Séries réelles ou complexes .

I Généralités

1Définition : Soit une suite (u_n) de nombres réels ou complexes.
- La **série de terme général u_n** est la suite $(S_n)_n$ définie par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
- La série de terme général u_n est notée $\sum_{n\geq 0} \boldsymbol{u_n}$ **ou** $\sum \boldsymbol{u_n}$.
- Pour chaque entier n , S_n est appelée **somme partielle** de rang n de la série $\sum_{n\geq 0} \boldsymbol{u_n}$.
- On dit que **la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge** (resp. diverge) lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (resp. diverge).
- Etudier La nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$, c'est étudier son caractère divergent ou convergent.

2Définition Lorsque la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, la limite finie de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ou $\sum_{p=0}^{+\infty} u_p$ et est appelée **la somme** de la série et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n$ est le **reste de rang n** .

3Remarque : il arrive que la suite u ne soit définie qu'à partir d'un certain rang n_0. Alors $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et la série de terme général u_n est notée $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et si elle existe, sa somme est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

4Exemple : On pose $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+5)}$. Montrons que $\sum u_n$ converge et déterminons sa somme.

5Condition nécessaire de convergence : $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. La réciproque est fausse.

6 NB Pour que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge , **il faut** que (u_n) tende vers 0 mais **cela ne suffit pas** comme le prouve la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

7Définition : Lorsque la suite (u_n) ne tend pas vers 0 alors on dit que (S_n) est grossièrement divergente .

8Exemple : pour quelles valeurs du réel a, la série $\sum_{n\geq 1} a^n(\ln(n+1) - \ln(n))$ diverge-t-elle grossièrement ?

II Opérations

9Théorème : Soit une suite (u_n) de nombres complexes. On pose $a_n = Re(u_n)$ et $b_n = Im(u_n)$.

$\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ convergent.

Et le cas échéant, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ i.e. $Re(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} Re(u_n)$ et $\mathrm{Im}(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} Im(u_n)$.

10Propriétés : Soit u et v deux suites complexes.
1. Si u et v sont deux suites telles qu' à partir d'un certain rang, $u_n = v_n$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature. Par contre, leurs sommes, si elles existent, ne sont pas égales.
2. $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} \overline{u_n}$ sont de même nature. Et le cas échéant, $\overline{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{v_n}$.
3. Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} au_n$ sont de même nature et le cas échéant, $\sum_{n=0}^{+\infty} au_n = a\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
4. Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent alors pour tous complexes a et b, alors $\sum_{n\geq 0} au_n + bv_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} au_n + bv_n = a\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + b\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
5. Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ diverge.

III Séries particulières

11Séries géométriques (complexes ou réelles): Soit $a \in \mathbb{C}$. La série de terme général a^n , $\sum a^n$,est dite série géométrique de raison a. La série géométrique $\sum a^n$ converge **si et seulement si** $|a| < 1$. Et $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ si $|a| < 1$.

.

12Séries de Taylor (complexes ou réelles) Soit f est de classe C^∞ sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs complexes ou réelles .
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un réel M_n tel que, $\forall x \in [a,b]$, $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ et $\lim_{n\to+\infty} M_n \frac{|b-a|^n}{n!} = 0$

alors la série de Taylor de terme général $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n = f(b)$.

13Exemples : Justifier que les séries suivantes convergent et déterminer leur somme $\sum \frac{a^n}{n!}$, $\sum \frac{a^{2n}}{2n!}$ et $\sum \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

14Une série complexe (ou reélle) particulière : Pour tout complexe z, la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

15Séries de Riemann (séries réelles). La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge **sietssi** $\alpha > 1$.

16Deux séries de Riemann particulières déjà étudiées :

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge et* $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.
- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et* $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

IV Séries réelles et à termes positifs

On considère une suite u réelle et pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

**ou seulement à partir d'un certain rang

17Prop : Si $\boldsymbol{u}$ **est positive** (**), alors

1. la suite $(S_n)_{\in\mathbb{N}}$ est croissante (**)
2. $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge sietssi $(S_n)_{\in\mathbb{N}}$ est majorée
3. Et le cas échéant, $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

18NB : si la suite (u_n) est négative à partir d'un certain rang, alors la suite $-u_n$est positive et on pourra appliquer les résultats suivants à la série de terme général $-u_n$ puis en déduire la nature de la série de terme général u_n.

19Théorème de comparaison (1): Soit u et v deux suites réelles telles que : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}}$ **(**),** $\boldsymbol{0 \leq u_n \leq v_n}$ **.**

1. $\sum_{n\geq 0} v_n$converge $\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge$\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} v_n$diverge .

20Exemples : Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \sin(e^{-n})$?

21Théorème de comparaison (2): Soit u et v deux suites réelles **positives** (**) telles que : $\boldsymbol{u_n = O(v_n)}$ **ou** $\boldsymbol{u_n \sim v_n}$ **ou** $\boldsymbol{u_n = o(v_n)}$

1. $\sum_{n\geq 0} v_n$converge $\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge$\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} v_n$diverge .

22Exemples :

1) Montrons que la série de terme général $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ est convergente.
2) Montrons que la série $\sum \int_n^{2n} \frac{dt}{1+t^{\frac{3}{2}}}$ diverge.
3) pour quelles valeurs du réel a, la série $\sum_{n\geq 1} n^2 x^n$ converge-t-elle ?

23En pratique : Le plus souvent, on compare $\boldsymbol{u_n}$ avec une suite géométrique réelle $\boldsymbol{a^n}$ ou une suite de Riemann $\boldsymbol{\frac{1}{n^\alpha}}$

- $\forall n \geq n_0, u_n \geq 0$ et $u_n \underbrace{= o}_{ou\, \sim} (a^n)$ avec $a \in]-1;1[\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- $\forall n \geq n_0, u_n \geq 0$ et $u_n \underbrace{= o}_{ou\, \sim} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$converge.
- $\forall n \geq n_0, u_n \geq 0$ et $a^n \underbrace{= o}_{ou\, \sim} (u_n)$ avec $a \geq 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.
- $\forall n \geq n_0, u_n \geq 0$ et $\frac{1}{n^\alpha} \underbrace{= o}_{ou\, \sim} (u_n)$ avec $\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$diverge.

24Exemple : Etudier la nature des séries suivantes : $\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{n}}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1+a^n}{n^2}$ où $a > 0$, $\sum_{n\geq 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^3}$ . .

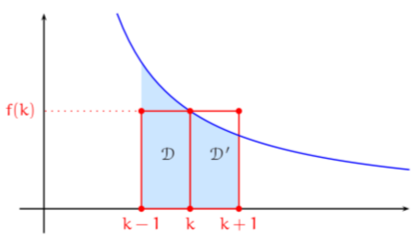
25Théorème : Si la suite (u_n) est de signe constant (**) et $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

26Exemples : Etudier la nature des séries suivantes $\sum_{n\geq 1} 1 - \cos\left(\frac{1}{n^a}\right)$ -où $a \in \mathbb{R}^+-$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \ln(n) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

V Comparaison série-intégrale

30 Théorème Soit f une fonction **continue et décroissante et positive** sur $[n_0, +\infty[$. Posons $I_n = \int_{n_0}^{n} f(t)dt$ et $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$

1. $\forall n \geq n_0, I_{n+1} \leq S_n \leq I_n$.
2. la série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge $\Longleftrightarrow$ la suite (I_n) converge.



31Exemples : Etude de la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ où $\beta > 1$ *et* $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$.

32Application à l'étude de la nature des Séries de Riemann

VI Séries absolument convergentes

33Définition : La série de terme général u_n est absolument convergente lorsque la série de terme général $|u_n|$ est convergente
On note alors $\sum_{n\geq 0}|u_n| < +\infty$.

34Théorème : Si la série de terme général u_n est absolument convergente alors la série de terme général u_n est convergente et $|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty}|u_k|$.

35NB : la réciproque est fausse. Contre-exemple : $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n} CV$ mais $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} DV$ donc $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$n' est pas absolument convergente.

36Exemples :

1) Etudier la nature des séries $\sum_{n\geq 0}\sin(\pi\sqrt[3]{n^3+1})$ et $\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(n)}{n^{\frac{11}{10}}+\cos(n)}$.
2) Montrer que $\varphi: ((P,Q) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)Q(n)e^{-n})$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

VII Lien suite- serie. Séries télescopiques.

27Prop : La suite (u_n) converge **sietssi** la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

28Exemples : Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k)}$.

1. Montrer que la suite u converge. On note ℓ sa limite.
2. Montrer que si $\ell \neq 0$ alors $u_{n+1} - u_n \sim \frac{\alpha\,\ell}{n}$.
3. En déduire que $\ell = 0$.

29Séries télescopiques ….

Exemples Calculer les sommes suivantes après avoir justifié de leur existence ($x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$)

$S = \sum_{n=0}^{\infty} Arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$, $S = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+3n^2+2n}$, $S = \sum_{n=2}^{\infty} ln\left(\frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4+2n^3}\right)$, $S = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} th(2^{-n}x)$, $S(p) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{n+p}{n}}$.