

PARITÉ ET PERIODICITÉ. RÉDUCTION DU DOMAINE D'ÉTUDE.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $Df = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\}$ et $Cf = \{M(x, f(x)) / x \in Df\}$
 $x \in Df \Leftrightarrow f(x) \text{ est défini.}$

$$M(x, y) \in Cf \Leftrightarrow x \in Df \text{ et } y = f(x). (**)$$

Def : f est **paire** lorsque $\forall x \in Df, (-x \in Df \text{ et } f(-x) = f(x))$, cela signifie que Cf est symétrique par rapport à (Oy) .

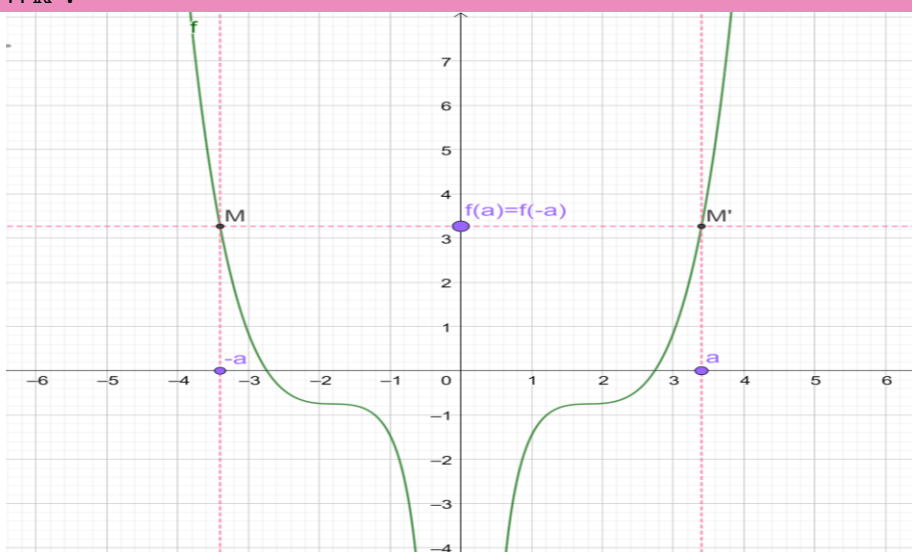
En effet, tout d'abord, pour tout point $M(a, b)$, on note M' le symétrique de M par rapport à (Oy) et $(-a, b)$ sont les coordonnées de M' . Alors pour tout $x \in Df, M(x, f(x)) \in Cf$ et $M'(-x, f(x))$ est le symétrique de M par rapport à (Oy) .

Par conséquent, Cf est symétrique par rapport à $(Oy) \Leftrightarrow \forall M \in Cf, M' \in Cf \Leftrightarrow \forall x \in Df, -x \in Df \text{ et } f(x) = f(-x)$.
*dr'après (**)*

NB : une fonction dont le domaine de définition n'est pas centré en 0 (i.e. $\forall x \in Df, -x \in Df$) ne peut pas être paire.

Ex : Si $Df = [1, 2[$ alors f n'est pas paire.

Conséquence : Si f est paire alors je peux étudier f sur $Df \cap \mathbb{R}^+$ puis déduire de la symétrie de Cf par rapport à (Oy) l'étude de f sur $Df \cap \mathbb{R}^-$.



Def : f est **impaire** lorsque $\forall x \in Df, -x \in Df \text{ et } f(-x) = -f(x)$ i.e. Cf est symétrique par rapport à O .

En effet, tout d'abord, pour tout point $M(a, b)$, on note M' le symétrique de M par rapport à O et $(-a, -b)$ sont les coordonnées de M' . Alors pour tout $x \in Df, M(x, f(x)) \in Cf$ et $M'(-x, -f(x))$ est le symétrique de M par rapport à O .

Par conséquent,

Cf est symétrique par rapport à $(Oy) \Leftrightarrow \forall M \in Cf, M' \in Cf \Leftrightarrow \forall x \in Df, -x \in Df \text{ et } -f(x) = f(-x)$.
*dr'après (**)*

NB : une fonction dont le domaine de définition n'est pas centré en 0 (i.e. $\forall x \in Df, -x \in Df$) ne peut pas être impaire.

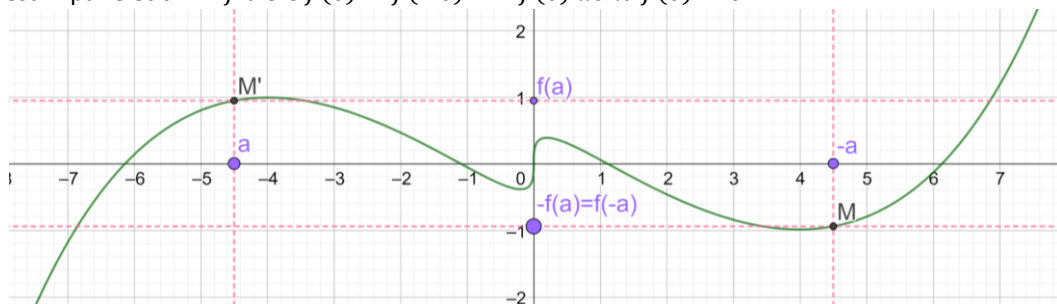
Ex : Si $Df =]-\infty, 5]$ alors f n'est ni paire, ni impaire (puisque $-6 \in Df$ mais $6 \notin Df$)

Conséquences :

1) Si f est impaire alors je peux étudier f sur $Df \cap \mathbb{R}^+$ puis déduire de la symétrie de Cf par rapport à O l'étude de f sur $Df \cap \mathbb{R}^-$.

2) Si f est impaire et $0 \in Df$ alors $f(0) = 0$

En effet, si f est impaire et $0 \in Df$ alors $f(0) = f(-0) = -f(0)$ donc $f(0) = 0$.

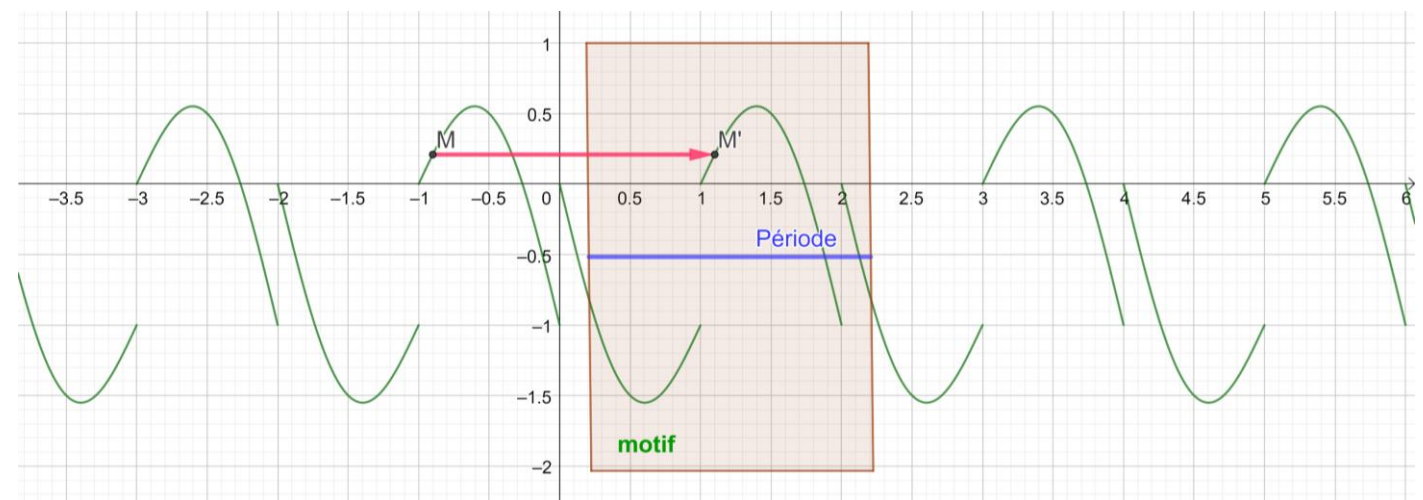
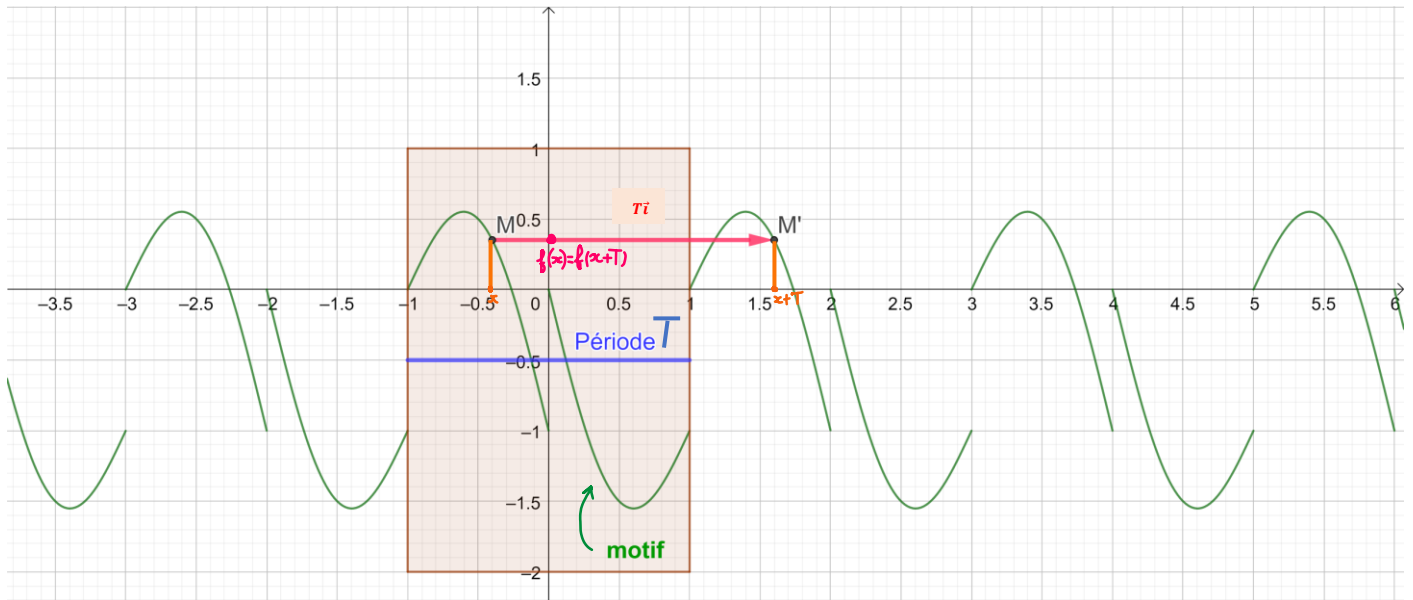


Def : f est périodique lorsqu'il existe un réel T strictement positif tel que $\forall x \in Df, x + T \in Df$ et $f(x + T) = f(x)$. On dit alors que f est T -périodique et T est une période de f ; cela signifie que si $a \in Df$ alors le motif de Cf obtenu entre $[a, a + T[$ sera le même sur $[a + T, a + 2T[$, sur $[a + 2T, a + 3T[$; autrement dit que Cf est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

En effet, pour tout point $M(a, b)$, on note M' le point du plan tel que $\overrightarrow{MM'} = T\vec{i}$, alors $(a + T, b)$ sont les coordonnées de M' .

Donc, si $x \in Df$, alors $M(x, f(x)) \in Cf$ et $M'(x + T, f(x))$ vérifie $\overrightarrow{MM'} = T\vec{i}$. Par conséquent,

Cf est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i} \Leftrightarrow \forall M \in Cf, M' \in Cf \Leftrightarrow \forall x \in Df, M'(x + T, f(x)) \in Cf \Leftrightarrow \forall x \in Df, x + T \in Df$ et $f(x + T) = f(x)$



Propriétés : Si f est périodique de période T alors $\forall x \in Df, \forall n \in \mathbb{N}, (x + nT \in Df, f(x + nT) = f(x))$ et Cf est invariante par toute translation de vecteur $nT\vec{i}$ telle que $n \in \mathbb{N}$

Démontrons ce résultat par récurrence. Soit f une fonction périodique de période T . Posons $H(n)$: " $\forall x \in Df, x + nT \in Df, f(x + nT) = f(x)$ ".

Init : par définition, f étant T -périodique, $H(1)$ est vraie.

Propag : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je suppose $H(n)$ vraie et sous cette hypothèse, montrons que $H(n + 1)$ est vraie.

Soit $x \in Df$. $x + nT \in Df$ (car $H(n)$ vraie). Donc $(x + nT) + T \in Df$ (car f est T -périodique). Ainsi, $x + (n + 1)T \in Df$.

De plus, $f(x + nT + T) = f(x + nT)$ (car f est T -périodique) et $f(x + nT) = f(x)$ (car $H(n)$ vraie). Ainsi, $f(x + nT + T) = f(x)$. Donc $H(n) \Rightarrow H(n + 1)$.

CCL : le théorème de récurrence assure alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Df, x + nT \in Df, f(x + nT) = f(x)$.

RQUE: En général, Df va de $-\infty$ à $+\infty$ et $\forall x \in Df, x + T \in Df$ et $x - T \in Df$ et $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$ et cela a pour conséquence que $\forall x \in Df, \forall k \in \mathbb{Z}, (x + kT \in Df, f(x + kT) = f(x))$ et le motif de Cf obtenu sur le domaine $[0, T[\cap Df$ se répètera à l'infini sur tous les intervalles $[kT, (k + 1)T[\cap Df$ pour constituer Cf .

Conséquence : Si Df va de $-\infty$ à $+\infty$ et f est T -périodique alors je vais étudier f sur $[0, T[\cap Df$ ou $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[\cap Df$ puis translater le motif obtenu sur tous les intervalles $[kT, (k + 1)T[\cap Df$ ou $[-\frac{T}{2} + kT, \frac{T}{2} + kT[\cap Df$ tels que $k \in \mathbb{Z}$.