METHODES CHAPITRE 4 Nombres complexes

TROUVER LA FORME QUASI-TRIGONOMETRIQUE OU TRIGO D'UN COMPLEXE z

✓ **Si $z = a$** alors $z = \begin{cases} |a|e^{i0} \ si \ a > 0 \\ |a|e^{i\pi} \ si \ a < 0 \end{cases}$

✓ **Si $z = bi$** alors $z = \begin{cases} |b|e^{i\frac{\pi}{2}} \ si \ b > 0 \\ |b|e^{-i\frac{\pi}{2}} \ si \ b < 0 \end{cases}$

✓ **Si $z = a + ib$** alors

1. Mettre en facteur $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ dans z.
2. Reconnaitre ou trouver θ tel que $cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \ et \ sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $(\ donc \ tan(\theta) = \frac{b}{a} \ si \ a \neq 0)$
3. Ecrire le second facteur sous la forme d'une exponentielle imaginaire.

✓ **Si $z = e^{i\alpha} \pm e^{i\beta}$** alors

1. Mettre en facteur $e^{i\beta}$.
2. Appliquer l'une des identités du Losange ↬ $e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \ et \ e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}$.

✓ **Si $z = \left(\frac{w}{w'}\right)^n$ $ou \ z = ww'$ où $w, w' \in \mathbb{C}$.**

1. Mettre $w \ et \ w'$ sous forme quasi-trigo $w = xe^{i\theta} \ et \ w' = x'e^{i\theta'}$
2. Regrouper les facteurs réels ensemble et les facteurs exponentielles imaginaires ensemble .
3. On applique les règles de calcul sur le exponentielles imaginaires ↬ $e^{i\theta} \ e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \ et \ \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

   (alors $ww' = xx'e^{i\theta} \ e^{i\theta'} = xx'e^{i(\theta+\theta')}$ $\frac{w}{w'} = \frac{xe^{i\theta}}{x'e^{i\theta'}} = \frac{x}{x'}e^{i(\theta-\theta')}$)

✓ **Si $z = (w)^n$ où $w \in \mathbb{C}$ $et \ n \in \mathbb{N}$ alors**

1. Mettre w sous forme quasi-trigo $w = xe^{i\theta}$
2. « Distribuer » la puissance n sur x et $e^{i\theta}$ $(w^n = x^n\left(e^{i\theta}\right)^n)$
3. Appliquer Moivre ↬$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

TD 4 Ex 2

LINEARISER une expression trigonométrique

✓ **Utiliser une des formules de trigo** suivantes :

$sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

$cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

TD 3 Ex 22

OU BIEN

✓ **Par les complexes** : faire dans l'ordre :

1. Appliquer Euler pour remplacer chaque cos et sin par des exponentielles ↬ $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \ et \ \sin(\theta) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$.
2. Tout développer avec éventuellement la formule du binôme de Newton. ↬$(z+w)^N = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}z^k w^{N-k}$.
3. Regrouper les exponentielles imaginaires dont les arguments sont opposés (les coefficients de $e^{i\theta}$ et celui de $e^{-i\theta}$ doivent être égaux ou opposés …. Sinon erreur !)
4. Réappliquer Euler pour refaire apparaitre des sinus ou cosinus ↬ $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \ et \ e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta) . e^{i\theta}$

APPLICATION au calcul d'intégrales de fonctions qui sont des produits de sinus et cosinus

TD 4 Ex 14

EXPRIMER $cos(nx)$ COMME UN POLYNÖME en $cos(x)$ ou $sin(nx)$ COMME UN POLYNÖME en $sin(x)$ (ou produit de $cos(x)$ et d'un polynôme en $sin(x)$)

✓ **Si n est petit** alors

1. Ecrire $cos(nx) = \cos\big((n-1)x + x\big)$
2. Utiliser les formules de trigonométrie :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \ \ et \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(2a) = 2cos^2(a) - 1 = 1 - 2sin^2(a) \ et \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\sin^2(a) = 1 - cos^2(a) \ ou \ cos^2(a) = 1 - sin^2(a)$$

TD 3 Ex 23

✓ Pour **toute valeur de n,**

1. $cos(nx) = Re\left(e^{inx}\right) \overset{Moivre}{\triangleq} Re\left(\left(e^{ix}\right)^n\right) = Re((cos(x) + isin(x))^n)$ et $sin(nx) = Im((cos(x) + isin(x))^n)$

↬Moivre : $\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx}$ $i.e.$ $(cos(x) + isin(x))^n = cos(nx) + isin(nx)$.

2. Obtenir la forme algébrique $(cos(x) + isin(x))^n$ par une autre méthode :

$$(cos(x) + isin(x))^n \overset{FBN}{\triangleq} \ldots.. \overset{\substack{séparer \\ k\ pair \\ et\ k\ impair}}{\triangleq} \ldots\ldots \overset{\substack{poser\ le\ cas\ échéant \\ k=2p \\ et\ k=2p+1}}{\triangleq} \ldots.. \overset{\substack{(-i)^{2p}=(-1)^p \\ (-i)^{2p+1}=i(-1)^p}}{\triangleq} \ldots\ldots \overset{\substack{mettre\ i\ en \\ facteur \\ dans\ la\ deuxième \\ somme}}{\triangleq} \ldots\ldots. \overset{\substack{mettre\ en\ évidence \\ la\ partie\ réelle\ et \\ la\ partie\ imaginaire}}{\triangleq} \ldots.....$$

3. Identifier parties réelle et imaginaire avec $cos(nx) \ et \ sin(nx)$ et conclure

TD 4 Ex 12

OBTENIR les racines $n^{ièmes}$ d'un complexe a non nul où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Trouver une racine $n^{ième}$ z_0 de a particulière :
   - Chercher une racine nième évidente
   - Ecrire a sous forme trigo : $a = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   - En déduire une racine $n^{ième}$ particulière : $z_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}} = r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta}{n}}$
2. Multiplier cette racine $n^{ième}$ z_0 par les n racines $n^{ièmes}$ de l'unité $\hookrightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in [\![0, n-1]\!]$

CHAP 4 Ex 92
TD 5 Ex 3

OBTENIR les racines $2^{ièmes}$ d'un complexe a non nul où $n \in \mathbb{N}^*$.

- ✓ Chercher une racine $2^{ième}$ évidente. L'opposé de cette racine carrée évidente est l'autre racine carrée de a.
- ✓ Si a a une forme trigonométrique sympa alors appliquer la méthode précédente. $\hookrightarrow$1 et -1 sont les racines carrées complexes de l'unité.
- ✓ Si a n'a pas une forme trigonométrique sympa, alors chercher $z = x + iy$ tel que : $z^2 = a$.
  1. Rajouter l'égalité des modules : $z^2 = a \Leftrightarrow (S)\begin{cases} z^2 = a \\ |z|^2 = |a| \end{cases}$.
  2. Identifier parties réelle et imaginaire dans l'équation $z^2 = a$.
  3. Résoudre le système (S) : • trouver x^2 et y^2 grâce aux relations $\begin{cases} x^2 - y^2 = Re(a) \\ x^2 + y^2 = |a| \end{cases}$.
     • choisir le signe de x et y en fonction de $2xy = Im(a)$.

CHAP 4 Ex 66
TD 5 Ex 1

RESOUDRE une équation polynomiale $P(z) = 0$

- ✓ **Si P est de degré 2**, alors
  1. Chercher une racine évidente z_1 de P.
  2. Déterminer l'autre racine de P : $z_2 = \frac{c}{az_1}$ si $z_1 \neq 0$ et $z_2 = \frac{-b}{a} - z_1$ si $z_1 = 0$.
  3. Conclure .

OU BIEN

Trouver deux complexes z_1 et z_2 tels que $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1z_2 = \frac{c}{a}$.

OU BIEN

1. Calculer $\Delta = b^2 - 4ac$
2. Trouver une racine carrée complexe δ de Δ.
3. Appliquer les formules du cours $\hookrightarrow z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$

CHAP 4 Ex 67bis
TD 5 Ex 2

- ✓ **Si $degP = 3$ ou 4** , alors
  1. Chercher une racine évidente z_1 de P.
  2. Factoriser P par $z - z_1$: chercher l'autre facteur sous forme polynomiale de degré égal à $deg(P) - 1$. Certains coefficients de cet autre facteur sont faciles à deviner : imposer ces valeurs et chercher les autres coefficients.
     Par exemple si $P(z) = 2z^3 + (i+2)z + 1$ alors i est racine de P donc je cherche un complexe b tel que :
     $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - i)(2z^2 + bz + i)$ $i.e.$ $2z^3 + (i+2)z + 1 = 2z + (b - 2i)z^2 + i(1-b)z + 1$. Alors $b = 2i$ convient.

- ✓ **Si $degP \geq 3$** , alors
  1. Reconnaitre dans $P(z)$ une somme particulière
  2. Factoriser pour se ramener à une équation « produit-nul » de la forme $Q(z)T(z) = 0$
  3. Se ramener à la recherche de racines nièmes.

CHAP 4 Ex 93
TD 5 Ex 4

RESOUDRE $e^z = a$ d'inconnue z complexe.

1. Considérer $z = x + iy$ sous forme algébrique
2. Ecrire a sous forme trigonométrique $a = re^{i\theta}$
3. Remplacer z et a par ces expressions dans l'équation : $e^z = a \Leftrightarrow e^xe^{iy} = re^{i\theta}$ $\hookrightarrow si$ $z = x + iy, e^z \overset{def°}{=} e^xe^{iy}$
4. Identifier les modules et arguments modulo 2π. $\hookrightarrow z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \exists k \in \mathbb{Z}/\arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \end{cases}$.
5. Résoudre $e^x = r$ en utilisant ln (autorisé car $e^x et$ r sont réels).

CHAP 4 Ex 64
TD 5 Ex 2

Méthode pour MONTRER QU'UN COMPLEXE z EST REEL

- ✓ Montrer que $Im(z) = 0$
- ✓ Montrer que $z = \bar{z}$.
- ✓ Montrer que $z = 0$ ou $\exists k \in \mathbb{Z}/\arg(z) = k\pi$.
- ✓ Montrer que le point M d'affixe z est sur l'axe réel.

Méthode pour MONTRER QU'UN COMPLEXE z EST IMAGINAIRE PUR

- ✓ Montrer que $Re(z) = 0$
- ✓ Montrer que $z = -\bar{z}$.
- ✓ Montrer que $z = 0$ ou $\exists k \in \mathbb{Z}/\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- ✓ Montrer que le point d'affixe z est sur l'axe imaginaire.

CALCULER DES SOMMES « TRIGONOMETRIQUES «

✓ **Calcul de $\sum_{k=0}^{n} sin(kx)$ ou $\sum_{k=0}^{n} cos(kx)$ avec $\forall k, \beta_k \in \mathbb{R}$ $(**)$**

1. $\sum_{k=0}^{n} sin(kx) \overset{def° \, de \, e^{i\theta}}{\triangleq} \sum_{k=0}^{n} Im(e^{ikx}) \overset{car\, Im(z+z')= Im(z)+Im(z')}{\triangleq} Im(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx})$. Et de même $\sum_{k=0}^{n} cos(kx) = Re(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx})$.
2. Calculer la somme géométrique $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k}_{somme\ géométriques} = \begin{cases} \frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} si\ e^{ix} \neq 1 \\ n+1\ si\ e^{ix} = 1 \end{cases}$. $\hookrightarrow \sum_{k=p}^{N} z^k = \begin{cases} \frac{z^{N-p+1}-1}{z-1} si\ z \neq 1 \\ N-p+1\ si\ z = 1 \end{cases}$
3. Résoudre $e^{ix} = 1$. $\hookrightarrow e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\theta' = \theta + 2k\pi.$
4. Calculer la somme initiale dans le cas $e^{ix} = 1$.
5. Dans le cas $e^{ix} \neq 1$, utiliser les identités du losange pour transformer $\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}$ afin d'obtenir ses parties réelle et imaginaire et conclure sur la somme initiale.

TD 4 Ex 15

✓ **Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \beta_k sin(kx)$ ou $\sum_{k=0}^{n} \beta_k cos(kx)$ avec $\forall k, \beta_k \in \mathbb{R}$ $(**)$**

1. Si $\forall k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} \beta_k sin(kx) \overset{def° \, de \, e^{i\theta}}{\triangleq} \sum_{k=0}^{n} \beta_k Im(e^{ikx}) \overset{car\, \beta_k \in \mathbb{R}}{\triangleq} \sum_{k=0}^{n} Im(\beta_k e^{ikx}) \overset{car\, Im(z+z')= Im(z)+Im(z')}{\triangleq} Im(\sum_{k=0}^{n} \beta_k e^{ikx})$.
   Et de même $\sum_{k=0}^{n} \beta_k cos(kx) = Re(\sum_{k=0}^{n} \beta_k e^{ikx})$ $\hookrightarrow$ si $\beta \in \mathbb{R}$ alors $Re(\beta x) = \beta Re(x)$.
2. $\sum_{k=0}^{n} \beta_k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (e^{ix})^k$
3. Reconnaitre dans $\sum_{k=0}^{n} \beta_k (e^{ix})^k$
   - ➢ une somme géométrique : il faut alors écrire $\beta_k\ sous\ la\ forme\ u.(v^k)$ où u, v constantes réelles.
   - ➢ une somme binomiale : il faut alors écrire $\beta_k\ sous\ la\ forme\ \binom{n}{k}.(v^k)$ où v constante réelle.

✓ **Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \beta_k sin^p(kx)$ ou $\sum_{k=0}^{n} \beta_k cos^p(kx)$ avec $\forall k, \beta_k \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.**

1. Linéariser $sin^p(kx)$ ou $cos^p(kx)$.
2. Remplacer $sin^p(kx)$ ou $cos^p(kx)$ dans la somme par leur forme linéariser
3. Faire apparaitre plusieurs sommes de la forme $(**)$.

RESOUDRE $\frac{az+b}{cz+d} = m$ d'inconnue z complexe (a, b, c, d et m sont des complexes).

1. Je multiplie de part et d'autre part $cz + d$.
2. J'isole tous les termes contenant z d'un côté de l'égalité et tous les autres termes de l'autre côté.
3. Je factorise par z du coté contenant tous les termes avec z.
4. Je divise de part et d'autre par de l'égalité par le facteur devant z en vérifiant préalablement si ce facteur peut s'annuler et e cas échéant , je traite le cas où il s'annule à part avant de diviser…