

TD 20

Matrices d'une application linéaire .

Ex 0 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que f^2 est combinaison linéaire de f et $id_{\mathbb{R}_2[X]}$. En déduire f^n tq $n \in \mathbb{N}$.

Ex 1 Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) f est-il un automorphisme ? Si oui, déterminer f^{-1} .

2) Montrer que $\ker(f - 4id_{\mathbb{R}^3})^2 \oplus \ker(f - 2id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$

3) Montrer qu'il existe une base $B' = (u, v, w)$ de \mathbb{R}^3 telle que : $A' = mat_{B'} f = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4) En déduire A^n tq $n \in \mathbb{N}$.

Ex 2 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 3 & a & 2 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$ où a est un paramètre réel.

a. Décrire $f((x, y, z))$.

b. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f est surjective.

c. Déterminer le noyau et l'image de f lorsque f n'est pas bijective.

Ex 3 Soit E un K -e-v de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $rg(f) = 1$.

1) Justifier qu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f a ses deux premières colonnes nulles.

2) Montrer qu'il existe $a \in K$ tq : $f^2 = af$.

Ex 4 Soit a_1, a_2, \dots, a_n des réels et $\varphi: \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}_n \\ P \mapsto (\tilde{P}(a_1), \tilde{P}(a_2), \dots, \tilde{P}(a_n)) \end{pmatrix}$ et $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ le déterminant de

de Vandermonde associé à a_1, a_2, \dots, a_n

a) Montrer que φ est un isomorphisme si et ssi a_1, a_2, \dots, a_n sont tous distincts.

b) Désormais a_1, a_2, \dots, a_n sont tous distincts. On pose $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$. Montrer que $B = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c) Quelles sont les composantes dans B d'un polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?

d) En déduire la matrice de passage de B à B_c la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

e) Montrer que $V(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$ si et ssi a_1, a_2, \dots, a_n sont tous distincts.

Ex 5 Soient $f_1: (x \mapsto e^{-x}), f_2: (x \mapsto xe^{-x}), f_3: (x \mapsto x^2e^{-x})$ et E le sous espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par ces trois applications. $\forall f \in E$, on pose $\varphi(f) = f'$.

1. Déterminer $\dim E$. On note $B = (f_1, f_2, f_3)$.

2. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Ecrire la matrice A de φ dans B .

3. Calculer $A^n, n \in \mathbb{N}$.

4. En déduire, pour tout entier n , la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $g: (x \mapsto (3 - 2x + 8x^2)e^{-x})$.

5. $\forall f \in E$, on pose $\Gamma(f) = f + f'$. Justifier que Γ est un endomorphisme de E et donner une base de $\ker \Gamma$ et $\text{Im} \Gamma$.

6. Soit $h: (x \mapsto (2 + 2x)e^{-x})$. Trouver les solutions de l'équation $f' + f = h$.

Ex 6 Soit E le \mathbb{R} -e.v. des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_n$.

1. On pose $\forall u \in E, \Phi(u) = (u_0, u_1, u_2)$. Montrer que Φ est une bijection de E sur \mathbb{R}^3 . En déduire la dimension de E .

2. On pose $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \varepsilon_i = \Phi^{-1}(e_i)$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Justifier que $B = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E et expliciter les suites $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

3. Soit d l'application définie sur E par : $\forall u \in E, d(u) = w$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_{n+1}$.

3.a. Montrer que $d \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer la matrice de d dans B .

3.b. Calculer d^k tel que $k \in \mathbb{N}$. En déduire que d est un automorphisme de E et exprimer d^{-1} en fonction de d .

3.c. Déterminer $D = \ker(d - Id_E)$.

3.d. Soit $F = \text{vect}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)$. Montrer que $F \oplus D = E$.

3.e. Montrer que F est stable par d .

4.d. Justifier qu'il existe une base B' de E telle que $mat_{B'}d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Ex 7 Soit $Q_k = (X + 1)^k(X - 2)^{n-k}$ et f l'application définie par : $f(P) = (X - 2)P' - P$

1. Montrer que $B' = (Q_k)_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer les matrices de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}_n[X]$ et dans B' .
4. Quelle relation y a-t-il entre ces matrices ?
5. Décrire $Ker f$ et $Im f$.

Ex 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 canoniquement associé à A .

1. Déterminer $Ker f$, $Im f$ et $rg f$.
2. Montrer que $Ker(f^2)$ et $Ker(f - id)^2$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^4 .
3. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i.e. qu'il existe P inversible telle que $A = P^{-1}TP$.
4. En déduire les puissances de A .

Ex 9 Soit E un K-e_v de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que : $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E

dans laquelle la matrice de f est $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **Application :** Montrer que $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Ex 10 Matrices semblables Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrons par deux méthodes que A et B sont semblables.

1^{ère} méthode : Montrer que A et B sont deux matrices d'une même endomorphisme de \mathbb{R}^2 .

2^{ème} méthode : Soit $X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ tq X non nulle. On pose $Y = AX$, $Z = AY$ et $P = (X \ Y)$.

1. Ecrire Z comme combinaison linéaire de X et Y .
2. En déduire que $AP = PB$ et conclure.

Ex 11 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ fixé et $\varphi : (P \mapsto (X - a)(P'(X) - P'(a)) - 2(P(X) - P(a)))$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E et écrire sa matrice dans la base canonique de E puis sa matrice dans la base de Taylor $B = (1, (X - a), (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$.
2. Quelle relation y a-t-il entre ces deux matrices ?
3. Déterminer le noyau et l'image de φ et le rang de φ .

Ex 12 Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ tel que $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \Phi(X^k) = X^{n-k}$. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. et $f : (P \mapsto P')$.

1. Montrer que Φ est une involution. Décrire ses éléments caractéristiques.
2. En déduire que Φ est bijective et décrire Φ^{-1} .
3. Posons $g = \Phi \circ f \circ \Phi$. Déterminer la matrice A de g dans B
4. Posons $h = g + f$. Montrer que : $\forall P \in E, h(P) = nXP - (X^2 - 1)P'$
5. Justifier que $C = ((X - 1)^k(X + 1)^{n-k})_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la matrice de h dans cette base.
- 6.

Ex 13 Soit $u : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z) \end{pmatrix}$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
2. Démontrer que : $Ker(u - \lambda id)$ contient un vecteur non nul **si et ssi** $\lambda \in \{0, 3\}$.
3. Justifier que $Ker(u)$ et $Ker(u - 3id)$ sont supplémentaires dans E .
4. En déduire que u est la composée de deux endomorphismes simples.

Ex 14 Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base d'un K-e_v E et $D = \{4a\vec{j} + a\vec{k} / a \in \mathbb{R}\}$ et $P = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} / a + b + c = 0\}$.

Soit p la projection sur D et parallèlement à P et s la symétrie par rapport à P et parallèlement à D .

1. Ecrire la matrice de p dans une base bien choisie de telle sorte que cette matrice soit diagonale.
2. Puis écrire la matrice de p dans B puis celle de s dans cette même base.

Ex 15 Justifier que toute matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle est nilpotente.

Ex 16 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n telle que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, |a_{ij}| < \frac{1}{n}$.

Démontrer par l'absurde que la matrice $I_n + A$ est inversible. (introduire l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A)

Ex 17 $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = P(X + 1)$.

- Justifier que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer M la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et M^{-1} .
- Soit $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ des réels tels que : $b_p = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} a_j$. Exprimer a_0, \dots, a_n en fonction de b_0, \dots, b_n .

Ex 18 Soit $A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & a \binom{1}{0} & a^2 \binom{2}{0} & \dots & a^n \binom{n}{0} \\ 0 & -\binom{1}{1} & -a \binom{2}{1} & \dots & -a^{n-1} \binom{n}{1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^n \binom{n}{n} \end{pmatrix}$. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Ex 19 Soit E de dimension finie n . Soit u un endomorphisme de E tel que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$ i.e. u est nilpotent d'indice n .

- Montrer qu'il existe un vecteur \vec{x} de E tel que : $B = (\vec{x}, u(\vec{x}), u^2(\vec{x}), \dots, u^{n-1}(\vec{x}))$ base de E .
- Ecrire les matrices de u, u^2, \dots, u^{n-1} dans la base B .
- En déduire que $\{g \in L(E) / u \circ g = g \circ u\} = \text{vect}(Id, u, u^2, \dots, u^{n-1})$.

Ex 20 soit E un K-e-v de dimension 3.

- Soit u un endomorphisme de E et soient i et j deux entiers naturels.
On considère l'application w de $\text{Ker}(u^{i+j})$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.
 - Montrer que $\text{Im}(w) \subset \text{Ker}(u^i)$.
 - En déduire que $\dim(\text{Ker}(u^{i+j})) \leq \dim(\text{Ker}(u^i)) + \dim(\text{Ker}(u^j))$
- Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\text{rg}(u) = 2$
 - Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^2)) = 2$ (on pourra utiliser deux fois la question 2b.)
 - Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$ et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E .
 - Ecrire la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.
- Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\text{rg}(u) = 1$
 - Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$
 - Justifier l'existence d'un vecteur c de $\text{Ker}(u)$ tel que $(u(b), c)$ soit libre puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E .
 - Ecrire la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Ex 21 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f définie sur E par $f(P) = \frac{1}{2} \left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right)$.

On note $f^0 = id_E$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*, f^m = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{m \text{ fois}}$. On note $B = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

- Vérifier que f est un endomorphisme de E .
- Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer $\deg(f(X^k))$ et $\text{codom}(f(X^k))$. La matrice M de f dans B est-elle triangulaire ? diagonale ? Préciser sa diagonale.
- Démontrer que f est un automorphisme de E .
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\text{Ker}(f - \lambda id) \neq \{0\}$ si et ssi $\lambda \in \{\frac{1}{2^k} / k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.
- Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et Q_k un polynôme non nul de $\text{Ker}(f - \frac{1}{2^k} id)$, c'est-à-dire : $Q_k \neq 0$ et $f(Q_k) = \frac{1}{2^k} Q_k$.
 - Démontrer que : $\deg(Q_k) = k$.
 - Démontrer que si $k \neq 0$ alors $\int_0^1 \widetilde{Q}_k(t) dt = 0$.
- Montrer que la famille $B' = (Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ est une base de E . Désormais on prendra $Q_0(X) = 1$.
- Ecrire la matrice D de f dans cette base B' . Quelle relation y-a-t-il entre D et M ?
- Soit $P \in E$, de composantes (a_0, a_1, \dots, a_n) dans B' .
 - Soit $m \in \mathbb{N}$. Décrire matriciellement f^m et exprimer $f^m(P)$ en fonction de $a_0, a_1, \dots, a_n, Q_0, Q_1, \dots, Q_n$.
 - En déduire que : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \widetilde{f^m(P)}(1) = a_0 = \int_0^1 \widetilde{P}(t) dt$ (n étant fixé).
- Soit $P \in E$. Démontrer par récurrence sur m que : $\forall m \in \mathbb{N}, f^m(P) = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{2^m-1} P\left(\frac{X+k}{2^m}\right)$.
- Redémontrer alors grâce au cours d'intégration que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \widetilde{f^m(P)}(1) = \int_0^1 \widetilde{P}(t) dt$.