

Programme de colle 26

Chap 18 et 19 : Application linéaire et matrices d'une application linéaire.

Cf programme précédent

Connaitre parfaitement les formules suivantes (sans démonstration) : Ici E et F sont de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\vec{x} \in E$. Soit B_1, B'_1 deux bases de E , B_2, B'_2 deux bases de F et B_3 une base de G .

- Changement de bases pour les vecteurs : $\text{mat}_{B_2} \vec{x} = \text{mat}_{B_2} B_1 \times \text{mat}_{B_1} \vec{x}$
- Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire : $\text{mat}_{B_2} f(\vec{x}) = \text{mat}_{B_1, B_2} f \times \text{mat}_{B_1} \vec{x}$.
- Matrice d'une composée d'applications linéaires : $\text{mat}_{B_1, B_3} (g \circ f) = \text{mat}_{B_2, B_3} g \times \text{mat}_{B_1, B_2} f$
- Matrice de l'isomorphisme réciproque : si f est un isomorphisme alors $\text{mat}_{B_2, B_1} (f^{-1}) = (\text{mat}_{B_1, B_2} f)^{-1}$
- Changement de bases pour les applications linéaires : $\text{mat}_{B'_1, B'_2} f = \text{mat}_{B'_2} B_2 \times \text{mat}_{B_1, B_2} f \times \text{mat}_{B_1} B'_1$.

Savoir clairement énoncer les formules analogues dans le cas où f et g sont des endomorphismes d'une même K -e.v E .

Chapitre 20 Déterminant

I Déterminant d'une matrice carrée.

Définition : déterminant d'ordre 1, d'ordre 2, d'ordre 3, d'ordre 4, puis d'ordre n par développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Soit $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in M_n(K)$.

Δ_{ij} , le mineur d'indice (i, j) de A , le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue en ôtant à A sa ligne i et sa colonne j .

Alors, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\det(A) = \underbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \Delta_{ik}}_{\text{développement du det par rapport à la ligne } i} = \underbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \Delta_{kj}}_{\text{développement du det par rapport à la colonne } j}$

Nous admettons que le résultat obtenu ne dépend pas de la ligne ou colonne choisie.

Exemple : le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux.

Propriétés

$\det$ est linéaire par rapport à chacune des colonnes et alterné :

$\det(C_1, C_2, \dots, C_{k-1}, \alpha X + \beta Y, C_{k+1}, \dots, C_n) = \alpha \det(C_1, C_2, \dots, C_{k-1}, X, C_{k+1}, \dots, C_n) + \beta \det(C_1, C_2, \dots, C_{k-1}, Y, C_{k+1}, \dots, C_n)$

si $i \neq j$ alors $\det(C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) = -\det(C_1, C_2, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_i, \dots, C_n)$. (échange de colonnes)

Pour toutes matrices A et B carrées d'ordre n , $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ et $\det(A) = \det(A^T)$.

Conséquences :

Lorsqu'une colonne (ou ligne) de A est combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) alors le déterminant est nul. (en particulier lorsqu'une ligne ou colonne est nulle ou lorsque deux colonnes ou deux lignes sont égales).

Ajouter à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) ne change pas le déterminant.

Si tous les coefficients d'une colonne (resp. ligne) ont un facteur commun alors je peux « factoriser » le déterminant par ce facteur.

Si on échange deux colonnes (resp. lignes) d'une matrice alors le déterminant change de signe.

$\forall A \in M_n(K), \forall \lambda \in K, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Exemple : le déterminant de Vandermonde

Application à la caractérisation de l'Inversibilité d'une matrice

A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Et le cas échéant, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

II Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base et déterminant d'un endomorphisme.

Soit E de dimension finie n de base $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{V} = (\vec{v}_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une famille de vecteurs de E de cardinal n . Alors $\det_{\mathcal{B}}^{\square} \mathcal{V}$, le déterminant de la famille $\mathcal{V}$ dans la base $\mathcal{B}$ est le déterminant de la matrice de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{B}$. $\det_{\mathcal{B}}^{\square} \mathcal{V} = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{V})$.

Forme n -linéaire alternée. Caractérisation d'une base par le déterminant

Soit u un endomorphisme de E . Le déterminant de l'endomorphisme u , noté $\det(u)$, est le déterminant de la matrice de u dans n'importe quelle base de E . Pour toute base $\mathcal{B}$ de E , $\det(u) = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u))$.

Caractérisation d'un automorphisme par le déterminant. Déterminant d'une composée d'endomorphismes, d'un itéré, d'un isomorphisme.

Question de cours E est un $K - e - v$.

1) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que : p est une projection $\Leftrightarrow p \circ p = p$. Le cas échéant, p est la projection sur $\text{Im}(p)$ et parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

- 2) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ Soit B_1 base de E , B_2 base de F . Montrer que $\nabla: \mathcal{L}(E, F) \rightarrow M_{n,p(K)}$, telle que $\nabla(f) = \text{mat}_{B_1, B_2} f$, est un isomorphisme.
- 3) Montrer la formule du calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire.
- 4) Montrer la formule de changement de bases pour les applications linéaires
- 5) Soit A une matrice carrée d'ordre n . Montrer que : A est inversible si et si $\det A \neq 0$. Et le cas échéant, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.