TD 22 Séries numériques

Ex 1 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.Justifier que le série de terme générale $u_n$est convergente et calculer sa somme.

1. $u_n = \frac{5n-4}{n^3+3n^2-n-3}$, $n \geq 2$.
2. $u_n = \frac{-2n^2+1}{3^n}$
3. $u_n = 2^{-n}tan(2^{-n}x)$ où $x \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$
4. $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$
5. $u_n = \frac{(-2)^n}{n!}$
6. $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)$
7. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

Ex 2 Déterminer la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \frac{\sin(n)}{n^2-\cos(n^5)}$
2. $u_n = sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$
3. $u_n = \sin(n)$
4. $u_n = \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$
5. $u_n = \sqrt{ch(n)} - \sqrt{sh(n)}$
6. $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{cos^2(x)}{n^2+\cos^2(x)}dx$
7. $u_n = Arccos\left(\sqrt{\frac{1+n^3}{2+n^3}}\right)$
8. $u_n = \frac{1}{(n+2)!}\sum_{k=1}^{n} k!$
9. $u_n = \ln\left(\frac{2}{\pi}Arctan\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right)$
10. $u_n = Arctan(n+a) - Arctan(n)$ où $a \in \mathbb{R}$ (utiliser l'IAF)
11. $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+1}$ (où a, b réels)
12. $u_n = \frac{1+a^{\sqrt{n}}}{n^2}$ $(tq\ a > 0)$
13. $u_n = \frac{1}{sh\sqrt{\ln(n)}}$
14. $u_n = \frac{1}{\ln(n)\ln(ch(n))}$
15. $u_n = n^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$
16. $u_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln(n)}$
17. $u_n = \ln(n)e^{-\sqrt[5]{n}}$
18. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
19. $u_n = \frac{\ln^n(n)}{n^{\ln(n)}}$
20. $u_n = \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{n^a}$ où $a \in \mathbb{R}$
21. $u_n = \frac{1}{n}e^{-u_{n-1}}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

Ex 3 <u>En utilisant la méthode de comparaison série-intégrale</u>,

1) Déterminer, en fonction du paramètre réel α, la nature de la série de terme général $u_n = \frac{ln^{\alpha}(n)}{n}$.

2) Déterminer la partie entière de $\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$

3) Soit $\alpha \in]1; +\infty[$. Déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$.

4) Montrer que la suite u définie par : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$ converge.

Ex 4 En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt$, montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$, $n \geq 0$, converge et déterminer sa somme.

Ex 5 Séries alternées

a) Soit une suite $réelle$ (u_n) telle que :

1. $\forall n, u_{n+1} \times u_n < 0$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
3. $(|u_n|)$ est décroissante .

On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$est alternée.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que la série de terme général u_n converge en utilisant les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).

b) Application : Etudier la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\right)$ en fonction du réel strictement positif α.

Ex 6 Critère de d'Alembert Soit u une suite réelle et strictement positive et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

1. Montrer que si $\ell \in [0,1[$, $alors$ $u_n = O\left(\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n\right)$ et $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que si $\ell \in]1, +\infty[$, $alors$ $\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n = O(u_n)$ et $\sum u_n$ diverge.
3. Application : étudier la nature de $\sum \frac{n!}{n^n}$ et $\sum \frac{(n!)^a b^n}{(2n)!}$ $où\ a, b\ réels\ et\ b > 0$.

Ex 7 Critère de d'Alembert Soit u et v $deux$ suites réelles et strictement positives et telle que $\forall n, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Montrer que $\sum v_n$ converge$\Longrightarrow\sum u_n$ converge

Ex 8 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente. Montrer que $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge (indication : on pourra utiliser Cauchy-Schwarz pour les réels (Cf Chapitre 2).

Ex 9 Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$. Montrer que $\forall n \geq 1, S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{8}$. En déduire la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Ex 10 On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1.3.5\ldots..(2n-1)}{2.4\ldots.(2n+2)}, v_n = n^{\frac{3}{2}} u_n \ et\ t_n = ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

1. Simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrer que $\sum t_n$ converge.
2. En déduire que $\sum u_n$ converge
3. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n-1)u_{n-1} - (2n+1)u_n = u_n$ puis calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Ex 11 On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$. Montrer que la suite u converge.

Ex 12

1. Montrer que : $\forall x \geq 0, \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k+x}$converge. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k+x}$.
2. Montrer que **:** $\forall x \geq 0, f(2x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{1+2x}$.
3. Montrer que f est monotone.
4. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et en déterminer.
5. Montrer que f est lipschitzienne.
6. Montrer que f est continue.

Ex 13 Soit (a_n) une suite réelle et positive et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n, u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n} \end{cases}$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et monotone.
2. Montrer que : la suite (u_n) est convergente sietssi la série de terme général a_n converge.