TD 21
Déterminants

Ex 1 : Résoudre le système suivant d'inconnue $(X,Y)\in M_2(\mathbb{R})^2$: $XY=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $YX=\begin{pmatrix}5&3\\-2&-1\end{pmatrix}$.

Ex 2 Soit (S) le système suivant $\begin{cases} tr(X)Y+tr(Y)X=\begin{pmatrix}4&8\\4&-4\end{pmatrix}\\ XY=\begin{pmatrix}1&1\\4&-2\end{pmatrix}\end{cases}$ d'inconnue $(X,Y)\in M_2(\mathbb{R})^2$.

1. Je suppose que (S) admette une solution notée (X_0,Y_0).
   a. Montrer que X_0 et Y_0 sont inversibles .
   b. Montrer que : $tr(X_0)=0$ ou $tr(Y_0)=0$.
   c. Supposons ici que: $tr(Y_0)=0$. Montrer qu'il existe un réel λ non nul tel que :
   $Y_0=\lambda\begin{pmatrix}4&8\\4&-4\end{pmatrix}$ et $X_0=\frac{1}{12\lambda}\begin{pmatrix}2&1\\2&10\end{pmatrix}$
2. En déduire les solutions de (S) .

Ex 3 Sachant que 13 divise 546, 273 et 169, montrer, sans calculer D, que $D=\begin{vmatrix}5&2&1\\4&7&6\\6&3&9\end{vmatrix}$ est un multiple de 13.

Ex 4 Calculer les déterminants suivants : $d_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\a+b&b+c&c+a\\ab&bc&ca\end{vmatrix}$, $d_2=\begin{vmatrix}1&\cos(a)&\cos(2a)\\\cos(a)&\cos(2a)&\cos(3a)\\\cos(2a)&\cos(3a)&\cos(4a)\end{vmatrix}$,

$d_3=\begin{vmatrix}1&a&b&ab\\1&c&b&cb\\1&a&d&ad\\1&c&d&cd\end{vmatrix}$, $d_4=\begin{vmatrix}a^2&b^2&ab\\ab&a^2&b^2\\b^2&ab&a^2\end{vmatrix}$, $d_5=\begin{vmatrix}2a&a-b-c&2a\\b-a-c&2b&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$, $det(A-\lambda I)$ où $A=\begin{pmatrix}1&3&3\\-2&11&-2\\8&-7&6\end{pmatrix}$

Ex 5 Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ et $P(X)=\alpha+\beta X+\gamma X^2+X^4$.

1. Montrer que $D=\begin{vmatrix}1&a&a^2&a^4\\1&b&b^2&b^4\\1&c&c^2&c^4\\1&d&d^2&d^4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&a^2&P(a)\\1&b&b^2&P(b)\\1&c&c^2&P(c)\\1&d&d^2&P(d)\end{vmatrix}$.
2. En choisissant judicieusement P de sorte que la dernière colonne soit « presque nulle », calculer D.

Ex 6 Soit n un entier impair et A une matrice carrée d'ordre n, antisymétrique . Montrer que det (A)=0.

Ex 7 Soit a et b des scalaires et $A=(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ dans $M_n(K)$ telle que : $\forall i, a_{ii}=a$ et $\forall i\neq j, a_{ij}=b$.
Calculer $det(A)$ (sous forme factorisée). Pour quelles valeurs de (a,b), Aest-elle inversible ?

Ex 8 $\Delta_1=|1|$ et $\forall n\geq 1, \Delta_n=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&1\\\vdots&\iddots&\iddots&1\\0&1&\square&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}$déterminant d'ordre n . Calculer Δ_n .

Ex 9 Soit n et p deux entiers naturels Et $\Delta_{n,p}=\begin{vmatrix}1&\binom{n}{1}&\cdots&\binom{n}{p-1}\\1&\binom{n+1}{1}&\cdots&\binom{n+1}{p-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&\binom{n+p-1}{1}&\cdots&\binom{n+p-1}{p-1}\end{vmatrix}$déterminant d'ordre p.

1) Effectuant des opérations sur les colonnes , montrer que : pour tous $p\in\{0,1\}$et $n\in\mathbb{N}$, $\Delta_{n,p}$=$\Delta_{n+1,p}$=$\Delta_{n,p-1}$
2) En déduire la valeur de $\Delta_{n,p}$.

Ex 10 Soit $a_1,a_2,\ldots,a_n$ des réels. Calculer $\Delta_n(a_1,a_2,\ldots,a_n,x)=\begin{vmatrix}x&0&\cdots&\square&a_n\\0&x&\ddots&\square&a_{n-1}\\\vdots&\ddots&\ddots&\square&\vdots\\0&\square&\square&x&a_1\\a_n&a_{n-1}&\cdots&a_1&x\end{vmatrix}$.

Ex 11 Soit J la matrice de $M_n(K)$ dont tous les coefficients valent 1 .

1. Soit $A\in M_n(K)$. Pour tout scalaire x , on note $P(x)=\det(A+xJ)$. Démontrer qu'il existe un scalaire ω tel que : pour tout scalaire x , $P(x)=det(A)+\omega\, x$. **ω dépend-il de x ? Que peut-on alors dire de P ?**

2. **Application** : Soient $(a,b,c_1,\dots,c_n)\in K^{n+2}$ et $M=\begin{pmatrix} c_1 & b & \cdots & & b \\ a & c_2 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & b \\ a & \dots & & a & c_n \end{pmatrix}\in M_n(K)$

   a) Déduire de 1. la valeur de $det(M)$ dès que $a\neq b$.

   b) Calculer $det(M)$ dans le cas où $a=b$ et $c_1=\cdots=c_n=c$.

Ex 12 Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Calculer $\Delta_{2n}(a,b)=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & & 0 & b \\ 0 & \ddots & a & b & \iddots & 0 \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & & 0 & a \end{vmatrix}$ déterminant d'ordre $2n$.

Ex 13

1. Démontrer que $AS_n(\mathbb{R})\oplus S_n(\mathbb{R})=M_n(\mathbb{R})$.
2. $\forall M\in M_n(\mathbb{R}), f(M)=M^T$. Calculer det (f).

Ex 14 Soit $E=\mathbb{R}_n[X]\ et\ f$ définie sur E par : $f(P)=\frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right)+P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. Déterminer tous les réels λ tels qu'il existe un polynôme P non nul vérifiant $f(P)=\lambda P$.
3. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $Q_k\in\mathbb{R}[X]$ tel que : $Q_k\neq 0\ et\ f(Q_k)=\frac{1}{2^k}Q_k$. Montrer que $(Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Donner la matrice de f dans cette nouvelle base.

Ex 15 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer tous les couples $(\lambda,U)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ tels $U\neq(0,0,0)$ et $f(U)=\lambda U$.
2. En déduire que A est semblable à $D=diag(-2,7,13)$