PROGRAMME DE COLLE 27

Chapitre 20 Déterminant Cf programme précédent.

Chapitre 21 Séries numériques.

I généralités

Définitions :

- Série de terme général u_n , notation; somme partielle de rang n
- Série convergente , divergente -nature d'une série
- Somme d'une série convergente- reste de rang n
- Série grossièrement divergente.

Condition nécessaire de convergence- Réciproque fausse.

II Opérations

Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série complexe.

Influence des premiers termes sur la nature et sur la somme d'une série.

Combinaison linéaire de séries convergentes et relation entre les sommes.

Nature d'une série $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ tq $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.

Nature commune de $\sum_{n\geq 0} u_n$et $\sum_{n\geq 0} au_n$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et relation entre les sommes.

Nature commune de $\sum_{n\geq 0} u_n$et $\sum_{n\geq 0} \overline{u_n}$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et relation entre les sommes.

III Séries particulières

Séries géométriques $\sum_{n\geq 0} a^n$

Séries de Taylor $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$

Série exponentielle complexe $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

Série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. Cas particuliers $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim_{+\infty} \ln(N)$ *et* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

IV Séries réelles et à termes positifs

Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série à termes positifs : majoration de la suite des sommes partielles.

Trois théorèmes de comparaison :

1) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$ alors $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge.} \\ \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum_{n\geq 0} v_n \text{ diverge} \end{cases}$.
2) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n$ et $0 \leq v_n$ et $u_n = O(v_n)$ (en particulier, $u_n = o(v_n)$ *ou* $u_n \sim v_n$) alors $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge.} \\ \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum_{n\geq 0} v_n \text{ diverge} \end{cases}$
3) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n$ *et* $u_n \sim v_n$ alors ($\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge).

V Comparaison série-intégrale

Soit f une fonction **continue et décroissante et positive** sur $[n_0, +\infty[$. Alors,
la série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $(\int_{n_0}^{n} f(t)dt)$ converge.

VI Séries absolument convergentes

Définition : une série <u>absolument convergente</u>

Si la série de terme général u_n est absolument convergente alors la série de terme général u_n est convergente et $|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$. la réciproque est fausse.

VII Lien suite-série. Séries télescopiques.

La suite (u_n) converge **sietssi** la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

Exemples de calcul de somme de séries télescopiques : $S = \sum_{n=0}^{\infty} Arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$, $S = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+3n^2+2n}$, $S = \sum_{n=2}^{\infty} ln\left(\frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4+2n^3}\right)$, $S = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} tan(2^{-n}x)$ ... .

Questions de cours :

1. **Déterminant de Vandermonde.**
2. **Théorème de condition nécessaire mais pas suffisante de convergence d'une série**
3. **Théorème de comparaison série-intégrale**
4. **Théorème de convergence d'une série absolument convergente.**
5. **Premier et deuxième théorèmes de comparaison.**