Matrices d'une application linéaire

***E et F* désignent ici deux $K-e-v$ de <u>dimensions finies non nulles</u> tels que : $dim(E) = p \in \mathbb{N}^*$ *et* $dim(F) = n \in \mathbb{N}^*$.**

Def. matrice d'une application linéaire dans deux bases choisies :

Soit $B_1 = (\overrightarrow{e_k})_{k=1..p}$ une base du $K-e-v\ E$ $(dimE = p)$ et $B_2 = (\overrightarrow{v_k})_{k=1..n}$ une base du $K-e-v\ F$ $(dimF = n)$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

La **matrice de f dans les bases B_1 et B_2,** notée $mat_{B_1,B_2}(f)$, est la matrice des composantes de la famille $(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots, f(\overrightarrow{e_p}))$ dans la base B_2.

Autrement dit, $M = mat_{B_1,B_2}(f) = mat_{B_2}\left(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots, f(\overrightarrow{e_p})\right) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & .. & f(\overrightarrow{e_p}) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ selon\ \vec{v}_1 \\ selon\ \vec{v}_2 \\ \dots \\ selon\ \vec{v}_n \end{array}$.

Def. matrice d'un endomorphisme dans une base :

Si f est un endomorphisme de E alors on peut considérer la même base $B = (\overrightarrow{e_k})_{k=1..p}$ de E au départ et à l'arrivée et la **matrice de f dans B** est $mat_B f = mat_{B,B} f$.

$$mat_B f = mat_B(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots, f(\overrightarrow{e_p})).$$

NB : Une telle matrice se lit donc en colonne : la colonne k contient les composantes du vecteurs $f(\overrightarrow{e_k})$ dans la base B_2 ce qui signifie que $f(\overrightarrow{e_k}) = a_{1k}\overrightarrow{v_1} + a_{2k}\overrightarrow{v_2} + \dots + a_{nk}\overrightarrow{v_n}$.

Exemple : Soit $f : \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a-2b)X^2 + (b+d-a)X + 3c - a\right)$. Montrons que f est linéaire de $M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminons sa matrice dans les bases canoniques de ces deux $\mathbb{R}$-$e-v$.

f est une application linéaire de $M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ car $f\left(\alpha_1\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 a_1 & \alpha_1 b_1 \\ \alpha_1 c_1 & \alpha_1 d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 a_2 & \alpha_2 b_2 \\ \alpha_2 c_2 & \alpha_2 d_2 \end{pmatrix}\right) =$

$f\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 & \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \\ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 & \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 \end{pmatrix}\right)$

$= \left(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 - 2(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)\right)X^2 + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 - \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)X + 3(\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2) - (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)$

$= (\alpha_1(a_1 - 2b_1) + \alpha_2(a_2 - 2b_2))X^2 + (\alpha_1(b_1 + d_1 - a_1) + \alpha_2(b_2 + d_2 - a_2))\ X + (\alpha_1(3c_1 - a_1) + \alpha_2(3c_2 - a_2))$

$= \alpha_1(a_1 - 2b_1)X^2 + \alpha_2(a_2 - 2b_2)X^2 + \alpha_1(b_1 + d_1 - a_1)X + \alpha_2(b_2 + d_2 - a_2)\ X + \alpha_1(3c_1 - a_1) + \alpha_2(3c_2 - a_2)$

$= \alpha_1\ f\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) + +\alpha_2 f\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)$.

Prenons les bases canoniques $B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ de $M_2(\mathbb{R})$ et $B_2 = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors,

$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 - 1X + 1X^2$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1X - 2X^2$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 3$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1X$.

Donc, $M = mat_{B_1,B_2}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exo : On note B_1 la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ B_c base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que $B_2 = ((X-1)(X-2), X(X-2), X(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Soit f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par : $f(P) = (P(0), P(1), P(2))$. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$.

3) Déterminer la matrice D de f dans les bases B_2 et B_c et la matrice M de f dans les bases B_1 et B_c.

Correction de l'exercice : http://youtu.be/BYHu6xcfLKM?hd=1

1) Chaque polynôme de B_2 est dans $\mathbb{R}_2[X]$. De plus, le cardinal de B_2 est égale à 3 qui est la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc pour prouver que B_2 est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, il faut et il suffit de montrer que B_2 est libre.
   Soit a, b et c trois réels tels que : $a(X-1)(X-2) + bX(X-2) + cX(X-1) = 0$
   En évaluant en 1, $b(-1) = 0$ donc $b = 0$. En évaluant en 0, $a(2) = 0$ donc $a = 0$. En évaluant en 2, $c(2) = 0$ donc $c = 0$.
   Ainsi, B_2 est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = (P(0), P(1), P(2)) \in \mathbb{R}^3$.Soit P *et* Q deux éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et a et b deux réels.

$f(aP + bQ) = \left(aP(0) + bQ(0), aP(1) + bQ(1), aP(2) + bQ(2)\right) = \left(aP(0), aP(1), aP(2)\right) + \left(bQ(0), bQ(1), bQ(2)\right)$

$f(aP + bQ) = a\left(P(0), P(1), P(2)\right) + b\left(Q(0), Q(1), Q(2)\right) = af(P) + bf(Q)$. Ainsi, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$.

3) la matrice D de f dans les bases B_2 =$((X-1)(X-2), X(X-2), X(X-1))$ et $B_c = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$:

$f\left((X-1)(X-2)\right) = (2,0,0) = 2(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$f\left(X(X-2)\right) = (0,-1,0) = 0(1,0,0) + (-1)(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$f\left(X(X-1)\right) = (0,0,2) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 2(0,0,1)$.

Donc $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4) la matrice D de f dans les bases B_1 =$(1, X, X^2)$) et $B_c = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$:

$f(1) = (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$

$f(X) = (0,1,2) = 0(1,0,0) + (1)(0,1,0) + 2(0,0,1)$

$f(X^2) = (0,1,4) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 4(0,0,1)$

Donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

6 Formule fondamentale :
Soit $B_1 = (\vec{e_k})_{k=1..p}$ une base du $K-e-v\ E$ et $B_2 = (\vec{v_k})_{k=1..n}$ une base du $K-e-v\ F$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$\forall \vec{x} \in E,\ \underbrace{mat_{B_2}(f(\vec{x}))}_{Y} = \underbrace{mat_{B_1,B_2}(f)}_{M} \times \underbrace{mat_{B_1}(\vec{x})}_{X} \quad i.e. \quad Y = MX.$$

Cas d'un endomorphisme : Soit $B = (\vec{e_k})_{k=1..p}$ une base du $K-e-v\ E$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Alors, $mat_B(f(\vec{x})) = mat_B(f) \times mat_B(\vec{x})$.

CETTE FORMULE PERMET D'OBTENIR L'EXPRESSION D'UNE APPLICATION LINEAIRE CONNAISSANT UNE MATRICE DE CETTE APPLICATION DANS DES BASES CONNUES.

Conséquence : une application linéaire de E dans F est entièrement définie par sa matrice dans deux bases fixées.

6bisExemple : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_1[X], M_2(\mathbb{R}))$telle que $mat_{B_1B_2}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ où $B_1 = (3, 6-2X)$ et $B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Cette matrice doit me permettre de déterminer l'image de tout polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ par f . Déterminons $f(a+bX)$. Appliquons pour cela la formule précédente : $mat_{B_2}f(a+bX) = mat_{B_1,B_2}f \times mat_{B_1}(a+bX)$.

Or, $a + bX = -\frac{b}{2}(6-2X) + \left(\frac{a}{3} + b\right)3$. Donc , $mat_{B_1}(a+bX) = \begin{pmatrix} \frac{a}{3} + b \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix}$. Donc, $mat_{B_2}f(a+bX) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a}{3} + b \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{3} \\ \frac{2a}{3} + 3b \\ a + \frac{5b}{2} \\ \frac{4a}{3} + \frac{3b}{2} \end{pmatrix}$.

Donc, $f(a+bX) = \frac{a}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{2a}{3} + 3b\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \left(a + \frac{5b}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{4a}{3} + \frac{3b}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemples IMPORTANTS :

1. *Soit $M \in M_{n,p}(K)$. Si B_1 est une base canonique de E et B_2 est une base canonique de F, **l'application linéaire f de E dans F canoniquement associée à M** est l'unique application linéaire de E dans F telle que $mat_{B_1,B_2}f = M$.*
2. *Soit $M \in M_n(K)$. **L'endomorphisme f de K^n canoniquement associé à** M est l'unique endomorphisme de E telle que $mat_{B_c}f = M$.*
3. **Matrice de l'identité :** Soit B_1, B_2 deux bases de E et $\dim(E) = p$.

Alors, $mat_{B_1}\ id_E = I_p$ et $mat_{B_2,B_1}\ id_E = mat_{B_1}\ B_2 = matrice\ de\ passage\ de\ B_1\ à\ B_2 = P(B_1, B_2)$.

Conséquence : toute matrice est la matrice d'une application linéaire !

Exemple : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une expression de f.

Soit $B_c = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Alors, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, mat_{B_c}f(x,y,z) = mat_{B_c}f \times mat_{B_c}(x,y,z) = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x + 2z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$. *Donc $f(x,y,z) = (z, x+2z, -x+y+z)$.*

Théorème fondamentale : Soit $B_1 = (\vec{e_k})_{k=1..p}$ une base du K-e-v E et $B_2 = (\vec{v_k})_{k=1..n}$ une base du K-e-v F et f une application de E dans F. Alors, ∇: $\mathscr{L}(E,F) \to M_{n,p}(K)$ est un isomorphisme.

$f \mapsto mat_{B_1,B_2}f$

Conséquence : Si E et F sont de dimension finie alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie égale à $\dim(E) \times \dim(F)$.

Lecture matricelle du rang, noyau et de l'image:
Soit B_1base de E et B_2base de F .Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $M = mat_{B_1,B_2}(f)$.

1. Les colonnes de M sont les composantes dans B_2 des vecteurs d'une famille génératrice de $Im(f)$.
2. $rg(f) = rg(M)$.
3. Soit $\vec{x} \in E$ et $X = mat_{B_1}\vec{x}$. Alors , $\vec{x} \in Ker(f) \Leftrightarrow \underbrace{MX = 0}_{système\ linéaire} \Leftrightarrow X \in KerM$

Explications : $Imf = vect\,((f(\vec{e_i}))_{i\in\{1,..,p\}}$. Or, les colonnes de la matrice M sont les composantes des vecteurs $f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots, f(\vec{e_p})$ dans la base B_2. $rg(f) = rg(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots, f(\vec{e_p})) = rg\left(mat_{B_2}\left(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots, f(\vec{e_p})\right)\right) = rg(M)$.

Soit $\vec{x} \in E$ tq $\vec{x} = \sum_{k=1}^{p} x_k\vec{e_k}$. Alors, $X = mat_{B_1}\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

$\vec{x} \in Ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{0} \underset{\Delta\ bijective}{\Leftrightarrow} mat_{B_2}(f(\vec{x})) = mat_{B_2}(\vec{0}) \underset{prop\ 3}{\Longleftrightarrow} mat_{B_1,B_2}(f) \times mat_{B_1}(\vec{x}) = (0) \Leftrightarrow \underbrace{MX = 0}_{système\ linéaire} \Leftrightarrow X \in Ker(M)$

Donc, $Kerf = \left\{\sum_{k=1}^{p} x_k\vec{e_k} \,/ x_1, ., x_p\ scalaires\ \ et\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}\right\}$ où $M = (a_{ij})$.

Exemple : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & -8 & 2 \\ 4 & 14 & 1 \end{pmatrix}$. Donnons une base de $Ker(f)$ et $Im(f)$.

Soit $B_c = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$a + bX + cX^2 \in Ker(f) \Leftrightarrow f(a + bX + cX^2) = 0 \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 6b + c = 0 \\ -a - 8b + 2c = 0 \\ 4a + 14b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10b + 5c = 0 \\ -a - 8b + 2c = 0 \\ -18b + 9c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ a = -4b \end{cases}$. Donc,

$Ker(f) = \{-4b + bX + 2bX^2 / b \in \mathbb{R}\} = vect(-4 + X + 2X^2)$. Donc $dim(Ker(f)) = 1$. Alors le théorème du rang assure que $dim(Im(f)) = 3 - dim(Ker(f)) = 2$. Or, d'après la matrice de f dans B_c, $f(1) = 2 - X + 4X^2$ et $f(X) = 6 - 8X + 14X^2$ sont deux vecteurs de $Im(f)$ qui ne sont pas colinéaires. $(f(1), f(X))$ est donc une famille libre de 2 vecteurs de $Im(f)$. Comme $dim(Im(f)) = 2$, $(2 - X + 4X^2, 6 - 8X + 14X^2)$ est une base de $Im(f)$.

Exemple : Soit E un espace vectoriel et $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e}_4)$ une base de E .
Soit u un endomorphisme de E tel que la matrice de u par rapport à cette base B est :

$$M = mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Donner le rang de u, une base de $Im(u)$, une base de $Ker(u)$ en fonction des vecteurs de la base B.
2. Soit $\vec{x}$ un élément de E . Déterminer $u(\vec{x})$.

Méthode « tout en 1 » pour obtenir
rang de f , base de Imf et base de Kerf

1. J'échelonne M en COLONNES : $M \sim_c R$, R échelonnée.
2. J'en déduis

a) rgM puis la dimension de $Ker(f)$ grâce au théorème du rang.
b) une base de $Im(f)$ grâce aux colonnes non nulles de R.
c) une base de $Ker(f)$ grâce aux colonnes nulles de R.

1. $rg(u) = rg(M) = 2$ car $M \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. De plus, les opérations sur les colonnes de Mconserve le caractère générateur , donc $Im(u) = vect(\vec{e_1} - \vec{e_2}, \vec{e}_4 - \vec{e_3})$. Comme $dimIm(u) = 2$, $(\vec{e_1} - \vec{e_2}, \vec{e}_4 - \vec{e_3})$ est génératrice et maximale dans $Im(u)$ et est donc une base de $Im(u)$.

Le théorème du rang assure que $dimKer(u) = dimE - rg(u) = 4 - 2 = 2$. D'après M, $u(\vec{e_1}) = f(\vec{e_2}) = \vec{e_1} - \vec{e_2}$ et $u(\vec{e_3}) = \vec{e}_4 - \vec{e_3} = -f(\vec{e}_4)$. Donc, $u(\vec{e_1} - \vec{e_2}) = \vec{0}$ *et* $f(\vec{e_3} + \vec{e_4}) = \vec{0}$. Donc $(\vec{e_1} - \vec{e_2}, \vec{e_3} + \vec{e_4})$ est une famille de vecteurs de $Ker(u)$. Cette famille est libre car $a(\vec{e_1} - \vec{e_2}) + b(\vec{e_3} + \vec{e_4}) = \vec{0} \Longrightarrow a\vec{e_1} - a\vec{e_2} + b\vec{e_3} + b\vec{e_4} = \vec{0} \underbrace{\Longrightarrow}_{car\ B\ est\ libre} a = b = 0$.

De plus, $card(\vec{e_1} - \vec{e_2}, \vec{e_3} + \vec{e_4})) = 2 = dimKer(u)$. *Ainsi,* $(\vec{e_1} - \vec{e_2}, \vec{e_3} + \vec{e_4})$ est une base de $Ker(u)$.

2. Soit $\vec{x} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3} + d\vec{e_4}$.

$mat_B u(\vec{x}) = mat_B u \times mat_B(\vec{x}) = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ -a-b \\ d-c \\ c-d \end{pmatrix}$. Donc $u(\vec{x})$= $(a+b)\vec{e_1} - (a+b)\vec{e_2} + (d-c)\vec{e_3} + (c-d)\vec{e_4}$.

Exemple : Soit $u: \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par : $u(P) = P + (1-X)P'$. Montrer que $Ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}_n[X]$.

Soit $B = (1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^n)$ base de Taylor en 1 *de* $\mathbb{R}_n[X]$.

$u(1) = 1$ et si $k > 1$, alors $u((X-1)^k) = (X-1)^k + (1-X)k(X-1)^{k-1} = (1-k)(X-1)^k$.

Donc, $mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & -2 & & 0 \\ & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1-n \end{pmatrix} = diag(1,0,-1,-2,\dots,1-n)$.

Donc $rg(u) = n$ et $Im(u) = vect((1-k)(X-1)^k)_{k=0\dots,n} = vect((1-k)(X-1)^k)_{\substack{k=0\dots,n \\ k\neq 1}} \underbrace{=}_{car\ 1-k\neq 0} vect((X-1)^k)_{\substack{k=0\dots,n \\ k\neq 1}}$.. Cette famille $((X-1)^k)_{\substack{k=0\dots,n \\ k\neq 1}}$est libre car échelonnée en degré et sans polynôme nul, donc est une base de $Im(u)$. Le théorème du rang assure que $dimKer(u)) = 1$. Or, $u(X-1) = 0$ donc $(X-1)$ est un famille libre dans $Ker(u)$ et de cardinal égal à $dimKer(u)$. Donc $(X-1)$ est une nase de $Ker(u)$.

La concaténation de la base de $Im(u)$ et de celle de $Ker(u)$ est le base de Taylor en 1 dans le désordre, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$. J'en conclus que $Ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}_n[X]$.

Théorème : ICI $\underline{dimE = dimF < +\infty}$ Soit B_1, B_2 des bases respectivement de E et F.

1) Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $M = mat_{B_1,B_2}(f)$. $f est\ un\ isomorphisme\ de\ E\ sur\ F \Leftrightarrow M$ inversible$\Leftrightarrow f$ injective$\Leftrightarrow f$ surjective.
2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $M = mat_{B_1}(f)$. $\underbrace{f \in GL(E)}_{\substack{f\ est\ un \\ automorphisme\ de\ E}} \Leftrightarrow M$ inversible$\Leftrightarrow f$ injective$\Leftrightarrow f$ surjective.

Ex Soit E l'espace vectoriel engendré par $f_1: (x \mapsto 1), f_2: (x \mapsto sin(x))\ et\ f_3: (x \mapsto sin(2x))$.

1) Déterminer la dimension de E.
2) Soit $u: E \to \mathbb{R}^3$tel que : $u(f) = \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi), f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$. Montrer que u est linéaire. Est-ce un isomorphisme ?

1) $f_1: (x \mapsto 1), f_2: (x \mapsto sin(x))\ et\ f_3: (x \mapsto sin(2x))$ sont linéairement indépendantes car $\forall x \in \mathbb{R}, a + bsin(x) + csin(2x) = 0 \Longrightarrow$ $\begin{cases} a = 0\ (avec\ x = 0) \\ a + b = 0\ \left(avec\ x = \frac{\pi}{2}\right) \\ a + \frac{\sqrt{2}}{2}b + c = 0\ \left(avec\ x = \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Longrightarrow a = b = c = 0$. Donc (f_1, f_2, f_3)est une base de E et $\dim(E) = 3$.

2) $u(af + bg) = \left(af\left(\frac{\pi}{2}\right) + bg\left(\frac{\pi}{2}\right), af(\pi) + bg(\pi), af\left(\frac{\pi}{6}\right) + bg\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(af\left(\frac{\pi}{2}\right), af(\pi), af\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) + \left(bg\left(\frac{\pi}{2}\right), bg(\pi), bg\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = au(f) + bu(g)$.Donc u est linéaire. De plus, $M = mat_{B,B_c}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ est de rang 3 donc inversible. J'en déduis que u est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^3$.

Théorème Soit E, F et G des K-e-v de dimension finie et B_1 base de E et B_2 base de F et B_3 base de G.

1) (Rappel) Si $(f, g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et $(\alpha, \beta) \in K^2$ alors $mat_{B_1,B_2}(\alpha f + \beta g) = \alpha\, mat_{B_1,B_2}(f) + \beta\, mat_{B_1,B_2}(g)$.

2) Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $mat_{B_1,B_3}(g \circ f) = mat_{B_2,B_3}(g) \times mat_{B_1,B_2}(f)$. $(**)$

3) $Si\ \ f\ est\ un$ isomorphisme de $E\ sur\ F$ alors $mat_{B_2,B_1}(f^{-1}) = \left(mat_{B_1,B_2}(f)\right)^{-1}$.

Cas particulier d'un endomorphisme : Soit $f\ et\ g$ deux endomorphismes de E et B une base de E.

1. $mat_B(f \circ g) = mat_B(f)\, mat_B(g)$

2. $\forall k \in \mathbb{N},\ mat_B(f^k) = (mat_B(f))^k$.

3. $mat_B(f)$ est inversible $\Leftrightarrow f$ est un automorphisme de E et $mat_B(f^{-1}) = (mat_B(f))^{-1}$.

$(**)$ c'est de là que provient la définition compliquée du produit matriciel

Ex: Soit E un K-e-v rapporté à la base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tq $f(\vec{a}) = 4\vec{a} - 2\vec{b} - 4\vec{c}$, $f(\vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ et $f(\vec{c}) = 5\vec{a} - \vec{b} - 5\vec{c}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Im}(f^2) = E$.

$M = mat_B f = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.Donc $mat_B f^2 = M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

$M^2 \sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $Donc\ rg(f) = 1\ et Im(f^2) = vect(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$. Le vecteur $(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$ étant non nul, constitue une base de Imf^2.

Alors le théorème du rang assure que $dimKer(f^2) = 2$.

Or, d'après M^2, $f^2(\vec{a}) = -2\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c} = -f^2(\vec{b}) = 4f^2(\vec{c})$. Donc, $f^2(\vec{a} + \vec{b}) = f^2(\vec{a} - 4\vec{c}) = \vec{0}$. Donc, $\vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{a} - 4\vec{c}$ sont deux vecteurs de $Ker(f^2)$ non colinéaires (car $x(\vec{a} + \vec{b}) + y(\vec{a} - 4\vec{c}) = \vec{0} \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ B\ est\ libre} x + y = 0 = x = -4y \Leftrightarrow x = y = 0$). La famille $(\overrightarrow{a + b}$, $\vec{a} - 4\vec{c})$ est donc libre et maximale dans $Ker(f^2)$ et est donc une base de $Ker(f^2)$.

Concaténons la base de $Ker(f^2)$ et celle de $Im(f^2)$:

$P = mat_B((\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}), (\overrightarrow{a + b}), (\vec{a} - 4\vec{c})) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim_C \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim_C \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $rg(P) = 3$ et par suite, P est inversible. J'en déduis que cette concaténation est une base de E et j'en conclus que $\mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Im}(f^2) = E$.

Rappel : Formule de changement de bases pour un vecteur ou une famille de vecteurs : Si B et B' sont deux bases de E et $\vec{x} \in E$ et $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E alors

$$mat_{B'}\vec{x} = \underbrace{mat_{B'}B}_{\substack{=matrice\ de \\ passage\ de\ B'\ à\ B.}} \times mat_B\vec{x} \quad \text{et} \quad mat_{B'}\mathscr{F} = \underbrace{mat_{B'}B}_{\substack{=matrice\ de \\ passage\ de\ B'\ à\ B.}} \times mat_B\mathscr{F}$$

Théorème de formule de changement de bases pour les applicatinos linéaires Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Soit B_1 et $B_1{}'$ deux bases de l'espace vectoriel E et B_2 et $B_2{}'$ deux bases de l'espace vectoriel F.

Soit $M = mat_{B_1,B_2}(f)$ et $M' = mat_{B_1',B_2'}(f)$

Soit $P = mat_{B_1}B_1'$ la matrice de passage de B_1 à $B_1{}'$ et $Q = mat_{B_2}B_2'$ la matrice de passage de B_2 à B_2'.

Alors, $mat_{B_1',B_2'}(f) = mat_{B_2'}B_2 \times mat_{B_1,B_2}(f) \times mat_{B_1}B_1'$ ie. $M' = Q^{-1}MP$.

Cas d'un endomorphisme Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit B et B' deux bases de l'espace vectoriel E. Soit $P = mat_B B'$ la matrice de passage de B à B'.

Soit $M = mat_B(f)$ et $M' = mat_{B'}(f)$.

Alors, $mat_{B'}(f) = mat_{B'}B \times mat_B(f) \times mat_B B'$ ie. $M' = P^{-1}MP$.

Def. M et M' sont semblables lorsqu'il existe une matrice P inversible telle que $M' = P^{-1}MP$.

M et M' sont semblables sietssi M et M' sont deux matrices d'un même endomorphisme .

Exo : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire les puissances de A .

Théo : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, B une base de E et $M = mat_B(f)$.

1. f est une projection vectorielle$\Leftrightarrow M^2 = M \Leftrightarrow$ il existe une base B' de E telle que $mat_{B'}(f) = diag(\underbrace{1,..,1}_{r=rg(p)}, 0,..,0)$.

Dans ce cas, $Im(f)$ est l'espace engendré par les r premiers vecteurs de B' d'image non nulle et $Ker(f)$ est l'espace engendré par les autres vecteurs de B', ceux d'image nulle.

2. f est une symétrie vectorielle$\Leftrightarrow M^2 = I \Leftrightarrow$ il existe une base B' de E telle que $mat_{B'}(f) = diag(\underbrace{1,..,1}_{r=rg(p)}, -1,..,-1)$.

Dans ce cas, $Ker(f - id_E)$ est l'espace engendré par les r premiers vecteurs de B' et $Ker(f + id_E)$ est l'espace engendré par les autres vecteurs de B'.

Exo Soient $S = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. On pose $P = S + Q$

1) Reconnaitre les endomorphismes $s\ et\ q$ de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à $S\ et\ Q$.
2) Déterminer une base B dans laquelle $mat_B(s)\ et\ mat_B(q)$ sont diagonales.
3) Qui est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{p}$ canoniquement associé à $\boldsymbol{P}$?
4) Montrer que pour tout entier naturel n et pour tous réels $a\ et\ b$, $(ap + bq)^n = a^n p + b^n q$.
5) Montrer que : $ap + bq$ est un automorphisme si et ssi $a\ et\ b$ sont non nuls. Déterminer $(ap + bq)^{-1}$ le cas échéant.