CORRIGE TD 21
Déterminants

Ex 1 : Résoudre le système suivant d'inconnue $(X,Y)\in M_2(\mathbb{R})^2$: $XY=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $YX=\begin{pmatrix}5&3\\-2&-1\end{pmatrix}$.

$XY=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $YX=\begin{pmatrix}5&3\\-2&-1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow XY=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $YX=\begin{pmatrix}5&3\\-2&-1\end{pmatrix}$ $et\ \det(XY)=det\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow XY=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $YX=\begin{pmatrix}5&3\\-2&-1\end{pmatrix}$ $et\ \det(X)\det(Y)=1$

$\Leftrightarrow XY=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $YX=\begin{pmatrix}5&3\\-2&-1\end{pmatrix}$ $et\ \det(X)\neq 0\ et\ \det(Y)\neq 0$

$\Leftrightarrow X\ et\ Y\ inversibles\ et\ XY=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $YX=\begin{pmatrix}5&3\\-2&-1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X\ et\ Y\ inversibles\ et\ Y=X^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $X^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}5&3\\-2&-1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X\ et\ Y\ inversibles\ et\ Y=X^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix}5&3\\-2&-1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4/X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} et\ X\ et\ Y\ inversibles\ et\ Y=X^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&3\\-2&-1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4/X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} et\ ad-cb\neq 0\ \ et\ Y\ inversibles\ et\ Y=X^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $\begin{cases}3a+c=5a-2b\\3b+d=3a-b\\2a+c=5c-2d\\2b+d=3c-d\end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4/X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} et\ \ ad-cb\neq 0\ et\ Y\ inversible;\ et\ Y=X^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $\begin{cases}-2a+2b+c=0\\3a-4b-d=0\\2a-4c+2d=0\\2b-3c+2d=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4/X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\ et\ ad-cb\neq 0\ et\ Y\ inversible\ et\ Y=X^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $\begin{cases}c=2a-2b\\d=3a-4b\\2a-4(2a-2b)+2(3a-4b)=0\\2b-3(2a-2b)+2(3a-4b)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4/X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} et\ ad-cb\neq 0\ et\ Y\ inversible\ et\ Y=X^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ et $\begin{cases}c=2a-2b\\d=3a-4b\\0=0\\0=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4/X=\begin{pmatrix}a&b\\2a-2b&3a-4b\end{pmatrix} et\ a(3a-4b)-(2a-2b)b\neq 0\ et\ Y\ inversible\ et\ Y=X^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4/X=\begin{pmatrix}a&b\\2a-2b&3a-4b\end{pmatrix} et\ 3a^2+2b^2-6ab\neq 0\ et\ Y\ inversible\ et\ Y=\frac{1}{3a^2+2b^2-6ab}\begin{pmatrix}3a-4b&-b\\2b-2a&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4/X=\begin{pmatrix}a&b\\2a-2b&3a-4b\end{pmatrix} et\ 3a^2+2b^2-6ab\neq 0\ et\ Y\ inversible\ et\ Y=\frac{1}{3a^2+2b^2-6ab}\begin{pmatrix}9a-14b&3a-5b\\6b-4a&2b-a\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4/\ 3a^2+2b^2-6ab\neq 0\ \ et\ X=\begin{pmatrix}a&b\\2a-2b&3a-4b\end{pmatrix} et\ Y=\frac{1}{3a^2+2b^2-6ab}\begin{pmatrix}9a-14b&3a-5b\\6b-4a&2b-a\end{pmatrix}$

De plus, $3a^2+2b^2-6ab=3(a^2-2ab)+2b^2=3(a-b)^2-b^2=(\sqrt{3}a-\sqrt{3}b-b)(\sqrt{3}a-\sqrt{3}b+b)$.
Donc, , $3a^2+2b^2-6ab\neq 0\Leftrightarrow(\sqrt{3}a-\sqrt{3}b-b)\neq 0\ et\ (\sqrt{3}a-\sqrt{3}b+b)\neq 0$.

Ainsi $sol=\{\left(\begin{pmatrix}a&b\\2a-2b&3a-4b\end{pmatrix},\frac{1}{3a^2+2b^2-6ab}\begin{pmatrix}9a-14b&3a-5b\\6b-4a&2b-a\end{pmatrix}\right)/a,b\ réels\ et 3a^2+2b^2-6ab\neq 0\}$

Ex 2 Soit (S) le système suivant $\begin{cases}tr(X)Y+tr(Y)X=\begin{pmatrix}4&8\\4&-4\end{pmatrix}\\XY=\begin{pmatrix}1&1\\4&-2\end{pmatrix}\end{cases}$ d'inconnue $(X,Y)\in M_2(\mathbb{R})^2$.

1. Je suppose que (S) admette une solution notée (X_0,Y_0).
   a. Montrer que $X_0\ et\ Y_0$ sont inversibles .
   b. Montrer que : $tr(X_0)=0\ ou\ tr(Y_0)=0$.
   c. Supposons ici que: $tr(Y_0)=0$. Montrer qu'il existe un réel λ non nul tel que : $Y_0=\lambda\begin{pmatrix}4&8\\4&-4\end{pmatrix}$ et $X_0=\frac{1}{12\lambda}\begin{pmatrix}2&1\\2&10\end{pmatrix}$
2. En déduire les solutions de (S) .

Ex 3 Sachant que 13 divise 546, 273 et 169, montrer, sans calculer D, que $D=\begin{vmatrix}5&2&1\\4&7&6\\6&3&9\end{vmatrix}$ est un multiple de 13.

Il existe trois entiers naturels $a,b\ et\ c$ tels que $546=13a$, $273=13b$ et $169=13c$,

$D=\begin{vmatrix}5&2&1\\4&7&6\\6&3&9\end{vmatrix}\underbrace{=}_{L_3\leftarrow L_3+10L_2+100L_1}\begin{vmatrix}5&2&1\\4&7&6\\546&273&169\end{vmatrix}=13\underbrace{\begin{vmatrix}5&2&1\\4&7&6\\a&b&c\end{vmatrix}}_{d\in\mathbb{Z}}=13d$. Donc D est multiple de 13.

Ex 4 Calculer les déterminants suivants : $d_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\a+b&b+c&c+a\\ab&bc&ca\end{vmatrix}$, $d_2=\begin{vmatrix}1&\cos(a)&\cos(2a)\\\cos(a)&\cos(2a)&\cos(3a)\\\cos(2a)&\cos(3a)&\cos(4a)\end{vmatrix}$,

$d_3=\begin{vmatrix}1&a&b&ab\\1&c&b&cb\\1&a&d&ad\\1&c&d&cd\end{vmatrix}$, $d_4=\begin{vmatrix}a^2&b^2&ab\\ab&a^2&b^2\\b^2&ab&a^2\end{vmatrix}$, $d_5=\begin{vmatrix}2a&a-b-c&2a\\b-a-c&2b&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$,$det(A-\lambda I)$ où $A=\begin{pmatrix}1&3&3\\-2&11&-2\\8&-7&6\end{pmatrix}$

$$d_5=\begin{vmatrix}2a&a-b-c&2a\\b-a-c&2b&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}\underbrace{=}_{L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3}\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c&a+b+c\\b-a-c&2b&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\b-a-c&2b&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1\\ C_3\leftarrow C_3-C_1}}{\underbrace{=}}(a+b+c)\begin{vmatrix} 1^{+} & 0 & 0\\ b-a-c & b+a+c & a+b+c\\ 2c & 0 & -c-a-b\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} b+a+c & b+a+c\\ 0 & -(b+a+c)\end{vmatrix}=-(a+b+c)^3.$$

$$d_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ a+b & b+c & c+a\\ ab & bc & ca\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ a+b & c-a & c-b\\ ab & b(c-a) & a(c-b)\end{vmatrix}=(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ a+b & 1 & 1\\ ab & b & a\end{vmatrix}=(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ a+b & 1 & 0\\ ab & b & a-b\end{vmatrix}$$
$$=(c-a)(c-b)(a-b).$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a)\\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a)\\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a)\\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a)\\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a)\\ 0 & \cos(2a)-cos^2(a) & \cos(3a)-\cos(a)\cos(2a)\\ 0 & \cos(3a)-\cos(2a)\cos(a) & \cos(4a)-\cos^2(2a)\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} -sin^2(a) & -\sin(a)\sin(2a)\\ -\sin(2a)\sin(a) & -sin^2(2a)\end{vmatrix}=\sin(a)\sin(2a)\begin{vmatrix} \sin(a) & \sin(a)\\ \sin(2a) & \sin(2a)\end{vmatrix}=\sin^2(a)\sin^2(2a)\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Ex 5 Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ et $P(X)=\alpha+\beta X+\gamma X^2+X^4$.

1. Montrer que $D=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4\\ 1 & b & b^2 & b^4\\ 1 & c & c^2 & c^4\\ 1 & d & d^2 & d^4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & P(a)\\ 1 & b & b^2 & P(b)\\ 1 & c & c^2 & P(c)\\ 1 & d & d^2 & P(d)\end{vmatrix}$.
2. En choisissant judicieusement P de sorte que la dernière colonne soit « presque nulle », calculer D.

1. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4\\ 1 & b & b^2 & b^4\\ 1 & c & c^2 & c^4\\ 1 & d & d^2 & d^4\end{vmatrix}\underset{C_4\leftarrow C_4-(\alpha C_1+\beta C_2+\gamma C_3)}{\underbrace{=}}\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & P(a)\\ 1 & b & b^2 & P(b)\\ 1 & c & c^2 & P(c)\\ 1 & d & d^2 & P(d)\end{vmatrix}$.
2. *Posons* $P(X)=(X-a)(X-b)(X-c)(X-k)$ et choisissons k de sorte que le coefficient de X^3 soit nul dans la forme développée de P .

Or, $\frac{coeff(X^3)}{coeff(X^3)}=-(la\ somme\ des\ racines\ de\ P)=-(a+b+c+k)$. Donc prenons $k=-(a+b+c)$et finalement,
$P(X)=(X-a)(X-b)(X-c)(X+(a+b+c))$.

Alors, $D=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & P(a)\\ 1 & b & b^2 & P(b)\\ 1 & c & c^2 & P(c)\\ 1 & d & d^2 & P(d)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0\\ 1 & b & b^2 & 0\\ 1 & c & c^2 & 0\\ 1 & d & d^2 & P(d)^{+}\end{vmatrix}=P(d)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}_{vandermonde}$

$D=(d-a)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)(c-a)(a-b)(b-c)$..

Ex 6 Soit n un entier impair et A une matrice carrée d'ordre n, antisymétrique . Montrer que det (A)=0.

$detA=\det(A^T)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)=-det(A)$. Donc $\det(A)=0$.

Ex 7 Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ $a\ et\ b$ des scalaires et $A=\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ dans $M_n(K)$ telle que : $\forall i, a_{ii}=a\ et\ \forall i\neq j, a_{ij}=b$.
Calculer $det(A)$ (sous forme factorisée). Pour quelles valeurs de (a,b), Aest-elle inversible ?

$A=\begin{pmatrix} a & b & & b\\ b & a & & b\\ \vdots & b & \cdots\cdots & \vdots\\ b & \vdots & & b\\ b & b & & a\end{pmatrix}$. Donc $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b & & b\\ b & a & & b\\ \vdots & b & \cdots\cdots & \vdots\\ b & \vdots & & b\\ b & b & & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & & b\\ a+(n-1)b & a & & b\\ \vdots & & b\cdots\cdots & \vdots\\ a+(n-1)b & \vdots & & b\\ a+(n-1)b & b & & a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & b\\ 1 & a & b & b\\ \vdots & b & a\cdots & \vdots\\ 1 & \vdots & b & b\\ 1 & b & b & a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1^{+} & b & b & & b\\ 0 & a-b & 0 & & 0\\ \vdots & 0 & a-b & \cdots\cdots & \vdots\\ 0 & \vdots & \vdots & & 0\\ 0 & 0 & 0 & & a-b\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](+1)\underbrace{\begin{vmatrix} a-b & & & (0)\\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & a-b\end{vmatrix}}_{\text{déterminants }d'ordre\ n-1}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$

Ainsi, A est inversible sietssi $a+(n-1)b\neq 0\ et\ a\neq b$

Ex 8 $\Delta_1=|1|\ et\ \forall n\geq 1, \Delta_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots 0 & 1\\ \vdots & ⋰\ ⋰ & 1\\ 0 & 1 & \vdots\\ 1 & 1\cdots & 1\end{vmatrix}$déterminant d'ordre n . Calculer Δ_n .

$\Delta_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots 0 & 1\\ \vdots & ⋰\ ⋰ & 1\\ 0 & 1 & \vdots\\ 1 & 1\cdots & 1\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\Delta_{n-1}=(-1)^{n-1}\Delta_{n-1}$. Donc, $\Delta_n=\left[\prod_{k=1}^{n-1}(-1)^k\right]\Delta_1=(-1)^{\sum_{k=1}^{n}k}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Ex 9 Soit $n\ et\ p$ deux entiers naturels. Et $\Delta_{n,p}=\begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p-1}\\ 1 & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \cdots & \binom{n+p-1}{p-1}\end{vmatrix}$déterminant d'ordre p .

1) Effectuant des opérations sur les colonnes , montrer que : pour tous $p\in\{0,1\}et\ n\in\mathbb{N}$, $\Delta_{n,p}$=$\Delta_{n+1,p}$=$\Delta_{n,p+1}$
2) En déduire la valeur de $\Delta_{n,p}$.

1) $\Delta_{n,p}=\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \cdots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix} \overset{C_{n+1}\leftarrow C_{n+1}+C_n}{\triangleq} \begin{vmatrix} \overbrace{\binom{n}{0}}^{C_1} & \overbrace{\binom{n}{1}}^{C_2} & \cdots & \overbrace{\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p-2}}^{C_{n+1}} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1}+\binom{n+1}{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \cdots & \binom{n+p-1}{p-1}+\binom{n+1}{p-2} \end{vmatrix}$

$$\overset{Triangle\ de\ Pascal}{\triangleq} \begin{vmatrix} \overbrace{\binom{n}{0}}^{C_1} & \overbrace{\binom{n}{1}}^{C_2} & \cdots & \overbrace{\binom{n+1}{p-1}}^{C_{n+1}} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+2}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p-1} \end{vmatrix}$$

$\overset{C_n\leftarrow C_n-C_{n-1}+Triangle\ de\ Pascal}{\triangleq} =$

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p-1} & \binom{n+1}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1} & \binom{n+2}{p-1} \\ \vdots & \square & \vdots & & \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \cdots & \binom{n+p-1}{p-1} & \binom{n+p}{p-1} \end{vmatrix} \overset{(\ldots)}{\triangleq} \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-2} & \binom{n+1}{p-1} \\ \binom{n}{0} & \binom{n+2}{1} & \cdots & \binom{n+2}{p-2} & \binom{n+2}{p-1} \\ \vdots & \square & \vdots & & \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p-2} & \binom{n+p}{p-1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-2} & \binom{n+1}{p-1} \\ 1 & \binom{n+2}{1} & \cdots & \binom{n+2}{p-2} & \binom{n+2}{p-1} \\ \vdots & \square & \vdots & & \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p-2} & \binom{n+p}{p-1} \end{vmatrix} = \Delta_{n+1,p}.$$

$$\Delta_{n,p}=\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \cdots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix} \overset{\substack{L_{n+1}\leftarrow L_{n+1}-L_n \\ +\ triangle\ de\ Pascal}}{\triangleq} \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-2}{0} & \cdots & \binom{n+p-2}{p-2} \end{vmatrix}$$

$$= \overset{\substack{L_n\leftarrow L_n-L_{n-1} \\ +\ triangle\ de\ Pascal}}{\triangleq} \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-3}{0} & & \binom{n+p-3}{p-3} \\ 0 & \binom{n+p-2}{0} & \cdots & \binom{n+p-2}{p-2} \end{vmatrix} \overset{(\ldots)}{\triangleq} \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \square & \binom{n}{p-1} \\ 0 & \binom{n}{0} & \square & \binom{n}{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-3}{0} & & \binom{n+p-3}{p-3} \\ 0 & \binom{n+p-2}{0} & \cdots & \binom{n+p-2}{p-2} \end{vmatrix} = 1\times \Delta_{n,p-1}$$

$\Delta_{n,p-1}$

Et par conséquent, $\Delta_{n,p+1}= \Delta_{n,p}$.

2) Alors $\Delta_{n,p}= \Delta_{n-1,p}= \Delta_{n-2,p}= \cdots . = \Delta_{0,p}= \Delta_{0,p-1}= \cdots = \Delta_{0,0}= \left|\binom{0}{0}\right| = 1.$

Ex 10 Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels. Calculer $\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_n, x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & \square & a_n \\ 0 & x & \ddots & \square & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \square & \vdots \\ 0 & \square & \square & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & x \end{vmatrix}$.

$$\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_n, x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & \square & a_n \\ 0 & x & \ddots & \square & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \square & \vdots \\ 0 & \square & \square & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & x \end{vmatrix} = x\Delta_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) + (-1)^{n+1}a_n \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ x & 0 & \ddots & \square & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \square & \vdots \\ 0 & \square & \square & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & x & a_1 \end{vmatrix}}_{\det d'ordre\ n}$$

$$= x\Delta_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) + (-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1+1}a_n \underbrace{\begin{vmatrix} x & \square & (0) \\ \square & \ddots & \square \\ (0) & \square & x \end{vmatrix}}_{\det d'ordre\ n-1}$$

$$= x\Delta_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) - a_n^2x^{n-1}$$

Alors, $\Delta_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) = x\Delta_{n-2}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, x) - a_{n-1}^2x^{n-2}$ et par suite,

$$\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_n, x) = x^2\Delta_{n-2}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, x) - a_{n-1}^2x^{n-1} - a_n^2x^{n-1}$$

De même, $\Delta_{n-2}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, x) = x\Delta_{n-3}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, x) - a_{n-2}^2x^{n-4}$ et par suite,

$$\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_n, x) = x^3\Delta_{n-3}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, x) - a_{n-2}^2x^{n-1} - a_{n-1}^2x^{n-1} - a_n^2x^{n-1}$$

Conjecture : $\Delta_n(a_1,a_2,\dots,a_n,x) = x^{n-1}\Delta_1(a_1,x) - a_2^2x^{n-1} - a_3^2x^{n-1} - \cdots - a_{n-2}^2x^{n-1} - a_{n-1}^2x^{n-1} - a_n^2x^{n-1}$

$$= x^{n-1}(x^2 - {a_1}^2) - a_2^2x^{n-1} - a_3^2x^{n-1} - \cdots - a_{n-2}^2x^{n-1} - a_{n-1}^2x^{n-1} - a_n^2x^{n-1}$$

$\Delta_n(a_1,a_2,\dots,a_n,x) = x^{n+1} - ({a_1}^2 - a_2^2 - \cdots - a_{n-2}^2 - a_{n-1}^2 - a_n^2)\,x^{n-1}$.

Init : $\Delta_1(a_1,x) = x^2 - {a_1}^2$.

Propag : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\Delta_n(a_1,a_2,\dots,a_n,x) = x^{n+1} - ({a_1}^2 - a_2^2 - \cdots - a_{n-2}^2 - a_{n-1}^2 - a_n^2)\,x^{n-1}$. Alors,

$\Delta_{n+1}(a_1,a_2,\dots,a_{n+1},x) = x\Delta_n(a_1,a_2,\dots,a_n,x) - a_{n+1}^2x^{n-1}$

$= x[x^{n+1} - ({a_1}^2 - a_2^2 - \cdots - a_{n-2}^2 - a_{n-1}^2 - a_n^2)\,x^{n-2}] - a_{n+1}^2x^{n-1}$

$= x^{n+2} - ({a_1}^2 - a_2^2 - \cdots - a_{n-2}^2 - a_{n-1}^2 - a_n^2 - a_{n+1}^2)\,x^{n-1}$ $OK!!$

Ex 11 Soit J la matrice de $M_n(K)$ dont tous les coefficients valent 1 .

1. Soit $A \in M_n(K)$. Pour tout scalaire x , on note $P(x) = \det(A + xJ)$. Démontrer qu'il existe un scalaire ω tel que : pour tout scalaire x , $P(x) = det(A) + \omega\, x$. **ω dépend-il de x ? Que peut-on alors dire de P ?**
2. **Application** : Soient $(a,b,c_1,\dots,c_n) \in K^{n+2}$ et $M = \begin{pmatrix} c_1 & b & \cdots & & b \\ a & c_2 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & b \\ a & \dots & & a & c_n \end{pmatrix} \in M_n(K)$.
   a) Déduire de 1. la valeur de $det(M)$ dès que $a \neq b$.
   b) Calculer $det(M)$ dans le cas où $a = b$ et $c_1 = \cdots = c_n = c$.

$$P(x) = \det(A+xJ) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22}+x & & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12}+x & & a_{1n}+x \\ x & a_{22}+x & & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2}+x & & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+x & & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22} & a_{13}+x & & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{13}+x & & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & x & a_{1n}+x \\ a_{21} & x & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & x & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12} & & a_{1n} \\ x & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} & & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{13} & & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22} & x & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & x & a_{nn}+x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 1 & a_{nn} \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(…)

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{13} & & a_{nn} \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & 1 \\ a_{21} & a_{22} & & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & 1 \end{vmatrix} +..+ x \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 1 & a_{nn} \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$= \det(A) + x\omega$ où $\omega = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & 1 \\ a_{21} & a_{22} & & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & 1 \end{vmatrix} +..+ \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 1 & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$ est indépendant de x.

APPLICATION : $M = \begin{pmatrix} c_1 & b & \cdots & & b \\ a & c_2 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & & a & c_n \end{pmatrix}$.

a) Donc d'après 1., il existe un réel ω tel que $\forall x \in K,\ \det(M + xJ) = \det(M) + x\omega$.

En particulier,

pour $x = -a$, $\det(M) - a\omega = \det(M - aJ) = \begin{vmatrix} c_1-a & b-a & \cdots & & b-a \\ 0 & c_2-a & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b-a \\ 0 & \dots & & 0 & c_n-a \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n (c_k - a)$ $(L1)$. Et,

pour $x = -b$, $\det(M) - b\omega = \det(M - bJ) = \begin{vmatrix} c_1-b & 0 & \cdots & & 0 \\ a-b & c_2-b & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a-b & \dots & a-b & 0 & c_n-b \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n (c_k - b)$ $(L2)$.

Alors $(bL1) - (aL2)$ $donne :$ $bdet(M) - adet(M) = b\prod_{k=1}^n (c_k - a) - a\prod_{k=1}^n (c_k - b)$.

Comme $a \neq b$, je peux conclure que : $\det(M) = \frac{1}{b-a}\left[b\prod_{k=1}^n (c_k - a) - a\prod_{k=1}^n (c_k - b)\right]$

b) $M = \begin{pmatrix} c & a & \cdots & & a \\ a & c & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & & a & c \end{pmatrix} = aJ + (c-a)I.$

$$\det(M)=\begin{vmatrix} c & a & \cdots & \square & a\\ a & c & \ddots & \square & \square\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \square & \ddots & \ddots & a\\ a & \cdots & \square & a & c\end{vmatrix} \overset{C_1\leftarrow C_1+C_2+..+C_n}{\cong} \begin{vmatrix} c+(n-1)a & a & \cdots & \square & a\\ c+(n-1)a & c & \ddots & \square & \square\\ \vdots & a & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \square & \ddots & \ddots & a\\ c+(n-1)a & a & \square & a & c\end{vmatrix} \overset{\substack{car\ le\ déterminant\\ est\ linéaire\ par\ rapport\\ à\ la\ prmeirèe\ colonne}}{\cong} (c+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & \square & a\\ 1 & c & \ddots & \square & \square\\ \vdots & a & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \square & \ddots & \ddots & a\\ 1 & a & \square & a & c\end{vmatrix}$$

$$\det(M) \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1\\ \vdots\\ L_n\leftarrow L_n-L_1}}{\cong} (c+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1^{+} & a & \cdots & \square & a\\ 0 & c-a & 0 & \square & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \square & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \square & 0 & c-a\end{vmatrix} \overset{\substack{en\ développant\\ par\ rapprot\ à\ la\\ première\ colonne}}{\cong} (c+(n-1)a)\underbrace{\begin{vmatrix} c-a & 0 & & 0\\ 0 & c-a & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & & c-a\end{vmatrix}}_{déterminant\ d'ordre\ n-1}$$

$$\det(M) \overset{\substack{car\ le\ détermiant\\ d'une\ matride\ triangulaire\\ est\ le\ produit\ des\ coefficients\\ de\ la\ diagonale.}}{\cong} (c+(n-1)a)(c-a)^{n-1}.$$

Ainsi, M est inversible sietssi $c\notin\{-(n-1)a,a\}$.

Ex 12 Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Calculer $\Delta_n(a,b)=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots\ \square & & 0 & b\\ 0 & \ddots & a & b & \therefore & 0\\ \vdots & \square & b & a & \square & \vdots\\ 0 & \therefore & \square & & \ddots & 0\\ b & 0 & \dots & & 0 & a\end{vmatrix}$ déterminant d'ordre $2n$.

$$\Delta_n(a,b)=\begin{vmatrix} a^{+} & 0 & \cdots\ \square & & 0 & b\\ 0 & \ddots & a & b & \therefore & 0\\ \vdots & \square & b & a & \square & \vdots\\ 0 & \therefore & \square & & \ddots & 0\\ b^{(-1)^{2n+1}} & 0 & \dots & & 0 & a\end{vmatrix} = a\underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & 0\\ \square & \square & \vdots & \vdots\\ b & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & a^{+}\end{vmatrix}}_{\det d'ordre\ 2n-1} + \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1} b\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b^{(-1)^{2n-1+1}}\\ a & 0 & b & 0\\ \square & \square & \vdots & \vdots\\ 0 & b & 0 & 0\\ b & 0 & a & 0\end{vmatrix}}_{\det d'ordre\ 2n-1}$$

$=a^2\underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & b\\ 0 & a & 0\\ \square & \square & \square\\ b & 0 & a\end{vmatrix}}_{\det d'ordre\ 2n-2} - b^2\underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & b\\ 0 & a & 0\\ \square & \square & \square\\ b & 0 & a\end{vmatrix}}_{\det d'ordre\ 2n-2} = (a^2-b^2)\Delta_{n-1}(a,b)$. La suite $(\Delta_n(a,b))$ est donc géométrique de raison (a^2-b^2). Ainsi,

$\forall n,\Delta_n(a,b)=(a^2-b^2)^{n-1}\Delta_1(a,b)=(a^2-b^2)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b\\ b & a\end{vmatrix}=(a^2-b^2)^n$.

Ex 13

1. Démontrer que $AS_n(\mathbb{R})\oplus S_n(\mathbb{R})=M_n(\mathbb{R})$.
2. $\forall M\in M_n(\mathbb{R}), f(M)=M^T$. Calculer $\det(f)$.

Pour toute matrice $M\in M_n(\mathbb{R}), M=\underbrace{\frac{1}{2}(M+M^T)}_{\in S_n(\mathbb{R})}+\underbrace{\frac{1}{2}(M-M^T)}_{\in AS_n(\mathbb{R})}$ est l'unique écriture de M comme somme d'une matrice de $S_n(\mathbb{R})\ et$ d'une matrice de $AS_n(\mathbb{R})$. Donc, $AS_n(\mathbb{R})\oplus S_n(\mathbb{R})=M_n(\mathbb{R})$. Alors la concaténation d'une base B_1 de $AS_n(\mathbb{R})$ et d' une base $\mathrm{B}_2\ de\ S_n(\mathbb{R})$donne une base B de $M_n(\mathbb{R})$.

Alors $mat_Bf=diag\left(\underbrace{-1,-1,..,-1}_{\dim(AS_n(\mathbb{R}))},\underbrace{1,1,\dots,1}_{dimS_n(\mathbb{R})}\right)$. $Donc$ $\det(f)=(-1)^{\dim(AS_n(\mathbb{R}))}$. Or $\dim(AS_n(\mathbb{R}))=\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{(n-1)n}{2}$. Ainsi,

$\det(f)=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$.

Ex 14 Soit $E=\mathbb{R}_n[X]\ et\ f$ définie sur E par $f(P)=\frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right)+P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. Déterminer tous les réels λ tels qu'il existe un polynôme P de E non nul vérifiant $f(P)=\lambda P$.
3. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $Q_k\in\mathbb{R}[X]$ tel que : $Q_k\neq 0\ et\ \ f(Q_k)=\frac{1}{2^k}Q_k$. Montrer que $(Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Donner la matrice de f dans cette nouvelle base et calculer $det(f)$.

1. $f(\alpha P+\beta Q)=\frac{1}{2}\left(\alpha P\left(\frac{X}{2}\right)+\beta Q\left(\frac{X}{2}\right)+\alpha P\left(\frac{X+1}{2}\right)\beta Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)=\frac{\alpha}{2}\left(\alpha P\left(\frac{X}{2}\right)+\alpha P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)+\frac{\beta}{2}\left(Q\left(\frac{X}{2}\right)+Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)=\alpha f(P)+\beta f(Q)$.

De plus, $f(X^k)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{X}{2}\right)^k+\left(\frac{X+1}{2}\right)^k\right)=\frac{1}{2^{k+1}}(X^k+(X+1)^k)=\frac{1}{2^{k+1}}(2X^k+T_k(X))=\frac{1}{2^k}\left(X^k+\frac{1}{2}T_k(X)\right)$ avec $degT_k<k.$. Donc $\deg\left(f(X^k)\right)=k$. Ainsi, $\forall k\in[\![O,n]\!], f(X^k)\in\mathbb{R}_n[X]$.

Par conséquent, $\forall P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k, f(P)=\sum_{k=0}^{n}a_kf(X^k)donc\ degf(P)\leq max_{k\in[\![0,n]\!]}f(X^k)\leq n.\ Donc,,\forall P\in\mathbb{R}_n[X], f(P)\in\mathbb{R}_n[X]$. J^' en conclus que f est un endomorphisme de E.

De plus, f envoie la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]\ sur$ la famille $(f(X^k))_{k=0..n}$ .Cette famille $(f(X^k))_{k=0..n}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, échelonnée en degré sans polynôme nul, donc est libre. De plus, card$(f(X^k))_{k=0..n}=n+1=dim\mathbb{R}_n[X]$. J'en déduis que $(f(X^k))_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme f envoie une base sur une autre base, je peux conclure que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. λ est un réel vérifiant qu'il existe un polynôme P de E non nul tel que $f(P)=\lambda P$

$\Leftrightarrow Ker(f-\lambda id_E)\neq\{0\}$.
$\Leftrightarrow f-\lambda id_E$ n'est pas injective
$\Leftrightarrow f-\lambda id_E$ n'est pas bijective
$\Leftrightarrow det(f-\lambda id_E)=0$
$\Leftrightarrow det[mat_{B_c}(f-\lambda id_E)]=0$

Or, $mat_{B_c}(f-\lambda id_E)=mat_{B_c}(f)-\lambda mat_{B_c}(id_E)$ est triangulaire supérieure et sa diagonale est constituée des réels $\frac{1}{2^k}-\lambda$ tq $k\in[\![0,n]\!]$.

Donc, $det\left[mat_{B_c}(f-\lambda id_E)\right]=\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}-\lambda\right)$. Ainsi, $det(f-\lambda id_E)=0 \Leftrightarrow \lambda \in \{\frac{1}{2^k} / k \in [\![0,n]\!]\}$.

4.D'après ce qui précède, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $Ker\left(f-\frac{1}{2^k}id_E\right) \neq \{0\} donc\ il\ existe\ \ Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $Q_k \neq 0\ et\ \ f(Q_k)=\frac{1}{2^k}Q_k$.

<u>Montrer que</u> $B=(Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ <u>est une base de</u> $\mathbb{R}_n[X]$. Pour cela, montrons d'abord que $\deg(Q_k)=k$.

Posons $Q_k=\sum_{j=0}^{p} a_j X^j\ \ tq\ \ p=\deg(Q_k)\ et\ \ a_p \neq 0$.Alors, $f(Q_k)=\sum_{j=0}^{p} a_j f(X^j)\ =\sum_{j=0}^{p} a_j \frac{1}{2^j}\left(X^j+\frac{1}{2}T_j(X)\right)$. Or, $f(Q_k)=\frac{1}{2^k}Q_k$.

Donc, $\sum_{j=0}^{p} a_j \frac{1}{2^j}\left(X^j+\frac{1}{2}T_j(X)\right)=\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{p} a_j X^j$. Alors, par identification des coefficients dominants , $a_p\frac{1}{2^p}=a_p\frac{1}{2^k}\ i.e.\ a_p\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{2^k}\right)=0$

Donc $comme\ \ a_p \neq 0$, $\frac{1}{2^p}-\frac{1}{2^k}=0$ et par suite $p=k$.

Ainsi, la famille $(Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$est échelonnée en degré donc libre. De plus, cette famille contient $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $n+1=\dim(\mathbb{R}_n[X])$, je peux conclure que $(Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. $mat_B f = diag\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\dots,\frac{1}{2^n}\right). Donc\ \det(f)=\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{\sum_{k=0}^{n}k}}=\frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$.

Ex 15 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ -2 & 11 & -2\\ 8 & -7 & 6\end{pmatrix}$.

1. Déterminer tous les couples $(\lambda, U) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ tels $U \neq (0,0,0)$ et $f(U)=\lambda U$.
2. En déduire que A est semblable à $D=diag(-2,7,13)$