ de\ \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \det(M) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \notin \{1,2, \ldots, n\}$.

Opérations sur les matrices d'applications linéaires.

QDC 7 Théorème Soit $E, F\ et\ G$ des K-e-v de dimension finie et B_1 base de E et B_2 base de F et B_3 base de G.
1) (Rappel) Si $(f, g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et $(\alpha, \beta) \in K^2$ alors $mat_{B_1,B_2}(\alpha f + \beta g) = \alpha\ mat_{B_1,B_2}(f) + \beta\ mat_{B_1,B_2}(g)$.
2) Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $mat_{B_1,B_3}(g \circ f) = mat_{B_2,B_3}(g) \times mat_{B_1,B_2}(f)$. (**)
3) $Si\ f$ est un isomorphisme de $E\ sur\ F$ alors $mat_{B_2,B_1}(f^{-1}) = (mat_{B_1,B_2}(f))^{-1}$.

(**) c'est de là que provient la définition compliquée du produit matriciel !

Démo :
1) ∇ : $(f \mapsto mat_{B_1,B_2}(f))$ est linéaire donc, pour tous $(f, g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et $(\alpha, \beta) \in K^2$, $mat_{B_1,B_2}(\alpha f + \beta g) = \alpha\ mat_{B_1,B_2}(f) + \beta\ mat_{B_1,B_2}(g)$.
2) Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Posons $B_1 = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, .., \vec{e_p})$ base de $E\ et\ B_2 = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, .., \vec{v_n})$ base de F et $B_3 = (\vec{w_1}, \vec{w_2}, .., \vec{w_m})$ base de G.
Notons $A = mat_{B_1,B_2}(f) = (a_{ij}),\ B = mat_{B_2,B_3}(g) = (b_{ij})\ et\ C = mat_{B_1,B_3}(g \circ f) = (c_{ij})$. Alors,
$\forall k \in [\![1,p]\!], f(\vec{e_k}) = \sum_{i=1}^n a_{ik}\vec{v_i}$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], g(\vec{v_i}) = \sum_{j=1}^m b_{ji}\vec{w_j}$.
Donc, $\forall k \in [\![1,p]\!]$,
$g(f(\vec{e_k})) = g(\sum_{i=1}^n a_{ik}\vec{v_i}) = \sum_{i=1}^n a_{ik} g(\vec{v_i}) = \sum_{i=1}^n a_{ik}(\sum_{j=1}^m b_{ji}\vec{w_j}) = \sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^m a_{ik}b_{ji}\vec{w_j}) = \sum_{j=1}^m(\sum_{i=1}^n a_{ik}b_{ji}\vec{w_j})$
$g(f(\vec{e_k})) = \sum_{j=1}^m(\sum_{i=1}^n a_{ik}b_{ji})\vec{w_j}$. Donc, $\forall (k,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,m]\!], c_{jk} = \sum_{i=1}^n a_{ik}b_{ji} = \sum_{i=1}^n b_{ji}\,a_{ik} = (BA)_{jk}$.
Ainsi, $C = BA$.
3)Soit $f \in Isom(E,F)$. Alors $f^{-1} \in Isom(F,E)$ et $mat_{B_2,B_1}(f^{-1})$ et $mat_{B_1,B_2}(f)$ sont inversibles, d'après le théorème démontré plus haut. Montrons que $mat_{B_2,B_1}(f^{-1}) = (mat_{B_1,B_2}(f))^{-1}$.

$$I_p = mat_{B_1,B_1}(id_E) \underbrace{=}_{par\ \mathrm{def.}\ de\ f^{-1}} mat_{B_1,B_1}(f^{-1} \circ f) \underbrace{=}_{d'après\ 2)} mat_{B_2,B_1}(f^{-1}) \times mat_{B_1,B_2}(f).$$

Donc, $mat_{B_2,B_1}(f^{-1}) = (mat_{B_1,B_2}(f))^{-1}$.

(**) C'est pour obtenir cette égalité qu'on a défini le produit matriciel de manière compliqué !!!!

QDC 7 Cas particulier d'un endomorphisme : Soit f un endomorphisme de E et B une base de E.
- Si g est un endomorphisme de E alors $mat_B(f \circ g) = mat_B(f) \times mat_B(g)$.
- $\forall k \in \mathbb{N},\ mat_B(f^k) = (mat_B(f))^k$.
- Si $mat_B(f)$ est inversible alors f est un automorphisme de E et $mat_B(f^{-1}) = (mat_B(f))^{-1}$.

Démo :
- Posons $H(k)$: « $mat_B(f^k) = (mat_B(f))^k$».

Init° : $H(0)\ vraie\ car$ « $mat_B(f^0) = mat_B(id) = I_p = (mat_B(f))^0$.
Propag° : Soit $k \in \mathbb{N}$. Je suppose que $H(k)\ est\ vraie$.
Alors $mat_B(f^{k+1}) = mat_B(f^k \circ f) \underbrace{=}_{théo\ 27.2} mat_B(f^k) \times mat_B(f) \underbrace{=}_{\substack{par\ hypo.\\ de\ récurrence}} (mat_B(f))^k \times mat_B(f) = (mat_B(f))^{k+1}$
Donc, $H_k \Rightarrow H_{k+1}$.
CCL : $\forall k \in \mathbb{N}, H(k)$ est vraie.
- Si $mat_B(f)$ est inversible alors f est un automorphisme de E et $mat_B(f^{-1}) = (mat_B(f))^{-1}$ d'après le théo précédent

Conséquence : Soit E un K-e-v de dimension finie et B une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $M = mat_B(f)$ et $\lambda \in K$.
Il existe un vecteur non nul $\vec{x} \in E$ tel que : $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \det(M - \lambda I) = 0$.

Démo : $mat_B(f - \lambda Id_E) = mat_B(f) - \lambda mat_B(Id_E) = M - \lambda I$.

Il existe un vecteur non nul $\vec{x} \in E$ tel que : $f(\vec{x}) - \lambda\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow f - \lambda Id_E$ non injective $\Leftrightarrow mat_B(f - \lambda Id_E)$non inversible $\Leftrightarrow M - \lambda I$ non inversible $\Leftrightarrow \det(M - \lambda I) = 0$.

VIDEO : https://youtu.be/x9RSS9wNE9M

Exemple : Soit E un K-e-v rapporté à la base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tq $f(\vec{a}) = 4\vec{a} - 2\vec{b} - 4\vec{c}$, $f(\vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ et $f(\vec{c}) = 5\vec{a} - \vec{b} - 5\vec{c}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Im}(f^2) = E$.

$M = mat_B f = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. Donc, $mat_B f^2 \underbrace{=}_{prop.28} M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ \underbrace{2}_{f^2(\vec{a})} & \underbrace{-2}_{f^2(\vec{b})} & \underbrace{4}_{f^2(\vec{c})} \end{pmatrix} \underbrace{\sim_c}_{\substack{C_1 \leftarrow \frac{1}{2}C_1 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \underbrace{1}_{f^2(\frac{1}{2}\vec{a})} & \underbrace{0}_{f^2(\vec{a}+\vec{b})} & \underbrace{0}_{f^2(\vec{c}-2\vec{a})} \end{pmatrix}$

Donc $rg(f^2) = 1$ et $Im(f^2) = vect(\underbrace{-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}_{base\ de\ Im(f^2)})$ et le théorème du rang assure que $\dim(Ker(f^2)) = 2$. Or , $f^2(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0} = f^2(\vec{c} - 2\vec{a})$. Donc $\vec{a} + \vec{b}$ *et* $\vec{c} - 2\vec{a}$ sont deux vecteurs de $Ker(f^2)$. Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants (car $x(\vec{a} + \vec{b}) + y(\vec{c} - 2\vec{a}) = \vec{0} \Rightarrow (x - 2y)\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c} = \vec{0} \underbrace{\Rightarrow}_{car\ B\ libre} x - 2y = 0, x = 0$ *et* $y = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$). Comme $dimKer(f^2) = 2$, $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c} - 2\vec{a})$ est une base de $Ker(f^2)$.

Vérifions que la concaténation de la base de $Im(f^2)$ trouvée et de celle de $Ker(f^2)$ est une base de E.

Soit $\mathscr{F} = (-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} - 2\vec{a})$. $P = mat_B \mathscr{F} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Donc $rg(P) = 3$ et ainsi P est inversible. J'en déduis que $\mathscr{F}$ est une base de E et ainsi $Im(f^2) \oplus Ker(f^2) = E$.

Formules de changement de bases

VIDEO : http://youtu.be/KXMLZtRTNRU?hd=1

QDC 7 Rappel : Formule de changement de bases pour un vecteur ou une famille de vecteurs : Si B et B' sont deux bases de E et $\vec{v} \in E$ *et* $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E alors

$$mat_{B'}\vec{v} = \underbrace{mat_{B'}B}_{\substack{=matrice\ de \\ passage\ de\ B'\text{à}\ B.}} \times mat_B\vec{v}.$$

$$mat_{B'}\mathscr{F} = \underbrace{mat_{B'}B}_{\substack{=matrice\ de \\ passage\ de\ B'\text{à}\ B.}} \times mat_B\mathscr{F}.$$

Démo : Posons $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n})$ et $B' = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n})$ et $P = mat_B B' = (p_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$.

Soit $\vec{v}$ un vecteur de E et $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = mat_B(\vec{v})$ et $X' = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = mat_{B'}(\vec{v})$.

On a donc, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\vec{u_k} = \sum_{i=1}^n p_{ik}\vec{e_i}$ et $\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i\vec{e_i}$ *et* $\vec{v} = \sum_{k=1}^n b_k\vec{u_k}$.

Alors, $\vec{v} = \sum_{k=1}^n b_k(\sum_{i=1}^n p_{ik}\vec{e_i}) = \sum_{k=1}^n(\sum_{i=1}^n p_{ik}b_k\vec{e_i}) = \sum_{i=1}^n(\sum_{k=1}^n p_{ik}b_k\vec{e_i}) = \sum_{i=1}^n(\sum_{k=1}^n p_{ik}b_k)\vec{e_i}$. Alors par unicité de l'écriture de $\vec{v}$ comme c.l. des vecteurs de la base B, $\forall i, a_i = \sum_{k=1}^n p_{ik}b_k$. Cela se traduit matriciellement par : $X = PX'$.

QDC 7 Théorème de formule de changement de base pour les applications linéaires Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soit B_1 et $B_1{}'$ deux bases de l'espace vectoriel E et B_2 et $B_2{}'$ deux bases de l'espace vectoriel F.
Soit $M = mat_{B_1,B_2}(f)$ et $M' = mat_{B_1',B_2'}(f)$
Soit $P = mat_{B_1}B_1'$ =la matrice de passage de B_1 à $B_1{}'$ et $Q = mat_{B_2}B_2'$ =la matrice de passage de B_2 à B_2'.
Alors, $mat_{B_1',B_2'}(f) = mat_{B_2'}B_2 \times mat_{B_1,B_2}(f) \times mat_{B_1}B_1'$ ie. $M' = Q^{-1}MP$.

VIDEO : http://youtu.be/KXMLZtRTNRU?hd=1

Démo : $mat_{B_1',B_2'}(f) = mat_{B_1',B_2'}(id_F \circ (f \circ id_E)) = mat_{B_2,B_2'}id_F \times mat_{B_1',B_2}(f \circ id_E)$
$= mat_{B_2,B_2'}id_F \times \left(mat_{B_1,B_2}(f) \times mat_{B_1',B_1}(id_E) \right) = mat_{B_2'}B_2 \times mat_{B_1,B_2}(f) \times mat_{B_1}B_1'$.

Formule de changement de bases pour un endomorphisme
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit B et B' deux bases de l'espace vectoriel E. Soit $M = mat_B(f)$ et $M' = mat_{B'}(f)$.
Soit $P = mat_B B'$ =la matrice de passage de B à B'.
Alors, $mat_{B'}(f) = mat_{B'}B \times mat_B(f) \times mat_B B'$ ie. $M' = P^{-1}MP$. On dit que M et M' sont semblables.

Démo : il suffit d'appliquer le théorème précédent en prenant $B_1 = B_2$ et $B_1{}' = B_2'$.

Exemple : APPLICATION AU CALCUL DE PUISSANCE D4UNE MATRICE

Soit E un K.e.v de dimension finie 3, de base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et u l'endomorphisme de E tel que : $A = mat_B u = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer une base B' de E dans laquelle la matrice de u est $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire les puissances de A.

Une telle base B' existe $\Leftrightarrow \exists(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in E^3 / (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *libre* et $u(\vec{a}) = 4\vec{a}$, $u(\vec{b}) = \vec{b}$ *et* $u(\vec{c}) = \vec{c}$. Dans le cas, $B' = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

$$car\ mat_{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}u = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(\vec{a}) & u(\vec{b}) & u(\vec{c}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \widehat{4} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} selon \\ \overbrace{\vec{a}} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{array} \ signifie\ que\ u(\vec{a}) = 4\vec{a},\ u(\vec{b}) = \vec{b}\ et\ \ u(\vec{c}) = \vec{c}.$$

Cherchons tous les vecteurs $\vec{x}$ de E vérifiant : $u(\vec{x}) = 4\vec{x}$. Soit $\vec{x} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$ un vecteur quelconque de E.

$$u(\vec{x}) = 4\vec{x} \Leftrightarrow mat_B\ u(\vec{x}) = mat_B(4\vec{x}) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{prop\ 3. \\ +\Delta linéaire}} mat_B\ u \times mat_B(\vec{x}) = 4mat_B(\vec{x}) \Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 4\alpha \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 4\beta \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 4\gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + 2L_2}} \begin{cases} -3\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ -3\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + 2L_2}} \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = \beta\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \beta\vec{k} = \beta(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}).$$

Donc $Ker(u - 4id) = vect(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$.Comme $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ doit être libre, $\vec{a} \neq \vec{0}$ donc prenons $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ $(\beta = 1)$.

Cherchons tous les vecteurs $\vec{x}$ de E vérifiant : $u(\vec{x}) = \vec{x}$. Soit $\vec{x} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$ un vecteur quelconque de E.

$$u(\vec{x}) = \vec{x} \Leftrightarrow mat_B\ u(\vec{x}) = mat_B(\vec{x}) \Leftrightarrow mat_B\ u \times mat_B(\vec{x}) = mat_B(\vec{x}) \Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = \alpha \\ \alpha + 2\beta + \gamma = \beta \\ \alpha + \beta + 2\gamma = \gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = (-\beta - \gamma)\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k} = \beta(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + \gamma(-\vec{\imath} + \vec{k}).$$

Donc $Ker(u - id) = vect(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}, -\vec{\imath} + \vec{k})$.

Comme $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ doit être libre,$(\vec{b}, \vec{c})$ doit être libre. Prenons $\vec{b} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ $(\beta = 1\ et\ \gamma = 0)$ et $\vec{c} = -\vec{\imath} + \vec{k}$ $(\beta = 0\ et\ \gamma = 1)$.

Vérifions maintenant que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est libre.

$$rg(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = rg\left(mat_B(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right) = rg\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = 3 = card\left((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right).$$

Donc, $B' = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est libre et est une base de E telle que $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = mat_{B'}u$.

Alors la formule de changement de base assure que $mat_B u = \ mat_B B' \times\ mat_{B'}u \times\ mat_{B'}B$ i.e. $A = PDP^{-1}$. Par conséquent, $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PD^kP^{-1}$ avec $D^k = \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il reste à déterminer P^{-1}. Pour cela résolvons le système $PX = Y$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = a \\ x + y = b \\ x + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - (c - x) - (b - x) = a \\ y = b - x \\ z = c - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(a + b + c) \\ y = \frac{1}{3}(-a + 2b - c) \\ z = \frac{1}{3}(-a - b + 2c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^k & -1 & -1 \\ 4^k & 1 & 0 \\ 4^k & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^k + 2 & 4^k - 1 & 4^k - 1 \\ 4^k - 1 & 4^k + 2 & 4^k - 1 \\ 4^k - 1 & 4^k - 1 & 4^k + 2 \end{pmatrix}$.

Fin.