

# Espaces préhilbertiens réels

## I Espace préhilbertien réel . Produit scalaire

**1 Déf du produit scalaire** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace-vectoriel .

On appelle **produit scalaire** sur  $E$  toute application  $\varphi$  définie sur  $E \times E (= E^2)$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui vérifie :

1.  $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \varphi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha\varphi(\vec{x}, \vec{z}) + \beta\varphi(\vec{y}, \vec{z})$  i.e.  $\varphi$  est linéaire par rapport à la 1<sup>ère</sup> variable }  **$\varphi$  est bilinéaire**
2.  $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \varphi(\vec{z}, \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\varphi(\vec{z}, \vec{x}) + \beta\varphi(\vec{z}, \vec{y})$  i.e.  $\varphi$  est linéaire par rapport à la 2<sup>ème</sup> variable }
3.  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{y}, \vec{x})$   **$\varphi$  est symétrique**
4.  $\forall \vec{x} \in E, \varphi(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$  }  **$\varphi$  est définie- positive**
5.  $\forall \vec{x} \in E, \varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$  }

$E$ , muni d'un produit scalaire, est appelé un **espace préhilbertien réel**.

**2 notation :**  $\varphi$  est notée  $(. / .)$  ou  $\langle . / . \rangle$  et  $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$  est noté :  $(\vec{x} / \vec{y})$  ou  $\langle \vec{x} / \vec{y} \rangle$ .

**3 Rq :** Si les propriétés 1 et 3 sont vérifiées alors nécessairement, la propriété 2 est vérifiée. Donc en pratique, pour prouver que  $\varphi$  est un p.s. sur  $E$ , il suffit de montrer que  $\varphi$  est une application de  $E^2$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifie les propriétés 1, 3, 4 et 5.

**4 Règles de calcul :**

- $\forall \vec{x} \in E, (\vec{x} / \vec{0}) = 0 = (\vec{0} / \vec{x})$
- $\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p) \in E^p, \forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p, (\sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{x}_k / \vec{y}) = \sum_{k=1}^p \alpha_k (\vec{x}_k / \vec{y}) = (\vec{y} / \sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{x}_k)$

**5 Exemples à connaître et savoir redémontrer :**

1) sur  $\mathbb{R}^n$  : l'application  $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$  appelé **produit scalaire canonique**.

**Cas particuliers :**

Sur  $\mathbb{R}$  : le produit est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}$

Sur  $\mathbb{R}^2$  : l'application  $((x, y), (a, b)) \mapsto xa + yb$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$

Sur  $\mathbb{R}^3$  : l'application  $((x, y, z), (a, b, c)) \mapsto xa + yb + zc$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$

- 2) Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Sur  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  : si  $\omega$  est une application strictement positive et continue sur  $[a, b]$  alors l'application  $((f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)dt)$  est un produit scalaire sur  $C^0([a, b], \mathbb{R})$ .
- 3) Sur  $\mathbb{R}[X]$  : l'application  $((P, Q) \mapsto \int_a^b \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)dt)$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$
- 4) Si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$  et  $(P/Q) = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ . L'application :  $((P, Q) \mapsto (P/Q))$  est le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- 5) Si  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont  $n+1$  réels distincts alors l'application :  $((P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i))$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- 6)  $((M/N) = \text{tr}(M^T N))$  définit le produit scalaire canonique sur  $M_n(\mathbb{R})$

**6 Proposition** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  e v muni du produit scalaire  $(. / .)$ .

$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, (\vec{x} / \vec{y})^2 \leq (\vec{x} / \vec{x})(\vec{y} / \vec{y})$  i.e.  $|\langle \vec{x} / \vec{y} \rangle| \leq \sqrt{(\vec{x} / \vec{x})} \sqrt{(\vec{y} / \vec{y})}$  appelée **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

De plus,  $|\langle \vec{x} / \vec{y} \rangle| = \sqrt{(\vec{x} / \vec{x})} \sqrt{(\vec{y} / \vec{y})} \Leftrightarrow \vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont colinéaires.

**7 On retrouve les inégalités de Cauchy-Schwarz prouvées dans d'autres chapitres :**

1) Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire :  $\langle (x_1, \dots, x_n) / (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  : pour tous  $n$ -uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2)$

2) On munit  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  du p.s.  $(f/g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors :

Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{R}^n$  dans  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  du p.s.  $(f/g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$

pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  continues sur  $[a, b]$  et à valeurs réelles,  $(\int_a^b f(t)g(t)dt)^2 \leq (\int_a^b (f(t))^2 dt) (\int_a^b (g(t))^2 dt)$ .

3) Pour toutes matrices  $(a_{ij})$  et  $(b_{ij})$  de  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $|\sum_{(i,j) \in [1,n]^2} a_{ij} b_{ij}| \leq \sqrt{\sum_{(i,j) \in [1,n]^2} a_{ij}^2} \sqrt{\sum_{(i,j) \in [1,n]^2} b_{ij}^2}$

**8 Déf d'une norme** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  e v.

On appelle **norme** sur  $E$  toute application  $N$  définie sur  $E$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et telle que :

1.  $\forall \vec{x} \in E, N(\vec{x}) \geq 0$
2.  $\forall \vec{x} \in E, (N(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0)$
3.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in E, N(\alpha \vec{x}) = |\alpha| N(\vec{x})$
4.  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, N(\vec{x} + \vec{y}) \leq N(\vec{x}) + N(\vec{y})$  (**inégalité triangulaire**)

**9 Notation et définition** :  $N$  est souvent noté  $\|\cdot\|$  et  $N(\vec{x})$  est noté  $\|\vec{x}\|$ .

Alors l'application  $d$ , définie sur  $E \times E$  par :  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$  est la **distance associée à la norme**  $\|\cdot\|$  et  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, d(\vec{x}, \vec{y})$  est la **distance** entre  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ .

**10 Théorème norme euclidienne** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  e v muni du produit scalaire  $(\cdot / \cdot)$ .

L'application  $\|\cdot\|$  définie sur  $E$  par :  $\forall \vec{x} \in E, \|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x} / \vec{x})}$  est une norme sur  $E$  appelée **norme euclidienne** associée au produit scalaire  $(\cdot / \cdot)$ .

L'inégalité triangulaire et celle de Cauchy-Schwarz s'écrivent alors  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \|\vec{x} + \vec{y}\| \stackrel{I.T.}{\leq} \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$  et  $|\langle \vec{x} / \vec{y} \rangle| \stackrel{C.S.}{\leq} \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ .

**11 Exemples**

- 1) Dans  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique, la norme euclidienne canonique est  $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ,
- 2) Dans  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  muni du ps:  $(f/g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ , la norme euclidienne associée est  $\|f\| = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}$ .
- 3) Dans  $\mathbb{R}_n[X]$  du ps:  $(P/Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$  où  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont  $n+1$  réels fixés distincts alors  $\|P\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n P(a_i)^2}$ .
- 4) Dans  $M_n(\mathbb{R})$  muni du ps:  $(M/N) = \text{tr}(M^T N)$ ,  $\forall M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}), \|M\| = \sqrt{\text{tr}(M^T M)} = \sqrt{\sum_{(i,j) \in [1,n]^2} m_{ij}^2}$ .

**12 Désormais,  $E$  un  $\mathbb{R}$  e v muni du produit scalaire  $(\cdot / \cdot)$  de norme associée  $\|\cdot\|$ .**

**13 Def d'un vecteur unitaire**: On dit que le vecteur  $\vec{u}$  de  $E$  est **unitaire** ou **normé** lorsque  $\|\vec{u}\| = 1$ .

**14 Remarque** : Tout vecteur  $\vec{x}$  non nul de  $E$  est colinéaire à un vecteur unitaire car  $\vec{x} = \|\vec{x}\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ .

**15 Propriétés : Des relations entre norme et produit scalaire.**  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$ ,

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x} / \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \text{ et } \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - 2\langle \vec{x} / \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2$$

$$\langle \vec{x} + \vec{y} / \vec{x} - \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2$$

$$\langle \vec{x} / \vec{y} \rangle = \frac{1}{4} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \text{ identité de polarisation.}$$

## II Orthogonalité

**16 Dans tout ce paragraphe,  $E$  est un  $\mathbb{R}$  e v muni du produit scalaire  $(\cdot / \cdot)$  de norme associée  $\|\cdot\|$ .**

### 1. Orthogonalité-Orthogonal d'une partie.

**17 Déf de vecteurs et espaces orthogonaux.**

- 1) Deux **vecteurs**  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de  $E$  sont dits **orthogonaux** lorsque  $\langle \vec{x} / \vec{y} \rangle = 0$ . On note  $\vec{x} \perp \vec{y}$ .
- 2) Deux **ss e v**  $F$  et  $G$  de  $E$  sont dits **orthogonaux** lorsque  $\forall \vec{x} \in F, \forall \vec{y} \in G, \langle \vec{x} / \vec{y} \rangle = 0$ . On note  $F \perp G$ .
- 3) Un vecteur  $\vec{y}$  est orthogonal à un ss-e-v  $F$  lorsque  $\forall \vec{x} \in F, \langle \vec{x} / \vec{y} \rangle = 0$ . On note  $\vec{y} \perp F$ .

**18 Déf de l'orthogonal d'une partie :**

Soit  $X$  une partie de  $E$ . **L'orthogonal de  $X$**  est l'ensemble noté  $X^\perp$  des vecteurs de  $E$  orthogonaux à tous les vecteurs de  $X$ .

$$X^\perp = \{\vec{u} \in E / \forall \vec{x} \in X, \langle \vec{u} / \vec{x} \rangle = 0\}.$$

$$\text{ie. } \vec{u} \in X^\perp \text{ si et ssi } \forall \vec{x} \in X, \langle \vec{u} / \vec{x} \rangle = 0 \text{ et ssi } \vec{u} \perp X.$$

**19 Exemple** : On munit  $\mathbb{R}^3$  du produit scalaire canonique alors  $P = \{(x, y, z) / x + 2y - 3z = 0\} = \{(1, 2, -3)\}^\perp$ .

**20 Théorème** Soit  $X$  une partie de  $E$ . Alors  $X^\perp$  est un sous espace vectoriel de  $E$  et  $X^{\perp\perp} = (\text{vect}(X))^\perp$ .

- 21 Propriétés** 1) Si  $X$  et  $Y$  sont deux sous-ensembles de  $E$  tels que  $X \subset Y$  alors  $Y^\perp \subset X^\perp$ .
- 2) Si les ss-e-v  $F$  et  $G$  de  $E$  sont orthogonaux alors  $F \cap G = \{\vec{0}\}$  (i.e.  $F$  et  $G$  sont en somme directe).
- 3) Soit  $F$  et  $G$  sont deux ss-e-v de  $E$ . Alors  $G \perp F \Leftrightarrow G$  est un ss-e-v de  $F^\perp$ .

**22 Caractérisation** Soit  $(\vec{e}_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$  une famille génératrice d'un ss-e-v  $F$  de  $E$ .  
Soit  $\vec{u}$  un vecteur de  $E$  et  $X$  une partie de  $E$ .

- $\vec{u} \perp F \Leftrightarrow \vec{u} \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, p\}, (\vec{u}/\vec{e}_i) = 0$ .  
Autrement dit,  $F^\perp = \{\vec{u} \in E / \forall i \in \{1, \dots, p\}, (\vec{u}/\vec{e}_i) = 0\}$ .
- $X \perp F \Leftrightarrow X \subset F^\perp \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in X, \forall i \in \{1, \dots, p\}, (\vec{x}/\vec{e}_i) = 0$ .
- Si  $G$  est le ss-e-v engendré par  $(\vec{g}_k)_{k=1..q}$  alors  $G \perp F \Leftrightarrow \forall k \in \{1.., q\}, \forall \ell \in \{1, \dots, p\}, \vec{g}_k \perp \vec{e}_\ell$ .

**NB :** pour être orthogonal à un ss-e-v, il faut et il suffit d'être orthogonal à tous les vecteurs générateurs de ce ss-e-v.

## 2. Famille orthogonale, famille orthonormale

**23 Déf d'une famille orthogonale, orthonormale** Soit  $B = (\vec{e}_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ .

- $B$  est une **famille orthogonale** lorsque les vecteurs de  $B$  sont deux à deux orthogonaux.  
i.e.  $\forall (k, m) \in I^2, (m \neq k \Rightarrow (\vec{e}_m/\vec{e}_k) = 0)$
- $B$  est dite **base orthogonale** de  $E$  lorsque  $B$  est une base de  $E$  et  $B$  est orthogonale.
- $B$  est dite **orthonormale** (ou **orthonormée**) lorsque  $B$  est orthogonale et les vecteurs de  $B$  sont unitaires i.e. lorsque :  
 $\forall (k, m) \in I^2, (\vec{e}_m/\vec{e}_k) = \delta_{mk}$  (symbole de Kronecker)
- $B$  est dite **base orthonormée** (**B.O.N**) de  $E$  lorsque  $B$  est une base de  $E$  et  $B$  est orthonormale.

### 24 Remarques

- Une famille orthonormale ne contient jamais le vecteur nul
- Si  $B = (\vec{e}_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ , orthogonale, alors  $\forall (\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I, B' = (\alpha_i \vec{e}_i)_{i \in I}$  est une famille orthogonale.

**25 Propriété:** Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de  $E$  est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

**26 Théorème** La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est une B.O.N pour le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

### 27 Autres bases ortho(...) à connaître et savoir redémontrer

- $(E_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$  est une B.O.N de  $M_n(\mathbb{R})$  muni de son p.s. canonique.
- $(X^k)_{k=0..n}$  est une B.O.N de  $\mathbb{R}_n[X]$  de son produit scalaire canonique.
- Soit  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ( $n+1$ ) réels distincts. On munit  $\mathbb{R}_n[X]$  du produit scalaire  $(P/Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$  et on définit les polynômes :  $L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Alors  $(L_k)_{k=0..n}$  est une B.O.N de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- On munit  $C^0([0, \pi], \mathbb{R})$  du produit scalaire  $((f, g) \mapsto \int_0^\pi f(t)g(t)dt)$  et on définit  $f_k: (t \mapsto \cos(kt))$ . Alors  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une famille orthogonale donc libre.

**28 Théorème de Pythagore :** Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , de  $E$ , sont orthogonaux si et seulement si  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ .

**29 Généralisation (de  $\Rightarrow$ ):** Si  $B = (\vec{e}_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  est une famille orthogonale de vecteurs de  $E$  alors  $\forall (\alpha_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \|\vec{e}_i\|^2$$

**30 Théorème d'orthonormalisation de Gramm - Schmidt :** Construction d'une famille orthonormée de  $E$  à partir d'une famille libre. Soit  $V = (\vec{v}_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  une famille libre de vecteurs de  $E$ .

Alors, il existe une **BASE** orthonormée  $B = (\vec{e}_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  de  $E$  telle que :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \vec{e}_i \in \text{vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i)$ .

## III Espaces euclidiens

### 1. Définition

**31 Déf :**  $E$  est un **espace euclidien** lorsque  $E$  est un espace préhilbertien réel de dimension finie (i.e. un  $\mathbb{R}$ -e-v de dimension finie muni d'un produit scalaire).

Dans ce paragraphe,  $E$  est un espace euclidien de dimension  $n$  et dont le produit scalaire est noté  $(\cdot / \cdot)$  et la norme associée  $\|\cdot\|$ .

**32NB :** Si  $F$  est un ss-e-v de  $E$  alors en restreignant le produit scalaire à  $F \times F$ , je munis  $F$  d'une structure d'espace vectoriel euclidien appelée structure induite par celle de  $E$ .  $F$  est alors un espace euclidien.

## 2. Existence d'une BON

**33Théorème** Tout espace vectoriel euclidien de dimension non nulle possède une BON.

**34Exercice :** Déterminer une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  muni du produit scalaire :  $(P/Q) = \int_0^1 \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)dt$ .

**35Théorème de la base incomplète :** Toute famille orthonormée d'un espace vectoriel euclidien  $E$  peut être complétée pour obtenir un BON de  $E$ .

## 3. Ecriture dans une BON

**36Proposition : Ecriture dans une BON .**

Soit  $B = (\vec{e}_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  une BON de l'espace euclidien  $E$ . Soit  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  deux vecteurs de  $E$ .

Si  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  sont les composantes de respectivement  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  dans la base orthonormée  $B = (\vec{e}_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = (\vec{x} / \vec{e}_i), \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{et} \quad (\vec{x} / \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Autrement dit :

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n (\vec{x} / \vec{e}_k) \vec{e}_k \quad \text{et} \quad \|\vec{x}\| = \sum_{k=1}^n (\vec{x} / \vec{e}_k)^2 \quad \text{et} \quad (\vec{x} / \vec{y}) = \sum_{k=1}^n (\vec{x} / \vec{e}_k) (\vec{y} / \vec{e}_k)$$

$$\text{Matriciellement : } \text{mat}_B \vec{x} = X = \begin{pmatrix} (\vec{x} / \vec{e}_1) \\ (\vec{x} / \vec{e}_2) \\ \vdots \\ (\vec{x} / \vec{e}_n) \end{pmatrix}, \quad \text{mat}_B \vec{y} = Y = \begin{pmatrix} (\vec{y} / \vec{e}_1) \\ (\vec{y} / \vec{e}_2) \\ \vdots \\ (\vec{y} / \vec{e}_n) \end{pmatrix}, \quad (\vec{x} / \vec{y}) = X^T Y = Y^T X \quad \text{et} \quad \|\vec{x}\|^2 = X^T X.$$

**37NB :** Calculer le produit scalaire de deux vecteurs revient à effectuer le produit scalaire canonique de leurs  $n$ -uplets de composantes dans une BON. Calculer la norme d'un vecteur revient à calculer la norme euclidienne canonique de son  $n$ -uplet de composantes dans une BON.  $(\vec{x} / \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle (x_1, \dots, x_n) / (y_1, \dots, y_n) \rangle$ ,  $\|\vec{x}\|^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|(x_1, \dots, x_n)\|$

**38Exercice :** Soit  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des réels distincts et  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(X) = \prod_{j \neq k} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$ . Montrer que  $\forall P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $P = \sum_{k=0}^n P(a_k) L_k$ .

## IV Supplémentaire orthogonal d'un ss-e-v de dimension finie et projection orthogonale sur un ss-e-v de dimension finie .

Dans ce paragraphe,  $(E, (\cdot / \cdot))$  un espace préhilbertien réel de norme associée  $\|\cdot\|$ .

$F$  désigne un sous-e-v de  $E$  tel que  $F$  est de dimension finie.  $F$  est donc un e-v euclidien et possède donc une B.O.N.

### 1. Supplémentaire orthogonal d'un ss-e-v $F$ de $E$ tel que $F$ est dimension finie

**39Propriété** Si  $F$  est un ss-e-v de l'espace préhilbertien réel  $E$  et  $F$  est de dimension finie alors

1.  $E = F \oplus F^\perp$  i.e.  $F^\perp$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$
2.  $F^\perp$  est le seul supplémentaire de  $F$  dans  $E$  qui soit orthogonal à  $F$ . on note  $E = F \oplus F^\perp$
3.  $(F^\perp)^\perp = F$ .

**40Définition:**  $F^\perp$  est appelé le **supplémentaire orthogonal** de  $F$  dans  $E$

**41Conséquence :** si  $E$  est de dimension finie alors  $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ .

### 2. Projection orthogonale sur un ss-e-v de dimension finie.

**42Définition :** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un ss-e-v de  $E$  tel que  $\dim F < +\infty$ .

La **projection orthogonale** sur  $F$  est la projection sur  $F$  et parallèlement à  $F^\perp$  et est notée  $p_F$ .

Soit  $\vec{x} \in E$ .  $p_F(\vec{x})$  est le **projeté orthogonal** de  $\vec{x}$  sur  $F$  et  $p_{F^\perp}(\vec{x}) = \vec{x} - p_F(\vec{x})$  est le **projeté orthogonal** de  $\vec{x}$  sur  $F^\perp$ .

**43Conséquence :** On sait que :  $\text{Imp}_F = F$  et  $\text{Kerp}_F = F^\perp$  donc  $\text{Imp}_F$  et  $\text{Kerp}_F$  sont orthogonaux.

**44Caractérisation d'une projection orthogonale.** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $p$  une application de  $E$  vers  $E$ .  $p$  est un projecteur orthogonal sur  $E$  si et ssi  $p \in \mathcal{L}(E)$  et  $p \circ p = p$  et  $\text{Im}(p) \perp \text{Ker}(p)$ .

**45Exercice :**  $\mathbb{R}^3$  est muni de son produit scalaire usuel. Soient  $M = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 10 & 2 \\ -3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$  et  $p$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $M$ . Montrer que  $p$  est une projection orthogonale, en donner ses éléments caractéristiques. Déterminer une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $p$  est diagonale.

### 3. Projeté orthogonal sur un ss-e-v de dimension finie

**46Caractérisations du projeté orthogonal** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un ss-e-v de  $E$  tel que  $\dim F < +\infty$ . Soit  $\vec{x}$  un vecteur de  $E$ .

1.  $p_F(\vec{x})$  et  $p_{F^\perp}(\vec{x})$  sont les uniques vecteurs de respectivement  $F$  et  $F^\perp$  vérifiant  $\vec{x} = p_F(\vec{x}) + p_{F^\perp}(\vec{x})$ .
2.  $p_F(\vec{x})$  est l'unique vecteur de  $F$  tel que :  $p_F(\vec{x}) \in F$  et  $\vec{x} - p_F(\vec{x}) \perp F$ .
3. Si  $(\vec{u}_k)_{k \in \{1, \dots, p\}}$  est une base de  $F$  alors  $p_F(\vec{x})$  est l'unique vecteur de  $F$  tel que :  $\begin{cases} p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{u}_k \\ \text{et } \forall l \in \llbracket 1, p \rrbracket, (\vec{x} - p_F(\vec{x}) / \vec{u}_l) = 0 \end{cases}$
4. Si  $(\vec{e}_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$  est une base orthonormée de  $F$  alors  $\forall \vec{x} \in E, p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^p (\vec{x} / \vec{e}_k) \vec{e}_k$ .

**47Exercice :** Déterminer le projeté orthogonal de  $3X^2 + 2X - 1$  sur  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P'(0) = 2P(0)\}$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$  muni du p.s.  $(P/Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**48Prop :** Soit  $\vec{x} \in E$ .

1.  $\|\vec{x}\|^2 = \|p_F(\vec{x})\|^2 + \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|^2$  et  $\|\vec{x}\| \geq \|p_F(\vec{x})\|$
2.  $\forall \vec{f} \in F, \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| \leq \|\vec{x} - \vec{f}\|$ .

**49Conséquence:**  $\forall \vec{x} \in E, \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| = \min\{\|\vec{x} - \vec{f}\| / \vec{f} \in F\}$ ; autrement dit,  $\|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$  est la plus courte distance entre  $\vec{x}$  et n'importe quel vecteur de  $F$ .

**50Définition :** pour tout  $\vec{x} \in E, \min\{\|\vec{x} - \vec{f}\| / \vec{f} \in F\}$  est la distance entre  $\vec{x}$  et  $F$  notée  $d(\vec{x}, F)$ .

Cette distance est atteinte en un et un seul vecteur  $p_F(\vec{x})$ . Autrement dit, pour tout  $\vec{x} \in E, p_F(\vec{x})$  est l'unique vecteur de  $F$  vérifiant:  $\forall \vec{x} \in E, d(\vec{x}, F) = d(\vec{x}, p_F(\vec{x})) = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| = \|p_{F^\perp}(\vec{x})\|$ .

**51Exercice :** Calculons  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{\pi/2} (\sin t - at - b)^2 dt$

**52Proposition : projection orthogonale sur une droite, distance à une droite :**

Soit  $D$  la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\vec{u}$  de  $E$ . Soit  $\vec{x} \in E$ . Alors,  $p_D(\vec{x}) = \frac{(\vec{x}/\vec{u})}{(\vec{u}/\vec{u})} \vec{u}$  et  $d(\vec{x}, D) = \left\| \vec{x} - \frac{(\vec{x}/\vec{u})}{(\vec{u}/\vec{u})} \vec{u} \right\|$

## IV Hyperplan d'un espace euclidien.

Dans ce paragraphe,  $E$  est de dimension finie i.e.  $E$  est un espace euclidien.

**53Proposition-Définition: projection orthogonale sur une hyperplan, distance à un hyperplan quand  $E$  est de dimension finie** Soit  $H$  un hyperplan de l'espace euclidien  $E$ .

1.  $H^\perp$  est une droite vectorielle. Tout vecteur directeur (donc non nul) de cette droite  $H^\perp$  est appelé un vecteur normal à  $H$ .
2. Pour tout vecteur  $\vec{n}$  normal à  $H, d(\vec{x}, D) = \frac{|(\vec{x}/\vec{n})|}{\|\vec{n}\|}$

**54Equation d'un hyperplan dans une base orthonormée :** Soit  $B = (\vec{e}_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  une BON de  $E$ . Soit  $H$  un hyperplan de  $E$  de vecteur normal  $\vec{n} = \sum_{i=1}^n n_i \vec{e}_i$ . Alors,  $H = \{\vec{x} \in E / \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i n_i = 0\}$  et  $d(\vec{x}, D) = \frac{|\sum_{i=1}^n x_i n_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n n_i^2}}$ .  
équation de  $H$  dans  $B$  où  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$