Corrigé TD 22 Séries numériques

Ex 1 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.Justifier que le série de terme générale $u_n$est convergente et calculer sa somme.

1. $u_n = \frac{5n-4}{n^3+3n^2-n-3}, n \geq 2.$
2. $u_n = nx^n$
3. $u_n = \frac{-2n^2+1}{3^n}$
4. $u_n = 2^{-n}tan(2^{-n}x)$ où $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
5. $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$
6. $u_n = \frac{(-2)^n}{n!}$
7. $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$ où $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
8. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

Ex 2 Déterminer la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \frac{\sin(n)}{n^2 - \cos(n^5)}$
2. $u_n = sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$
3. $u_n = \sin(n)$
4. $u_n = \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$
5. $u_n = \sqrt{ch(n)} - \sqrt{sh(n)}$
6. $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{cos^2(x)}{n^2+\cos^2(x)}dx$
7. $u_n = Arccos\left(\sqrt{\frac{1+n^3}{2+n^3}}\right)$ (indication : démontrer et utiliser l'équivalent : $Arccos(t) \sim_1 \sqrt{2}\sqrt{1-t}$)
8. $u_n = \frac{1}{(n+2)!}\sum_{k=1}^{n} k!$
9. $u_n = \ln\left(\frac{2}{\pi}Arctan\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right)$
10. $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ (où a, b réels)
11. $u_n = \frac{1+a^{\sqrt{n}}}{n^2}\, (tq\ a > 0)$
12. $u_n = \frac{1}{sh\sqrt{\ln(n)}}$
13. $u_n = \frac{1}{\ln(n)\ln(ch(n))}$
14. $u_n = n^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$
15. $u_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln(n)}$
16. $u_n = \ln(n)e^{-\sqrt[5]{n}}$
17. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
18. $u_n = \frac{\ln^n(n)}{n^{\ln(n)}}$
19. $u_n = \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{n^a}$ où $a \in \mathbb{R}$
20. $u_n = \frac{1}{n}e^{-u_{n-1}}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.
21. $u_n = Arctan(n+a) - Arctan(n)$ (utiliser l'IAF)

2. $u_{3n} = sin(n\pi) = 0$, $u_{6n+1} = sin\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) = \frac{1}{2}$. Donc les deux suites extraites $(u_{3n}) et\ (u_{6n+1})$ n'ont pas la même limite ; j'en déduis que u n'a pas de limite. Par conséquent, $\sum u_n$ diverge.

4. $0 < n! < n^n\ donc\ 0 < (n!)^{\frac{1}{n}} < n$ et par conséquent, $u_n = \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} > \frac{1}{n}$. Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, le premier théorème de comparaison permet de conclure que $\sum u_n$ diverge.

5.$u_n = \sqrt{ch(n)} - \sqrt{sh(n)} = \frac{\sqrt{e^n+e^{-n}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{e^n-e^{-n}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{e^n}\sqrt{1+e^{-2n}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{e^n}\sqrt{1-e^{-2n}}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2}}\left[(1+e^{-2n})^{\frac{1}{2}} - (1-e^{-2n})^{\frac{1}{2}}\right]$.

Or, $\lim_{n\to+\infty} e^{-2n} = 0$ et $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o_0(u^2)$.

Donc, $(1+e^{-2n})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}e^{-2n} - \frac{1}{8}(e^{-2n})^2 + o_{+\infty}((e^{-2n})^2)$ et $(1-e^{-2n})^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}e^{-2n} - \frac{1}{8}(e^{-2n})^2 + o_{+\infty}((e^{-2n})^2)$. Par suite, $u_n = \frac{e^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2}}[e^{-2n} + o_{+\infty}((e^{-2n})^2)] \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{-3}{2}}\right)^n$. Comme la série géométrique de raison $e^{\frac{-3}{2}}$est positive et convergente, $\sum \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{-3}{2}}\right)^n$ est convergente et par suite, $\sum u_n$ est convergente.

10. $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} = \sqrt{n}\left[1 + a\sqrt{1+\frac{1}{n}} + b\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right] = \sqrt{n}\left[1 + a\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + b\left(1 + \frac{2}{2n} - \frac{4}{8n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]$

=Tapez une équation ici. $= [1+a+b]\sqrt{n} + \left[\frac{a}{2}+b\right]\frac{1}{\sqrt{n}} + \left[-\frac{a}{8}-\frac{b}{2}\right]\frac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

$Si\ [1+a+b] \neq 0$ alors $u_n \sim [1+a+b]\sqrt{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et par conséquent, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement .

$Si\ [1+a+b] = 0\ et\ \frac{a}{2}+b \neq 0$ alors $u_n \sim \left[\frac{a}{2}+b\right]\frac{1}{\sqrt{n}}$; comme $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann positive et divergente (car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$) , la série $\sum u_n$ diverge.

$Si\ [1+a+b] = 0\ et\ \frac{a}{2}+b = 0\ i.e.\ a = -2\ et\ b = 1$ alors $\left[-\frac{a}{8}-\frac{b}{2}\right] \neq 0\ et\ \ u_n \sim \left[-\frac{a}{8}-\frac{b}{2}\right]\frac{1}{n\sqrt{n}}$; comme $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est une série de Riemann positive et convergente (car $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

Ex 3 <u>En utilisant la méthode de comparaison série-intégrale</u>,

1) Déterminer, en fonction du paramètre réel α, la nature de la série de terme général $u_n = \frac{ln^\alpha(n)}{n}$.

2) Déterminer la partie entière de $\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$

3) Soit $\alpha \in]1;+\infty[$. Déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

4) Montrer que la suite u définie par : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$ converge.

1) Posons $f(x) = \frac{ln^\alpha(x)}{x}$. f est dérivable sur $[2,+\infty[\ et\ \forall x \geq 2, f'(x) = -\frac{ln^\alpha(x)}{x^2} + \frac{\alpha}{x^2}ln^{\alpha-1}(x) = \frac{ln^{\alpha-1}(x)}{x^2}[\alpha - \ln(x)]$.

Donc, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < e^\alpha$. Ainsi, en posant $a = 1 + \lfloor\max(2, e^\alpha)\rfloor$, f est continue, strictement décroissante et positive sur $[a,+\infty[$. Alors le théorème de comparaison série-intégrale assure que :

la série $\sum_{n\geq a} u_n$converge sietssi la suite $\left(\int_a^n f(t)dt\right)_{n\geq a}$converge.

Or, $\int_a^n f(t)dt = \int_a^n \frac{\ln^\alpha(t)}{t}dt \underbrace{=}_{\substack{en\ posant\\ u(t)=\ln(t)}} \int_a^n u'(t)u(t)^\alpha dt = \begin{cases}\left[\frac{u(t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_a^n si\ \alpha \neq -1\\ [\ln(|u(t)|)]_a^n si\ \alpha = -1\end{cases} = \begin{cases}\frac{\ln(n)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\ln(a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} si\ \alpha \neq -1\\ \ln(|ln(n)|) - \ln(|ln(a)|)\ si\ \alpha = -1\end{cases}$.

Si $\alpha > -1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n)^{\alpha+1} = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^n f(t)dt = +\infty$. J'en déduis que la série $\sum_{n\geq a} u_n$ diverge.

Si $\alpha = -1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln|\ln(n)| = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^n f(t)dt = +\infty$. J'en déduis que la série $\sum_{n\geq a} u_n$ diverge.

Si $\alpha < -1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n)^{\alpha+1} = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^n f(t)dt = -\frac{\ln(a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. J'en déduis que la série $\sum_{n\geq a} u_n$ converge.

2) Posons $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ et $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$. Alors f est continue, strictement décroissante et positive sur $[1,+\infty[$.

Alors $\forall n \geq 1,\ \forall x \in [\![n, n+1]\!]$, $\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$. Donc $\int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}}dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}dx$ i.e. $\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx \leq \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$.

Donc $\forall N \geq 1, \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}} \leq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ et par la relation de Chasles, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}} \leq \int_1^{N+1} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ $(*)$

Or, d'une part, $\int_1^{N+1} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx = \int_1^{N+1} x^{-\frac{2}{3}}dx = \left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_1^{N+1} = 3(N+1)^{\frac{1}{3}} - 3$ et d'autre part, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}} = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(N+1)^{\frac{2}{3}}} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} - 1 = \frac{1}{(N+1)^{\frac{2}{3}}} + S_N - 1$. Ainsi, $(*)$ s'écrit : $\frac{1}{(N+1)^{\frac{2}{3}}} + S_N - 1 \leq 3(N+1)^{\frac{1}{3}} - 3 \leq S_N$. Donc, $3(N+1)^{\frac{1}{3}} - 3 \leq S_N \leq 3(N+1)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{(N+1)^{\frac{2}{3}}} - 2$.

En particulier, $3(10^9+1)^{\frac{1}{3}} - 3 \leq S_{10^9} \leq 3(10^9+1)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{(10^9+1)^{\frac{2}{3}}} - 2$.

Comme $(10^9+1)^{\frac{1}{3}} - 1 > 10^3 - 1 = 999$ donc $3\left[(10^9+1)^{\frac{1}{3}} - 1\right] > 3[10^3 - 1] = 3000 - 3 = 2997\ et\ 3(10^9+1)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{(10^9+1)^{\frac{2}{3}}} - 2 < 2998$. Donc, $\lfloor S_{10^9} \rfloor = 2997$.

3) Soit $\alpha \in]1;+\infty[$. Posons $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$.

Comme $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^\alpha}$ $converge$. Notons l sa somme i.e. l $= \lim\limits_{N\to+\infty} S_N$. Alors $R_N = $ l$- S_N$.

Posons $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. f est continue, strictement décroissante et positive sur $[1,+\infty[$.

Alors $\forall n \geq 1,\ \forall x \in [\![n, n+1]\!]$, $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Donc $\int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^\alpha}dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^\alpha}dx$ i.e. $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}dx \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Donc $\forall M \geq N \geq 1, \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \sum_{n=N+1}^M \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}dx \leq \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^\alpha}$ et par la relation de Chasles, $\sum_{n=N+1}^M \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_{N+1}^M \frac{1}{x^\alpha}dx \leq \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^\alpha}$ $(*)$.

Or, d'une part, $\int_{N+1}^M \frac{1}{x^\alpha}dx = \int_{N+1}^M x^{-\alpha}dx = \left[\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\right]_{N+1}^M = \frac{1}{-\alpha+1}M^{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}(N+1)^{-\alpha+1}$ et d'autre part, $\sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^\alpha} = S_M - S_N$ et $\sum_{n=N+1}^M \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \sum_{n=N+2}^{M+1} \frac{1}{n^\alpha} = S_{M+1} - S_{N+1} = S_{M+1} - S_N - \frac{1}{(N+1)^\alpha}$.

Ainsi, $(*)$ s'écrit : $S_{M+1} - S_N - \frac{1}{(N+1)^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}M^{-\alpha+1} - \frac{1}{1-\alpha}(N+1)^{-\alpha+1} \leq S_M - S_N$. Passons maintenant à la limite quand $M \to +\infty$ dans cette inégalité, nous obtenons : l $- S_N - \frac{1}{(N+1)^\alpha} \leq 0 - \frac{1}{1-\alpha}(N+1)^{-\alpha+1} \leq$ l $- S_N$ ce qui 'écrit aussi $R_N - \frac{1}{(N+1)^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}(N+1)^{-\alpha+1} \leq R_N$

Donc, $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \leq R_N \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} + \frac{1}{(N+1)^\alpha}$.

Alors, comme $(\alpha-1)(N+1)^{\alpha-1} > 0$, on peut $1 \leq (\alpha-1)(N+1)^{\alpha-1}R_N \leq 1 + \frac{\alpha-1}{(N+1)}$. Ce dernier encadrement permet d'affirmer que $\lim\limits_{N\to+\infty} (\alpha-1)(N+1)^{\alpha-1}R_N = 1$. Cela permet de conclure que $R_N \sim_{N\to+\infty} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}$.

4) $u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) < 0\ car\ \sqrt{n} > \sqrt{n+1}$. Donc la suite u est décroissante.

Posons $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ et $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$. Alors f est continue, strictement décroissante et positive sur $[1,+\infty[$.

Alors $\forall n \geq 1,\ \forall x \in [\![n, n+1]\!]$, $\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Donc $\int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}dx$ i.e. $\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$.

Donc $\forall N \geq 1, \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} \leq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ et par la relation de Chasles, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} \leq \int_1^{N+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ $(*)$

Or, d'une part, $\int_1^{N+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int_1^{N+1} x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{N+1} = 2(N+1)^{\frac{1}{2}} - 2$ et d'autre part, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(N+1)^{\frac{1}{2}}} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} - 1 = \frac{1}{(N+1)^{\frac{1}{2}}} + S_N - 1$. Ainsi, $(*)$ s'écrit : $\frac{1}{(N+1)^{\frac{1}{2}}} + S_N - 1 \leq 2(N+1)^{\frac{1}{2}} - 2 \leq S_N$. Donc, $2(N+1)^{\frac{1}{2}} - 2 \leq S_N \leq 2(N+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{(N+1)^{\frac{2}{3}}} - 1$et par suite

$$2[\sqrt{N+1} - \sqrt{N}] - 2 \leq S_N - 2\sqrt{N} \leq 2[\sqrt{N+1} - \sqrt{N}] - \frac{1}{(N+1)^{\frac{2}{3}}} - 1$$

Donc, $2\left[\frac{1}{\sqrt{N+1}+\sqrt{N}}\right] - 2 \leq S_N - 2\sqrt{N} \leq 2\left[\frac{1}{\sqrt{N+1}+\sqrt{N}}\right] - \frac{1}{(N+1)^{\frac{2}{3}}} - 1 \leq 2$.

J'en déduis que $\forall N, -2 \leq u_N \leq 2$. Ainsi, u est bornée. Comme u est décroissante, u est convergente.

Ex 4 En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt$, montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}, n \geq 0$, converge et déterminer sa somme.

Ex 5 Séries alternées

a) Soit une suite *réelle* (u_n) telle que :

1. $\forall n, u_{n+1} \times u_n < 0$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
3. $(|u_n|)$ est décroissante .

On dit que la série $\sum_{n\geq0} u_n$ est alternée.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que la série de terme général u_n converge en utilisant les suites extraites $(S_{2n})\ et\ (S_{2n+1})$.

b) Application : Etudier la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ en fonction du réel strictement positif α.

Ex 6 Critère de d'Alembert Soit u une suite réelle et strictement positive et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{l}$.

1. Montrer que si $\mathrm{l} \in [0,1[$, $alors\ u_n = O(\mathrm{l}^n)$ et $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que si $\mathrm{l} \in]1,+\infty[$, $alors\ \mathrm{l}^n = O(u_n)$ et $\sum u_n$ diverge.
3. Application : étudier la nature de $\sum \frac{n!}{n^n}$ et $\sum \frac{(n!)^a b^n}{(2n)!}$ où a, b $réels\ et\ b > 0$.

Ex 7 Soit u et v $deux$ suites réelles et strictement positives et telle que $\forall n, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
Montrer que $\sum v_n$ converge$\Longrightarrow \sum u_n$ converge

Supposons que $\sum v_n$ converge.
$\forall n, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}. Donc\ \forall N \geq 1,\ \prod_{n=0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \prod_{n=0}^{N-1} \frac{v_{n+1}}{v_n}$ i.e. $\frac{u_N}{u_0} \leq \frac{v_N}{v_0}$. Ainsi, $\forall N \geq 1$, $0 \leq u_N \leq \underbrace{\frac{u_0}{v_0}}_{=C=cste} v_N$. Or, $\sum v_n$ converge donc $\sum C v_n$ converge. Donc le premier trhéorème de comparaison assure que $\sum u_n$ converge

Ex 8 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente. Montrer que $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge (indication : on pourra utiliser Cauchy-Schwarz).

Posons $T_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

$$\forall N, |T_N|^2 = \left|\sum_{n=1}^{N} \sqrt{u_n} \times \frac{1}{n}\right|^2 \underset{\substack{C.S \\ dans\ \mathbb{R}^N}}{\leqq} \left[\sum_{n=1}^{N} \left(\sqrt{u_n}\right)^2\right] \times \left[\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n}\right)^2\right] = \left[\underbrace{\sum_{n=1}^{N} u_n}_{=S_N}\right] \times \left[\underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}}_{=H_N}\right]$$

$$\underset{\substack{car\ \sum u_n\ et\ \sum \frac{1}{n^2}\ \text{sont deux séries} \\ \text{à termes positifs et convergentes}}}{\leqq} \underbrace{\left[\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right] \times \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right]}_{constante\ M\ indépendante\ de\ n}.$$

Donc, $\forall N, |T_N| \leq \sqrt{M}$. J'en déduis que la suite $(T_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. De plus, la suite $(T_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est croissante car $\forall n, \frac{\sqrt{u_n}}{n} \geq 0$. J'en déduis que $(T_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente ce qui signifie que $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Ex 9 Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*\ sur\ \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$. Montrer que $\forall n \geq 1, S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{8}$. En déduire la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Soit $n \geq 1$.

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \underset{\substack{car \\ \forall k\in[\![n+1,2n]\!], \\ \frac{1}{k^2}\geq\frac{1}{(2n)^2} \\ et\ \sigma(k)>0}}{\geq} \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \underset{\substack{car\ \sigma\ est\ bijective \\ donc\ les\ entiers\ \sigma(k) \\ tels\ que\ k\in[\![n+1,2n]\!]\ sont\ supé\ à\ 1 \\ et\ tous\ disticnts\ donc \\ \sum_{k=n+1}^{2n}\sigma(k)\geq\sum_{k=n+1}^{2n}k.}}{\geq} \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{4n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{8}$$

Si on imagine un instant que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ $converge$ alors cela signifie que la suite (S_n) converge vers un réel l et par suite , sa suite extraite (S_n) converge vers un réel l et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n = \mathrm{l} - \mathrm{l} = 0$; mais alors , en passant à la llimite dans l'inégalité précédente, j'aboutis à l'absurdité que $0 \geq \frac{1}{8}$. J'en déduis que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ ne peut pas converger autrement dit que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ $diverge$.

Ex 10 On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4....(2n+2)}, v_n = n^{\frac{3}{2}} u_n\ et\ t_n = ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

1. Simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrer que $\sum t_n$ converge.
2. En déduire que $\sum u_n$ converge
3. Vérifier que $\forall n \geq 2, (2n-1)u_{n-1} - (2n+1)u_n = u_n$ puis calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1. $u_{n+1} = \frac{1.3.5.....(2n-1)(2n+1)}{2.4....(2n+2)(2n+4)}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1.3.5.....(2n-1)(2n+1).2.4....(2n+2)}{2.4....(2n+2)(2n+4).1.3.5.....(2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+4}$.

Donc, $t_n = ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = ln\left(\frac{(n+1)^{\frac{3}{2}} u_{n+1}}{n^{\frac{3}{2}} u_n v_n}\right) = ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2n+1}{2n+4}\right) = \frac{3}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2n+4-3}{2n+4}\right) = \frac{3}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{3}{2n+4}\right) = \frac{3}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{3}{2n\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right) = \frac{3}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{3}{2n}\left(1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{3}{2n} + \frac{3}{n^2} - \frac{9}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$t_n = \frac{9}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{9}{8n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs et de Riemann convergente, $\sum \frac{9}{8n^2}$ converge puis $\sum t_n$ converge.

2. $T_{N-1} = \sum_{n=1}^{N-1} t_n = \sum_{n=1}^{N-1} ln(v_{n+1}) - ln(v_n) = ln(v_N) - ln(v_1) = \ln\left(N^{\frac{3}{2}} u_N\right) - \ln(u_1) = \ln\left(N^{\frac{3}{2}} u_N\right)$.

Donc, $N^{\frac{3}{2}} u_N = e^{T_{N-1}}$. Or d'après 1), la suite (T_N) est convergente. Notons l sa limite. Alors $\lim\limits_{N\to+\infty} e^{T_{N-1}} = e^{\mathrm{l}} \neq 0$. Donc, $N^{\frac{3}{2}} u_N \sim_{N\to+\infty} e^{\mathrm{l}}$ $et\ finalement$, $u_N \sim_{N\to+\infty} \frac{e^{\mathrm{l}}}{N^{\frac{3}{2}}}$. Comme $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série à termes positifs et de Riemann convergente, $\sum \frac{e^{\mathrm{l}}}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge et j'en déduis que $\sum u_n$ converge.

3. Soit $n \geq 2$. $(2n-1)u_{n-1} - (2n+2)u_n = (2n-1)\frac{1.3.5.....(2n-3)}{2.4....(2n)} - (2n+2)\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4....(2n+2)} = \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4....(2n)} - \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4....(2n)} = 0.$

Donc, $(2n-1)u_{n-1}-(2n+1)u_n=u_n$. Alors, $\sum_{n=2}^{N} u_n=\sum_{n=2}^{N}\left[\underbrace{(2n-1)u_{n-1}}_{\omega_{n-1}}-\underbrace{(2n+1)u_n}_{\omega_n}\right]=3u_1-(2N+1)u_N$. Donc,

$\sum_{n=1}^{N} u_n=4u_1-(2N+1)u_N$. Or, $u_N\sim_{N\to+\infty}\frac{e^{l}}{N^{\frac{3}{2}}}$ donc $(2N+1)u_N\sim_{N\to+\infty}2N\frac{e^{l}}{N^{\frac{3}{2}}}=\frac{2e^{l}}{N^{\frac{1}{2}}}$. Par conséquent, $\lim_{N\to+\infty}(2N+1)u_N=0$.

J'en déduis que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n=4u_1=1.$

Ex 11 On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n}$. Montrer que la suite u converge.

$$u_{n+1}-u_n=\left[\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n+1}.\right]-\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n}\right]=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}-2\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}-2\left[\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)\right].$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $(1+u)^{\alpha}=1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2+o_0(u^2)$, je peux affirmer que :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\frac{3}{8}\frac{1}{n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\ \ et\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{1}{n}-\frac{1}{8}\frac{1}{n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc, $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\frac{3}{8}\frac{1}{n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\ -2\left[\sqrt{n}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n}-\frac{1}{8}\frac{1}{n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]=-\frac{1}{4}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\sim-\frac{1}{4}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Comme $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série à termes positifs et de Riemann convergente, $\sum\frac{-1/4}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série à termes négatifs convergente et j'en déduis que $\sum u_{n+1}-u_n$ converge. Le cours assure alors que la suite u converge.

Ex 12

1. Montrer que : $\forall x\geq 0, \sum\frac{1}{2^n+x}$converge. On pose $\forall x\in\mathbb{R}^+, f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k+x}$.
2. Montrer que **:** $\forall x\geq 0, f(2x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{1+2x}$.
3. Montrer que f est monotone.
4. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.
5. Montrer que f est lipschitzienne.
6. Montrer que f est continue.

1. Soit $x\geq 0. \frac{1}{2^n+x}\sim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}$. Or, $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ est une série géométrique positive et convergente (car $\left|\frac{1}{2}\right|<1$) donc $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n+x}$converge.
2. $\forall x\in\mathbb{R}^+, f(x)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k+x}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2^k+x}\ et\ f(2x)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k+2x}$.

Or, $\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k+2x}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^{k-1}+x}=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2^k+x}\right]+\frac{1}{2}\frac{1}{2^{-1}+x}$. Donc par passage à la limite dans cette égalité, j'obtiens : $f(2x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{2^{-1}+x}$

Ainsi, $\forall x\geq 0, f(2x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{1+2x}$.

4. $Soit\ (x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2$ tel que $x<y$.

Alors, $f(x)-f(y)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k+x}-\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k+y}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k+x}-\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k+y}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}[\frac{1}{2^k+x}-\frac{1}{2^k+y}]$.

Or, $x<y$ donc $\frac{1}{2^k+x}-\frac{1}{2^k+y}>0$. Donc, $\sum_{k=0}^{N}[\frac{1}{2^k+x}-\frac{1}{2^k+y}]>0$ et par passage à la limite dans cette inégalité, $f(x)-f(y)\geq 0$.

Donc f est décroissante.

5. Comme f est monotone sur $\mathbb{R}^+, f$ admet une limite l en $+\infty$. De plus f est minorée par 0 et décroissante, cette limite l est finie et positive. Par composition, $\lim_{x\to+\infty}f(2x)=$ l ; donc par passage à la limite quand $x\to+\infty$ dans l'égalité (**), j'obtiens : l $=\frac{1}{2}$l $+0$. Donc l=0.
6. Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2$

Alors, $|f(x)-f(y)|=\left|\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}[\frac{1}{2^k+x}-\frac{1}{2^k+y}]\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}-\frac{1}{2^n+y}\right|$.

Or, $0\leq\left|\frac{1}{2^k+x}-\frac{1}{2^k+y}\right|\leq\left|\frac{y-x}{(2^k+x)(2^k+y)}\right|=|y-x|\left|\frac{1}{(2^k+x)}\right|\left|\frac{1}{(2^k+y)}\right|\leq|y-x|\left|\frac{1}{2^k\times 2^k}\right|\leq|y-x|\frac{1}{4^k}$. La série $\sum\frac{1}{4^n}$ est une série géométrique convergente. Alors le première théorème de comparaison permet d'affirmer que $\sum\left|\frac{1}{2^n+x}-\frac{1}{2^n+y}\right|$ converge ce qui signifie que $\sum\frac{1}{2^n+x}-\frac{1}{2^n+y}$ est absolument convergente donc convergente et par suite, $\underbrace{\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}-\frac{1}{2^n+y}\right|}_{=|f(x)-f(y)|}\overset{d'après\ le\ théorème\ sur\ les\ séries\ absolument\ convergentes}{\leqq}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{2^n+x}-\frac{1}{2^n+y}\right|$.

De plus, $0\leq\sum_{k=0}^{N}\left|\frac{1}{2^k+x}-\frac{1}{2^k+y}\right|\leq|y-x|\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{4^k}=|y-x|\frac{1-\frac{1}{4^{N+1}}}{1-\frac{1}{4}}$. Donc, $0\leq\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{2^n+x}-\frac{1}{2^n+y}\right|\leq|y-x|\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}|y-x|$. J'en déduis que

$|f(x)-f(y)|\leq\frac{4}{3}|y-x|$. Donc f est lipschitzienne.

7. Comme toute fonction lipschitzienne, f est continue. En effet, fixons un réel $a\geq 0. Alors \forall x\geq 0, 0\leq|f(x)-f(a)|\leq\frac{4}{3}|x-a|$.

Comme $\lim_{x\to a}\frac{4}{3}|x-a|=0, \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. Donc f est continue en a.

Ex 13 Soit (a_n) une suite réelle et positive et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n, u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}. \end{cases}$

1. Montrer que (u_n) est bien définie et monotone.
2. Montrer que : la suite (u_n) est convergente sietssi la série de terme général a_n converge.

1. On montre facilement par récurrence sur n que $\forall n, u_n$existe et $u_n > 0$. Alors $\forall n, u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \geq 0$. Donc u est croissante.
Alors u converge sietssi u est majorée.

2. **⟹Supposons que la suite (u_n) soit convergente**. Alors d'une part, la suite (u_n) est majorée par un réel strictement positif M.
D'autre part, on peut affirmer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$est convergente i.e. la série de terme général $\frac{a_n}{u_n}$ est convergente.
Or, $\forall n, u_n \leq M$ *et par conséquent*, $\frac{a_n}{u_n} \geq \frac{a_n}{M} \geq 0$ et $M\frac{a_n}{u_n} \geq a_n \geq 0$. Comme la série de terme général $\frac{a_n}{u_n}$ est convergente, la série de terme général $M\frac{a_n}{u_n}$ est convergente, le premier théorème de comparaison assure que la série de terme général a_n est convergente.
⟸Supposons que la série de terme général a_n est convergente. Comme u est croissante, u est minorée par $u_0 > 0$. Donc, $\forall n$, $0 \leq \frac{a_n}{u_n} \leq \frac{a_n}{u_0}$.
Comme la série de terme général a_n est convergente, la série de terme général $\frac{a_n}{u_0}$ est convergente et le premier théorème de comparaison assure que la série de terme général $\frac{a_n}{u_n}$ est convergente ce qui signifie que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$est convergente. Je peux donc conclure que la suite (u_n) soit convergente.

Ex 14 Soit $x \in]-1;1[$ *et* $q \in \mathbb{N}$. On note $S_n(q) = \sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} x^{k-q}$.

1) Montrer que $\lim_{k\to+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = 0$.
2) Donner la limite de $(S_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$, de $(S_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(S_n(2))_{n\in\mathbb{N}}$,
3) Montrer que $(1-x)S_n(q+1)$= $S_{n-1}(q) - \binom{n}{q+1} x^{n-q}$.
4) Montrer par récurrence sur q que $\sum_{k\geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$converge et $\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
5) Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N}, \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^k = \frac{x^q}{(1-x)^{q+1}}$.

Ex 15 Soit $a = (a_n)$une suite d'éléments de $[0,1]$. On note $A = \{a_n / n \in \mathbb{N}\}$.
Rappel : A est dense dans $[0,1]$ lorsque tout intervalle inclus dans $[0,1]$ contient au moins un élément de A ; autrement dit , lorsqu' entre deux réels de $[0,1]$, il y a toujours un élément de A.

a. Montrer que si A est dense dans $[0,1]$ alors tout élément de $[0,1]$ est limite d'une suite d'éléments de A.

Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ *et* $\varphi(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n)$.

b. Justifier que : $\forall (f,g) \in E^2, \varphi(f,g)$ existe bien.
c. Montrer que φ est un produit scalaire sur E sietssi A est dense dans $[0,1]$.