# Déterminants

**1** Si $A$ une matrice carrée d'ordre $n$, on note $C_i$ la colonne $i$ de $A$. La matrice $A$ est notée $A = (C_1|\, C_2|\, C_3|\, \dots |C_n)$

## I Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1, 2 et 3 et plus.

### 1. Définition et premières propriétés

**2 Calcul d'un déterminant d'ordre 1, 2, 3 ou 4.**

1. **Déterminant d'ordre 1:** Le déterminant de la matrice $M = (a)$ carrée d'ordre 1 est le scalaire $\det(M) = a$.
2. **Déterminant d'ordre 2 :** Le déterminant de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le scalaire noté $\det(M)$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ tel que :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \underbrace{=}_{def} ad - cb$$

3. **Déterminant d'ordre 3:** Le déterminant de $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ est le scalaire $\det(M)$ ou $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$ tq :

$$\begin{vmatrix} a^+ & b^- & c^+ \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \underbrace{=}_{def} +a\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ek - fh) - b(dk - fg) + c(dh - eg)$$

*développement par rapport à la première ligne*

**Ou encore :** $$\begin{vmatrix} a^+ & b & c \\ d^- & e & f \\ g^+ & h & k \end{vmatrix} = +a\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = a(ek - fh) - d(bk - ch) + g(bf - ce)$$

*développement par rapport à la première colonne*

**Ou encore :** $$\begin{vmatrix} a & b^- & c \\ d & e^+ & f \\ g & h^- & k \end{vmatrix} = -b\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$ *développement par rapport à la deuxième colonne*

**Ou encore :** $$\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g^+ & h^- & k^+ \end{vmatrix}}_{\substack{\text{les signes attribués} \\ \text{aux coefficients} \\ \text{sont toujours} \\ \textbf{positifs sur la diagonale} \\ \textbf{et alternés}.}} = g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$ *développement par rapport à la dernière ligne* ***etc***

4. **Déterminant d'ordre 4 :** Le déterminant de $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, noté $\det(M)$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$, est défini par :

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}^- \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}^+ \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}^- \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}^+ \end{vmatrix}}_{\substack{\text{les signes attribués} \\ \text{aux coefficients} \\ \text{sont toujours} \\ \textbf{positifs sur la diagonale} \\ \textbf{et alternés}.}} = -a_{14}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{déterminant} \\ \text{d'ordre 3}}} + a_{24}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} - a_{34}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + a_{44}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

*développement par rapport à la dernière colonne*

**3 Exemples** Calculons $\Delta_1 = \begin{vmatrix} i+j & 2j-1 \\ 1-2i & 1+j^2 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} i+j & 2j-1 \\ 1-2i & 1+j^2 \end{vmatrix} = (i+j)\left(\underbrace{1+j^2}_{=-j}\right) - (1-2i)(2j-1) = \underbrace{-j-j^2}_{=1}\ \underbrace{-2j}_{1-i\sqrt{3}} + 1 + \underbrace{4ij}_{-2\sqrt{3}-2i} - 2i = (3-2\sqrt{3}) - i(4+\sqrt{3}).$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1^- & 0^+ & 5^- \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-6-4) - 5(8+3) = -65.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-1&0^+&3\\2&0&3^-&1\\3&2&5^+&-3\\4&-2&0^-&1\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}1^+&-1&3\\3^-&2&-3\\4^+&-2&1\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1&-1^-&3\\2&0^+&1\\4&-2^-&1\end{vmatrix}=-3\left[1\begin{vmatrix}2&-3\\-2&1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-1&3\\-2&1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-1&3\\2&-3\end{vmatrix}\right]+5\left[-(-1)\begin{vmatrix}2&1\\4&1\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}\right]=-3[-4-3\times5+4\times(-3)]+5[-2+2\times(-5)]=33.$$

**4 Calcul d'un déterminant d'ordre $n \geq 2$ :**

Soit $A \in \boldsymbol{M_n}(\mathbb{R})$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,on note $A_{ij}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en enlevant la ligne $i$ et la colonne $j$ à $A$. Alors,

$$det(A) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})}_{\substack{developpement \\ par\ rapport\ à\ la\ colonne\ j}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})}_{\substack{développement \\ par\ rapport\ à\ la\ ligne\ i}}$$

On **admet** que quelle que soit la colonne ou la ligne choisie, le résultat est toujours le même.

**5 Proposition :** Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des éléments sur la diagonale

$$\begin{vmatrix}a&0\\ *&d\end{vmatrix}=ad \quad , \quad \begin{vmatrix}a&*&*\\0&e&*\\0&0&k\end{vmatrix}=aek \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix}a_{11}&*&\cdots&*\\0&a_{22}&\ddots&\vdots\\ &0&\ddots&*\\(0)&&0&a_{nn}\end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n} a_{kk}$$

En particulier, $\det(O_n)=0$ *et* $\det(I_n)=1$ .

**Démo :** $\begin{vmatrix}a_{11}&*&\cdots&*\\0&a_{22}&\ddots&\vdots\\ &0&\ddots&*\\(0)&&0&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix}a_{22}&\cdots&*\\0&\ddots&\vdots\\ &\ddots&*\\(0)\ \ 0&0&a_{nn}\end{vmatrix}}_{\det d'ordre\ n-1}=a_{11}a_{22}\underbrace{\begin{vmatrix}a_{33}&\cdots&*\\0&\ddots&\vdots\\ &\ddots&*\\(0)\ \ 0&0&a_{nn}\end{vmatrix}}_{\det d'ordre\ n-2}=\cdots=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$

## 2. Forme $n$-linéaire alternée

**6 Propriétés :** ***det*** **est linéaire par rapport à chaque colonne (1) et alternée(2) ;** cela signifie que :

1) Si $\alpha$ *et* $\beta$ sont des scalaires et $\forall k$, $C_k'$ est une colonne à $n$ lignes alors

$\det(\alpha C_1+\beta C_1'|C_2|\ldots|C_n)=\alpha\det(C_1|C_2|\ C_3|\ldots|C_n)+\beta\det(C_1'|C_2|\ C_3|\ldots|C_n)$

$\det(C_1|\alpha C_2+\beta C_2'|\ C_3|\ldots|C_n)=\alpha\det(C_1|C_2|\ C_3|\ldots|C_n)+\beta\det(C_1|C_2'|C_3|\ldots|C_n)$

$\det(C_1|C_2|\alpha C_3+\beta C_3'|\ldots|C_n)=\alpha\det(C_1|C_2|\ C_3|\ldots|C_n)+\beta\det(C_1|C_2|C_3'|\ldots|C_n)$. (…)

**2) Si on échange deux colonnes de la matrice alors le déterminant change de signe.**

$\det(C_3|C_2|\ C_1|\ldots|C_n)=-\det(C_1|C_2|\ C_3|\ldots|C_n)$ .

$\det(C_1|C_n|\ C_1|\ldots|C_2)=-\det(C_1|C_2|\ C_3|\ldots|C_n)$ . (…)

**Démo :**

1) Soit $B=(C_1|\ C_2|..\alpha C_k+\beta C_k'|\ \ldots|C_n)$ *et* $A=(C_1|C_2|\ldots|C_k|\ldots|C_n)$ et $A'=(C_1'|C_2|\ \ldots|C_k'|\ldots|C_n)$. Alors ,

$det(B)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}(\alpha\, a_{ik}+\beta a_{ik}')\det(A_{ik})}_{\substack{developpement\\ par\ rapport\ à\ la\ colonne\ k}}=\alpha\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det(A_{ik})+\beta\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}'\det(A_{ik}')$. Donc, $\det(B)=\alpha det(A)+\beta\det(A')$ .

2) $H(n)$ : « si j'échange deux colonnes dans une matrice carrée d'ordre $n$ alors le déterminant change de signe. »

<u>Init</u> : $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-cb$ *et* $\begin{vmatrix}b&a\\d&c\end{vmatrix}=cb-ad=-(ad-cb)=-\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$. Donc $H(2)$ est vraie.

<u>Propag</u> : Soit $n\in\mathbb{N}$ $tq$ $n\geq 2$. Je suppose $H(n)$ vraie. Sous cette hypothèse, montrons que $H(n+1)$ vraie. Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n+1$ ,notons $A=(C_1|C_2|C_3|\ldots|C_n|C_{n+1})$ et $B$ $l$a matrice obtenue en échangeant les colonnes $i$ *et* $j$ *de* $A$ où $i$ *et* $j$ deux entiers distincts compris entre $1$ *et* $n+1$. Calculons $det(B)$ en développant par rapport à une colonne $k$ distinctes des colonnes $i$ et $j$ (B ayant $n+1$ colonnes et $n+1\geq 3$ donc cette colonne $k$ existe bien) :

$det(B)=\underbrace{\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+k}b_{lk}\det(B_{lk})}_{\substack{developpement\\ par\ rapport\ à\ la\ colonne\ k\notin\{i,j\}}}\underbrace{=}_{\substack{car\ A\ et\ B\ ont\\ la\ même\ colonne\ k}}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+k}a_{lk}\det(B_{lk})$. De plus, pour tout $l\in[\![1,n]\!]$, $B_{lk}$est carrée d'ordre $n$ et est obtenue en échangeant les colonne $i$ et $j$ dans $A_{lk}$. Donc par hypothèse de récurrence, $\det(B_{lk})=-\det(A_{lk})$.

Ainsi, $\det(B)=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+k}a_{lk}(-\det(A_{lk}))=-\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+k}a_{lk}\det(A_{lk})=-\det(A)$. OK

CCL : $\forall n\geq 2$, $H(n)$ vraie.

**7** On **admet <u>l'unicité</u>** <u>**du théorème**</u> suivant :

$det$ est l'une unique application de $M_n(K)$ dans $K$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $det$ est linéaire par rapport à chaque colonne i.e. $\forall(\alpha,\beta)\in K^2$et $\forall k\in[\![1,n]\!]$, ,

$$\det\left(C_1|C_2|\ \ldots|C_{k-1}|\underbrace{\alpha X+\beta Y}_{\substack{la\ colonne\ k\\ est\ c.l\ de\\ X\ et\ Y}}|C_{k+1}|\ldots|C_n\right)=\alpha\det(C_1|C_2|\ \ldots|C_{k-1}|X|C_{k+1}|\ldots|C_n)+\beta\det(C_1|C_2|\ \ldots|C_{k-1}|Y|C_{k+1}|\ldots|C_n).$$

- $det$ est alternée i.e. $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $(i\neq j\Longrightarrow\det(C_1|C_2|\ \ldots|C_i|\ldots\ldots|C_j|\ldots|C_n)=-\det(C_1|C_2|\ \ldots|C_j|\ldots\ldots|C_i|\ldots|C_n))$.
- $\det(I_n)=1$.

On dit que $det$ est une forme $n$-linéaire, alternée.

## 3. Autres Propriétés du déterminant

**8 Propriétés** Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$. On note $C_i$ la colonne $i$ de $A$. La matrice $A$ est notée $A = (C_1|\ C_2|\ C_3|\ \dots|C_n)$

1. Si l'une des colonnes de la matrice est nulle alors le déterminant de cette matrice est nul.
2. Une matrice carrée ayant deux colonnes identiques a un déterminant nul
3. **Si l'une des colonnes est combinaison linéaire des <u>autres</u> colonnes alors le déterminant est nul.** En particulier, si deux colonnes sont proportionnelles alors le déterminant est nul.
   Par exemple, pour $n = 3$, $\det(C_1|\ \alpha C_1 + \beta C_3|\ C_3) = 0$
4. **Si on ajoute à l'une des colonnes une combinaison linéaire des <u>autres</u> colonnes alors on ne change pas le déterminant.**
   Par exemple, pour $n = 3$, $\det(C_1|\ C_2 + \alpha C_1 + \beta C_3|\ C_3) = \det(C_1|\ C_2|\ C_3)$
5. **Si on multiplie une colonne par un scalaire $k$ alors le déterminant est multiplié par $k$.**
   Par exemple, pour $n = 3$, $\det(kC_1|\ C_2|\ C_3) = k\det(C_1|\ C_2|\ C_3)$
   et $\det(k_1C_1|\ k_2C_2|\ k_3C_3) = k_1k_2k_3\det(C_1|\ C_2|\ C_3)$.
6. ***Si $A$* carrée d'ordre <u>$n$</u> alors $\forall k \in K$, $\det(kA) = k^n \det(A)$** ⚠
   Par exemple, pour $n = 3$, $\det(kC_1|\ kC_2\ |\ kC_3) = k^3\det(C_1\ |\ C_2|\ C_3)$
7. **$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$** ADMIS
8. **$\det(A^T) = \det(A)$**
9. **Si on échange deux lignes alors le déterminant change de signe.**
10. **Si l'une des lignes est combinaison linéaire des <u>autres</u> lignes alors le déterminant est nul.**
11. **Si on ajoute à l'une des lignes une combinaison linéaire des <u>autres</u> lignes alors on ne change pas le déterminant.**
12. **Si on multiplie une ligne par un scalaire $k$ alors le déterminant est multiplié par $k$ .**

**9 Déterminant et opérations élémentaires**

$$A \underset{L_i \leftrightarrow L_j}{\underbrace{\sim_L}} B \Rightarrow \det(B) = -\det(A)$$

$$A \underset{\substack{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \\ i \neq j,\ \lambda \in K}}{\underbrace{\sim_L}} B \Rightarrow \det(B) = \det(A)$$

$$A \underset{\substack{L_i \leftarrow \lambda L_i \\ \lambda \in K^*}}{\underbrace{\sim_L}} B \Rightarrow \det(B) = \lambda\det(A)$$

**Démo** : 1) $\det(C_1|C_1|C_3) \underset{\substack{\text{en échangeant} \\ \text{le deux colonnes} \\ \text{identiques}}}{\underbrace{=}} -\det(C_1|\ C_1|\ C_3)$. Donc, $\det(C_1|\ C_1|\ C_3) = 0$.

1) $\det(C_1|\ \alpha C_1 + \beta C_3|\ C_3) \underset{prop\ 93.1}{\underbrace{=}} \alpha \underbrace{\det(C_1|\ C_1|\ C_3)}_{=0\ d'après\ 1)} + \beta \underbrace{\det(C_1|\ C_3|\ C_3)}_{=0\ d'apères 1)} = 0$.

2) $\det(C_1|\ C_2 + \alpha C_1 + \beta C_3|\ C_3) \underset{prop\ 93.1}{\underbrace{=}} \det(C_1|\ C_2|\ C_3) + \alpha \underbrace{\det(C_1|\ C_1|\ C_3)}_{=0} + \beta \underbrace{\det(C_1|\ C_3|\ C_3)}_{=0} = \det(C_1|\ C_2|\ C_3)$.

3) $\det(kC_1|\ C_2|\ C_3) \underset{prop\ 93.1}{\underbrace{=}} k\det(C_1|\ C_2|\ C_3)$ et $\det(k_1C_1|\ k_2C_2|\ k_3C_3) \underset{prop\ 93.1}{\underbrace{=}} k_1k_2k_3\det(C_1|\ C_2|\ C_3)$

4) $\det(kC_1|\ kC_2\ |\ kC_3) \underset{prop\ 93.1}{\underbrace{=}} k^1\det(C_1\ |\ kC_2|\ kC_3) \underset{prop\ 93.1}{\underbrace{=}} k^2\det(C_1\ |\ C_2|\ kC_3) \underset{prop\ 93.1}{\underbrace{=}} k^3\det(C_1\ |\ C_2|\ C_3)$.

5) Admis

6) Calculer $det(A)$ en développant par rapport à la ligne $i$ revient à calculer $det(A^T)$ en développant par rapport à la colonne $i$. Donc $det(A^T) = \det(A)$.

**10 En PRATIQUE : pour calculer $det(A)$ ,**

1. **on regarde si l'une des lignes ou colonnes de $A$ est combinaison linéaire des autres.**
2. **Lorsqu'on ne voit rien, on fait des opérations élémentaires sur les lignes <u>et</u> colonnes de $A$ :**
   - **SOIT pour échelonner la matrice $A$ et obtenir une matrice triangulaire supérieure (ou inf.) dont on sait calculer le déterminant.**
   - **SOIT pour faire apparaitre des colonnes ou lignes avec un seul coefficient non nul afin de développer le déterminant par rapport à cette colonne ou ligne « presque nulle ».**
3. **Pour calculer un déterminant $\Delta_n$ d'ordre $n$ inconnu, on essaie souvent d'obtenir une relation de récurrence entre $\Delta_n$ et $\Delta_{n-1}$(et/ou $\Delta_{n-2}$ ... ).**

**11 Exemples :**

- $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$ =0 car $L_2 = -2L_1$ et $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 14 \end{vmatrix} = 0\ car\ C_3 = 2(C_1 + C_2)$.
- $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\underbrace{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\underbrace{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & -11 & -3 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2}{\underbrace{=}} -6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} \\ 0 & -11 & -3 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 11L_2}{\underbrace{=}} -6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & \frac{59}{6} \end{vmatrix} = -59$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^+ & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & -12 & 5 \\ 0 & 2 & -11 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 5 & -12 & 5 \\ 2 & -11 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 - L_3 \\ puis\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\underbrace{=}} \begin{vmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 2 & -11 & 6 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\underbrace{=}} 4 \begin{vmatrix} 1^+ & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -23 & 12 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -23 & 12 \end{vmatrix}$

$\Delta_2 = 4[12 - (-23) \times (-1)] = -44$.

**Exemple CLASSIQUE : Déterminant de Vandermonde.** Soit $n \in \mathbb{N}\ tq\ n \geq 2,\ \ a_1, \dots, a_n$ des complexes et

$$V_n(a_1,..,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

. Calculons $V_n(a_1,..,a_n)$

$$V_n(a_1,..,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_n \leftarrow L_n - a_1 L_{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - a_1 L_{n-2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2} - a_1 a_2^{n-3} & & a_n^{n-2} - a_1 a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \underbrace{\dots}_{\substack{L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - a_1 L_{n-3} \\ puis \\ L_{n-3} \leftarrow L_{n-3} - a_1 L_{n-4} \\ puis \\ \vdots \\ L_2 \leftarrow L_2 - a_1 L_1}} = \begin{vmatrix} 1^{+} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2} - a_1 a_2^{n-3} & & a_n^{n-2} - a_1 a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= +1 \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} - a_1 a_2^{n-3} & a_3^{n-2} - a_1 a_3^{n-3} & \vdots & a_n^{n-2} - a_1 a_n^{n-3} \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ (a_2 - a_1) a_2 & (a_3 - a_1) a_3 & \cdots & (a_n - a_1) a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_2 - a_1) a_2^{n-3} & (a_3 - a_1) a_3^{n-3} & \vdots & (a_n - a_1) a_n^{n-3} \\ (a_2 - a_1) a_2^{n-2} & (a_3 - a_1) a_3^{n-2} & \dots & (a_n - a_1) a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{prop\ 94.4} (a_2 - a_1) a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \vdots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

$J'en\ déduis\ que$ , $V_n(a_1,..,a_n) = [\prod_{k=2}^{n} (a_k - a_1)] V_{n-1}(a_2,..,a_n)$. (c'est la relation de récurrence vérifiée par $V_n$)

Par conséquent, $V_n(a_1,..,a_n) = [\prod_{k=2}^{n} (a_k - a_1)][\prod_{k=3}^{n} (a_k - a_2)] V_{n-2}(a_3,..,a_n)$

$$V_n(a_1,..,a_n) = \left[\prod_{k=2}^{n} (a_k - a_1)\right]\left[\prod_{k=3}^{n} (a_k - a_2)\right]\left[\prod_{k=4}^{n} (a_k - a_3)\right] V_{n-3}(a_4,..,a_n) = \cdots .. = \left[\prod_{j=1}^{n-1} \prod_{k=j+1}^{n} (a_k - a_j)\right] \underbrace{V_1(a_n)}_{=|1|=1}$$

$$V_n(a_1,..,a_n) = \underbrace{\left[\prod_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)\right]}_{produit\ double} = produit\ de\ tous\ les\ facteurs\ (a_k - a_j)\ possibles\ avec\ k > i.$$

## 4. Application du déterminant à l'inversibilité

**12 Théorème :** $A$ inversible $si\ et\ ssi$ $\det(A) \neq 0$ . Et si $A$ est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

**Démo :** $det(A) \neq 0 \Rightarrow$aucune des lignes de A n'est combinaison linéaire des autres$\Rightarrow$ $A\ inversible$.

$A$ inversible $\Rightarrow A^{-1}\ existe\ et\ AA^{-1} = I \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I) \Rightarrow \det(A)\, det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$ et $det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

**13Exemple** : Déterminons tous les réels $x$ tels que $A - xI$ est inversible où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{vmatrix} 3-x & 3-x & 3-x \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \underbrace{=}_{prop\ 92.4} (3-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$\det(A - xI) \underbrace{=}_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} (3-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = (3-x)x^2$. Donc, $(A - xI)\ inversible \Leftrightarrow x \neq 0\ et\ x \neq 3$.

**14Conséquences** : Soit $A$ et $B$ deux matrices carrées d'ordre $n$.

- Si $A$ et $B$ sont semblables alors $\det(A) = \det(B)\ et\ tr(A) = tr(B)$.
- $Si\ AB$ est inversible alors $A\ et\ B$ sont inversibles. .

**Démo** $A$ et $B$ sont semblables$\Longrightarrow \exists P \in GL_n(K)/B = P^{-1}AP \Longrightarrow \exists P \in GL_n(K)/ \begin{cases} \det(B) = \det(P^{-1}AP) \\ tr(B) = tr(P^{-1}AP) \end{cases} \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{car \\ \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) \\ = \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A) \\ et\ tr(P^{-1}AP) = tr(APP^{-1}) = tr(A).}} \begin{cases} \det(B) = \det(A) \\ tr(B) = tr(A) \end{cases}$.

$AB$ inversible$\Longrightarrow \det(AB) \neq 0 \Longrightarrow \det(A)\det(B) \neq 0 \Longrightarrow \det(A) \neq 0\ et\ \det(B) \neq 0 \Longrightarrow A\ et\ B\ sont\ inversibles$.

# II Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base et déterminant d'un endomorphisme.

**15 Déf** : Soit $E$ de dimension finie $n$ de base $\mathscr{B}$. Soit $\mathscr{V} = (\vec{v_i})_{i\in\{1,..,n\}}$ une famille de vecteurs de $E$ de cardinal $n$. Alors $det_{\mathscr{B}}\mathscr{V}$, le déterminant de la famille $\mathscr{V}$ dans la base $\mathscr{B}$ est le déterminant de la matrice de $\mathscr{V}$ dans $B$. $det_{\mathscr{B}}\mathscr{V} = \det(mat_{\mathscr{B}}\mathscr{V})$.

**16Conséquences** Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de $E$ et $\mathscr{V}$ une famille de vecteurs de $E$ de cardinal $n$. alors

- $det_{\mathscr{B}'}\mathscr{V} = (det_{\mathscr{B}'}\mathscr{B})(det_{\mathscr{B}}\mathscr{V})$.
- $\mathscr{V}$ est libre **si et ssi** $\mathscr{V}$ est une base **si et ssi** $\mathscr{V}$ est génératrice $E$ **si et ssi** $det_{\mathscr{B}}\mathscr{V} \neq 0$ .
- $det_{\mathscr{B}}$ est linéaire par rapport à chaque vecteur de la famille et alterné et vérifie $det_{\mathscr{B}}\mathscr{B}" = 1$.

**17Préliminaire :** Soit $E$ de dimension finie et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $E$ .
Soit $u$ un endomorphisme de $E$ tel que $\mathscr{B} = mat_{\mathscr{B}'}u$ et $A = mat_{\mathscr{B}}u$ .
Alors, $mat_{\mathscr{B}'}u = mat_{\mathscr{B}'}\mathscr{B} \times mat_{\mathscr{B}}u \times mat_{\mathscr{B}}\mathscr{B}'$ ie. $M = P^{-1}AP$
Donc, $\det(B) = \det(P^{-1}) \times \det(A) \times \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \times \det(A) \times \det(P) = \det(A)$
Donc, le déterminant de la matrice de $u$ dans une base de $E$ ne dépend pas de la base choisie. D'où la définition suivante :

**18Def** Soit $E$ de dimension finie. Soit $u$ un endomorphisme de $E$ . Le déterminant de l'endomorphisme $u$ , noté $det(u)$ , est le déterminant de la matrice de $u$ dans n'importe quelle base de $E$ .
Pour toute base $\mathscr{B}$ de $E$, $det(u) = \det(mat_{\mathscr{B}}u)$ .

**19Exemple :** Si $s$ est une symétrie vectorielle dans le K-e-v $E$ alors $\det(s) = (-1)^t$ où $t = dimKer(s + id_E)$.
Si $p$ est une projection vectorielle dans le K-e-v $E$ telle que $p \neq id_E$ alors $\det(p) = 0$ .
Si $h$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ dans le $K$-e-v $E$ de dimension $n$ alors $\det(h) = \lambda^n = \lambda^{\dim(E)}$.

**20Prop :** Soit $E$ de dimension finie $p$. Soit $u$ un endomorphisme de $E$ , $\lambda$ un scalaire et $k \in \mathbb{N}$.

1. $\det(\lambda u) = \lambda^p \det(u)$
2. $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$
3. $\det(u^k) = (\det(u))^k$.
4. $u$ est injective **si et ssi** $u$ est surjective **si et ssi** $u$ est un automorphisme $E$ **si et ssi** $\det(u) \neq 0$. Et dans le cas échéant, $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$.
5. $Ker(u - \lambda id_E)$ contient un vecteur non nul sietssi $\det(u - \lambda id_E) = 0$.

**Démo :**1. $\det(\lambda u) = \det(mat_B(\lambda u)) = \det(\lambda \det(mat_B u)) = \lambda^p \det(\det(mat_B u)) = \lambda^p \det(u)$

2. $\det(u \circ v) = \det((mat_B u \circ v) = \det((mat_B u) \times (mat_B v)) = \det(mat_B u) \times \det(mat_B v) = \det(u)\det(v)$

3. Par conséquent, on montre facilement par récurrence que $\det(u^k) = (\det(u))^k$.
**Init°** : $\det(u^0) = (\det(id)) = 1 = (\det(u))^0$.
**Propag°** : Soit $k \in \mathbb{N}$ . $Je\ suppose\ que$ $\det(u^k) = (\det(u))^k$. Alors, $\det(u^{k+1}) \underbrace{=}_{par\ 2} \det(u^k)\det(u^1) \underbrace{=}_{\substack{par\ hypo \\ de\ récurrence}} (\det(u))^k det(u)) = (\det(u))^k$.

**CCL** : $\forall k \in \mathbb{N}$ , $\det(u^k) = (\det(u))^k$.
4. $u$ est injective **sietssi** $u$ est surjective **sietssi** $u$ est un automorphisme $E$ **sietssi** $(mat_B u)$ inversible **sietssi** $det(u) \neq 0$.
Et quand $u$ est un automorphisme, $u \circ u^{-1} = id$ donc $\det(u) \times \det(u^{-1}) \underbrace{=}_{2.} \det(u \circ u^{-1}) = \det(id) = 1$. Ainsi, $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$.
5. $Ker(u - \lambda id_E)$ contient un vecteur non nul sietssi $u - \lambda id_E$ n'est pas injective sietssi $\det(u - \lambda id_E) = 0$.