FORMULAIRE A TROUS NOMBRES COMPLEXES

Soient $a, z, z', z_1, \dots, z_n, U, V, \Delta$ et δ des nombres complexes.
n un entier naturel et p un entier relatif
r un réel strictement positif, $\alpha, \beta, x, y, \theta$ et θ' des réels.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

RAPPEL : $\theta \equiv \theta' [2\pi]$ signifie que : ____

LES FORMULES (**) ne SONT VALABLES que si z et/ou z' sont NON NULS .

$z = \underbrace{x}_{Re(z)} + i \underbrace{y}_{Im(z)}$ tq x et y réels, est la forme ____ de z.
M est le point du plan d'affixe $z = x + iy$ lorsque ____
$\vec{u}$ est le vecteur d'affixe $z = x + iy$ lorsque ____

- $z = 0$ si et ssi ____ si et ssi ____

- $z = z'$
si et ssi ____
si et ssi
- $Re(z + z') =$ ____ et $Im(z + z') =$ ____
- Si $\alpha \in$ ____ alors $Re(\alpha z) =$ ____ et $Im(\alpha z) =$ ____
- **Généralisation** : Si $\alpha_1, .., \alpha_n$ sont ____ alors $Re(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k) =$ ____ et $Im(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k) =$ ____ .

- $\bar{z} \overset{def}{=} x - iy$.
- $\bar{\bar{z}} =$ ____ et $z \times \bar{z} =$ ____ $\in$ ____
- $Re(z) =$ ____ et $Im(z) =$ ____ .
- $\overline{z + z'} =$ ____ et ____ $= \bar{z} \times \bar{z'}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} =$ ____ si $z' \neq 0$ et si $\alpha \in$ ____ , alors $\overline{\alpha z} =$ ____ .

Généralisation $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} =$ ____ et $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} =$ ____ et $\overline{z^n} =$ ____.

$|z| \overset{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = OM = \|\vec{u}\|$.
- Si z est réel alors le module de z est la valeur absolue de z.
- $|\bar{z}| = |-z| = |z|$
- $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$.
- $|zz'| =$ ____ , et si z non nul alors, $\left|\frac{1}{z}\right| =$ ____ et $\left|\frac{z'}{z}\right| =$ ____ . Et $\frac{1}{z} =$ ____ (**)
- Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, alors $|\alpha z| = \alpha |z|$. En particulier, $\frac{z}{|z|}$ est de module 1 (**).
- ____ INEGALITES TRIANGULAIRES
- $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et ssi ____
- **Généralisation** : $|\prod_{k=1}^{n} z_k| =$ ____ , $|z^n| = |z|^n$ et $|\sum_{k=1}^{n} z_k|$ ____

Pour tout réel θ, on pose $e^{i\theta} \overset{def}{=} \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
- $e^{i(2p\pi)} =$ ____ , ____ $= -1$, , ____ $= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$, ____ $= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ ____ $= \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$, ____ $= -i$.
- Les complexes de module 1 sont ____
- $|e^{i\theta}| =$ ____
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et ssi
- $e^{i\theta} e^{i\theta'} =$ ____ .
- $e^{i(-\theta)} =$ ____ $=$ ____ $\overset{notation}{=}$ ____ et $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} =$ ____ .
- ____ EULER
- ____ IDENTITES DU LOSANGE
- ____ MOIVRE

$\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n =$ ____ $\neq$ ____ $= Re((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$ et $Im((\cos\theta + i\sin\theta)^n) =$ ____ $\neq$ ____ $= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$ ⚠

Si z non nul, $\boldsymbol{arg(z)} \overset{def}{\triangleq}$. Les arguments de z sont . L'argument principal de z est .

- $z = \underbrace{r}_{\in\mathbb{R}^{+*}} \underbrace{e^{i\theta}}_{expo.\ imagi.}$ si et ssi)

$\boldsymbol{si\ z \neq 0\ alors\ z = \underbrace{r}_{\in\mathbb{R}^{+*}} \times \underbrace{e^{i\theta}}_{expo.\ imag.} = |z|e^{iarg(z)}}$ **est la forme** **de z .**

- M est le point du plan d'affixe $z = \underbrace{r}_{\in\mathbb{R}^{+*}} \underbrace{e^{i\theta}}_{expo.\ imagi.}$ lorsque

$\vec{u}$ est le vecteur d'affixe $z = \underbrace{r}_{\in\mathbb{R}^{+*}} \underbrace{e^{i\theta}}_{expo.\ imagi.}$ lorsque

- $si\ z\ et\ z'sont$ $alors\ z = z' \Leftrightarrow$
- $si\ z\ et\ z'sont$ $alors\ arg(z \times z') \equiv$
- $si\ z\ est$ $alors\ arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv$
- $si\ z\ et\ z'sont$ $alors\ arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv$ (**)
- $si\ z\ est$ $et\ \ p \in$ $alors\ arg(z^p) \equiv$

Généralisation : $\arg(\prod_{k=1}^{n} z_k) \equiv$

- Pout tout réel θ, $\text{Arctan}(\theta)$ est

Si $x > 0$, alors $\arg(z) \equiv$. Si $x < 0$, alors $\arg(z) \equiv$

Si $x = 0$ et $y > 0$ alors Si $x = 0$ et $y < 0$ alors

$z = \underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{R}} \times \underbrace{e^{i\theta}}_{expo.\ imag.}$ est une forme quasi- trigo. de z .

- si $\alpha > 0$ alors $|z| =$ et $\arg(z) \equiv$. si $\alpha < 0$ alors $|z| =$ et $\arg(z) \equiv$

si $\alpha = 0$ alors $|z|$ et $\arg(z)$

$Re(z) =$ $et\ Im(z) =$.

$e^z = e^{x+iy} \overset{def}{\triangleq}$ $=$.

- $e^z \neq$, $|e^z| =$ et $\arg(e^z) \equiv$
- $e^z = e^{z'}\ si\ et\ ssi$
- $e^z \times e^{z'} =$, $e^{-z} =$, $\overline{e^z} =$, $e^{z'-z} =$, $(e^z)^p =$.

$\delta\ est\ une\ racine\ carrée\ (cpxe) de\ \Delta$ lorsque .

- Si $\Delta = 0$ alors $\delta^2 = 0 \Leftrightarrow$

Si $\Delta = re^{i\theta} \neq 0$ alors , $\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \delta =$ et $\delta =$

Si $\Delta = a + ib$ alors $\delta = x + iy$ et $\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \Big\{$

Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ $où\ a, b, c\ cpxes\ et\ a \neq 0$

et $\Delta = b^2 - 4ac =$. Alors (E) a une unique solution si $\Delta = 0$ et deux solutions distinctes si $\Delta \neq 0$. Ses solutions (confondues si $\Delta = 0$) sont $z_1 =$ $et\ z_2 =$.

Et $\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = \underbrace{\qquad\qquad}_{forme\ canonique} = \underbrace{\qquad\qquad}_{forme\ factorisée}$

Et $z_1 + z_2 =$ $et\ z_1 \times z_2 =$.

Réciproquement, $Si\ z\ et\ w$ sont des cpxes tels que : $z + w = U\ \ et\ z \times w = V$ alors $z\ et\ w$ sont les racines $P(t) =$

Soit $\boldsymbol{P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n\ une\ fonction\ polynomiale}$ **à** $\boldsymbol{coefficients\ a_0, \ldots, a_n\ complexes}$ **.**

- $si\ P$ n'est pas la fonction nulle alors $deg(P) =$. La fonction nulle ($i.e.\ a_0 = \cdots = a_n = 0$) a pour degré .
- $Si\ P$ n' est pas la fonction nulle et ω est une racine de P ($i.e.\ P(\omega) = 0$) alors
- $Si\ P$ est et ω est une racine de P alors est aussi racine de P.
- $Si\ P$ n' est pas la fonction nulle alors le nombre de racines de P est . Et la fonction nulle est la

Soit n un entier naturel <u>non nul</u> et a un nombre complexe. z est une racine $n^{ième}$ $complexe$ de a lorsque

- **Les racines $n^{ièmes}$ (complexes) de l'unité (i.e. de $a = 1$) sont** .
- La somme des racines $n^{ièmes}$ de l'unité est dès que
- Les images de ces racines $n^{ièmes}$ de l'unité
- Racines troisièmes de l'unité sont où $j =$ et $j^2 =$ $=$ et $1 + j + j^2 =$

Alors, $\forall p \in$, $j^{3p} =$, $j^{3p+1} =$ et $j^{3p+2} =$.

- Tout complexe $a = re^{i\theta}$ **non nul** possède qui sont
- Si z_0 est une racine $n^{ième}$ particulière du complexe non nul a, alors les racines $n^{ièmes}$ de a sont

- ***z* est réel** <u>si et ssi</u>

<u>si et ssi</u>

<u>sietssi</u>

<u>sietssi</u>

<u>sietssi</u>

<u>si et ssi</u>

- ***z* imaginaire pur** <u>si et ssi</u>

<u>sietssi</u>

<u>si et ssi</u>

<u>sietssi</u>

<u>sietssi</u>

<u>si et ssi</u>

***z* est réel positif**

<u>si et ssi</u>

<u>sietssi</u>

<u>sietssi</u>

<u>si et ssi</u>

Soit M point de coordonnées (x, y) et $\vec{u} = a = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Alors $z = Aff(M) =$ $=Aff(\vec{u})$
Soit M' un autre point et $\vec{v}$ un autre vecteur du plan. Soit A, B, C, D des points <u>distincts</u> d'affixe a, b, c, d.

- $M = M' \Leftrightarrow$ et $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow$
- $si\ \alpha\ et\ \beta\ sont\ des\ réels\ alors\ Aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) =$
- $OM =$ $=$ et $si\ M \neq 0\ alors\ (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}}) \equiv$.
- $\|\vec{u}\| =$ $=$ et $si\ \vec{u} \neq \vec{0}\ alors\ (\widehat{\vec{\imath}, \vec{u}}) \equiv$
- $Aff\left(\overrightarrow{MM'}\right) =$.
- $MM' =$ $et\ \ si\ M \neq M'alors\ (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{MM'}}) \equiv$ $[2\pi]$
- $si\ \vec{u}\ \neq \vec{0}\ \ et\ \vec{v} \neq \vec{0}\ \ alors\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv$ $et\ \ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \equiv$
- M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u} \Leftrightarrow$
- M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $q \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \vec{u} \Leftrightarrow$
- M' est l'image de M par la rotation de centre O et d' angle $\theta \Leftrightarrow$
- M' est l'image de M par la composée de la rotation de centre O et d' angle θ et de l'homothétie de centre O et de rapport $q \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$
- $M\ et\ M'$sont symétrique par rapport à O $\Leftrightarrow$
- $M\ et\ M'$sont symétrique par rapport à l'axe des abscisses $\Leftrightarrow$
- $M\ et\ M'$sont symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $\Leftrightarrow$
- $M\ et\ M'$sont sur une même demi-droite d'origine O $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$
- $\vec{u}\ et\ \ \vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$
- $\vec{u}\ et\ \ \vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$
- M est sur le cercle de centre A et de rayon $r \Leftrightarrow$
- M est sur le cercle de diamètre $[A, B] \Leftrightarrow$
- M est sur la médiatrice de $[A, B] \Leftrightarrow$