# CORIGE DU DS 7

## Exercice 1

Soit $n$ un entier naturel non nul et $D_n$ le déterminant d'ordre $n$ suivant : $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \square & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \square & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \square & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$.

1. Calculer $D_n$ en fonction de $n$.
2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} D_k$. Montrer que $S_n = \begin{cases} -\frac{n}{2} \; si\; n\; pair \\ \frac{n+1}{2} \; si\; n\; impair \end{cases}$.
3. Les suites $(D_n)_{n\geq 1}\; et\; (S_n)_{n\geq 1}$ ont -elles une limite quand $n \to +\infty$ ? (justifier).

**4.** $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \square & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \square & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \square & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \square & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \square & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \square & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \vdots & \ddots & n \\ 1 & 1 & 1 & n & \cdots & 0 \end{vmatrix} \underbrace{\underbrace{\underbrace{=}_{L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}\; puis} =}_{L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - L_{n-3}\; puis.....et\; enfin} =}_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \square & n-1 & n^{(-1)^{1+n}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \square & \square & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \square & \square & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \square & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & \square & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \square & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$D_n = (-1)^{1+n} n \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \square & 1 & 1 & \square \\ \square & \square & \square & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} n.$

5. $S_n = \sum_{k=1}^{n} D_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} k = \underbrace{1-2}_{=-1} + \underbrace{3-4}_{=-1} + \underbrace{5-6}_{=-1} + \cdots .. (-1)^{1+n} n.$

Si $n$ est pair alors $S_n = \underbrace{1-2}_{=-1} + \underbrace{3-4}_{=-1} + \underbrace{5-6}_{=-1} + \cdots .. + \underbrace{(n-1)-n}_{=-1} = -\frac{n}{2}$.

Si $n$ est pair alors $S_n = \underbrace{1-2}_{=-1} + \underbrace{3-4}_{=-1} + \underbrace{5-6}_{=-1} + \cdots .. + \underbrace{(n-2)-(n-1)}_{=-1} + n = -\frac{(n-1)}{2} + n = \frac{n+1}{2}$.

**6.** $D_{2n} = (-1)^{1+2n} 2n = -2n \; et \; D_{2n+1} = (-1)^{2+2n}(2n+1) = 2n+1$. Donc $\lim_{n\to+\infty} D_{2n} = -\infty \neq +\infty = \lim_{n\to+\infty} D_{2n+1}$. Donc $(D_n)$ diverge sans limite.

$S_{2n} = -n \; et \; S_{2n+1} = n$. Donc $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = -\infty \neq +\infty = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}$. Donc $(S_n)$ diverge sans limite.

## Exercice 2

On pose $E = \mathbb{R}^3$ , $id = id_{\mathbb{R}^3}$ $et$ on définit deux applications $f \; et \; \varphi$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \varphi\big((x,y,z)\big) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z) \; et \; f\big((x,y,z)\big) = (y+z, x+z, x+y).$$

1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.
2. Donner une base de $Ker\varphi$ et une base de $Im\varphi$ . $Im\varphi$ et $Ker\varphi$ sont-ils supplémentaires dans $E$ ?
3. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \varphi^k = 3^{k-1}\varphi$.
4. Soit $F = \{a\varphi + bid / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ et déterminer sa dimension.
5. Montrer que $F$ est stable par composition.
6. Soit $g = a\varphi + bid \in F$. Montrer que : $g \in GL(E) \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ 3a + b \neq 0 \end{cases}$. Et le cas échéant, montrer que $g^{-1} \in F$.
7. Montrer que $(id, f)$ est une base de $F$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner expression de $f^n$ comme combinaison linéaire de $\varphi \; et \; id_E$.
9. Montrer que $f$ est un automorphisme de $E$ et déterminer une expression de $f^{-1}((x,y,z))$
10. Montrer que $Ker(f - 2id_E) \oplus Ker(f + id_E) = \mathbb{R}^3$ .
11. En déduire qu'il existe une base $B$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $mat_B f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On pose $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0) \; et \; e_3 = (0,0,1) \; et \; B_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, mat_{B_c}\varphi\big((x,y,z)\big)=\begin{pmatrix}x+y+z\\x+y+z\\x+y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\times mat_{B_c}(x,y,z)$.Donc $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et $mat_{B_c}\varphi=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=J$.

2. $J\sim_c\begin{pmatrix}\overbrace{1}^{f(e_1)}&\overbrace{0}^{f(e_2)-f(e_1)}&\overbrace{0}^{f(e_3)-f(e_1)}\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$. Donc $rg(\varphi)=1$ et $Im\varphi=vect((1,1,1))$ . Comme $e_1+e_2+e_3=(1,1,1)$ est non nul, $((1,1,1))$ est une base de $Im(\varphi)$. Le théorème du rang assure que dim $(Ker(\varphi))=2$. Or $f(e_2)-f(e_1)$=0= $f(e_3)-f(e_1)$. Donc $e_2-e_1$ et $e_3-e_1$sont deux vecteurs de $Ker(\varphi)$, ils sont clairement non colinéaires donc forment une famille libre et maximale de $Ker(\varphi)$. Donc $(\underbrace{e_2-e_1}_{(-1,1,0)},\underbrace{e_3-e_1}_{(-1,0,1)})$ est une base de $Ker(\varphi)$.

Concaténons ces deux bases et regardons si la famille obtenue est une base de $E$.

$det_{B_c}(e_1+e_2+e_3,e_2-e_1,e_3-e_1)=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&0&2\end{vmatrix}=4$. Donc $(e_1+e_2+e_3,e_2-e_1,e_3-e_1)$est une base de $E$ et par suite, $Im\varphi$ et $Ker\varphi$ sont supplémentaires dans $E$ .

3. $\forall k\geq 1, mat_{B_c}\varphi^k=J^k=3^{k-1}J=3^{k-1}mat_{B_c}\varphi=mat_{B_c}3^{k-1}\varphi$. Donc $\varphi^k=3^{k-1}\varphi$.

4. $F=\{a\varphi+bid/a,b\in\mathbb{R}^2\}=vect(id,\varphi)$. Comme $(id,\varphi)$ est une famille de vecteurs de $\mathscr{L}(E)$, $F$ est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ engendré par $(id,\varphi)$

De plus, $a\varphi+bid=0\Longrightarrow a\varphi(1,0,0)+bid(1,0,0)=(0,0,0)\Longrightarrow a(1,1,1)+b(1,0,0)=(0,0,0)\Longrightarrow a=b=0$. Donc $B_1=(id,\varphi)$ est libre et est donc une base de F. Ainsi, $dimF=2$.

5. Soit $a,b,u,v$ des réels.

$$\begin{aligned}(a\varphi+bid)\circ(u\varphi+vid)&=a\varphi\circ(u\varphi+vid)+bid\circ(u\varphi+vid)\\&\underset{\substack{car\ \varphi\ et\ id\\ sont\ linéaires}}{=}au.\varphi\circ\varphi+av.\varphi\circ id+bu.id\circ\varphi+bv.id\circ id\\&=au.3\varphi+av.\varphi+bu.\varphi+bv.id\\&=((3a+b)u+av).\varphi+bv.id\end{aligned}$$

Donc, $(a\varphi+bid)\circ(u\varphi+vid)\in F$. Ainsi, $F$ est stable par composition.

6. Soit $g=a\varphi+bid\in F$. Alors $mat_{B_c}g=amat_{B_c}\varphi+bmat_{B_c}id=\begin{pmatrix}a+b&a&a\\a&a+b&a\\a&a&a+b\end{pmatrix}=G$.

Et det $g=\begin{vmatrix}a+b&a&a\\a&a+b&a\\a&a&a+b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3a+b&a&a\\3a+b&a+b&a\\3a+b&a&a+b\end{vmatrix}=(3a+b)\begin{vmatrix}1&a&a\\1&a+b&a\\1&a&a+b\end{vmatrix}$

$$=(3a+b)\begin{vmatrix}1&a&a\\0&b&0\\0&0&b\end{vmatrix}=(3a+b)b^2.$$

Alors, $g\in GL(E)\Leftrightarrow \det g\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}b\neq 0\\3a+b\neq 0\end{cases}$.

Supposons que $\begin{cases}b\neq 0\\3a+b\neq 0\end{cases}$. Alors $g$ est un automorphisme de $E$. Pour que $(a\varphi+bid)\circ(u\varphi+vid)=id$, il suffit de choisir $u$ et $v$ tels que : $\begin{cases}(3a+b)u+av=0\\bv=1\end{cases}$ $i.e.$ $\begin{cases}u=-\frac{a}{b(3a+b)}\\v=\frac{1}{b}\end{cases}$. Donc $g^{-1}=-\frac{a}{b(3a+b)}\varphi+\frac{1}{b}id\in F$.

7. $f=\varphi-id\in F$. Et, $mat_{B_1}(id,f)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ est clairement inversible donc $B_2=(id,f)$est une base de $F$.

8. Soit $n\in\mathbb{N}. f=\varphi-id$ .Donc, comme $\varphi$ $et$ $id$ commutent, la formule du binôme de Newton assure que

$$\begin{aligned}f^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi^k\circ(-id)^{n-k}=(-id)^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\varphi^k\circ(-id)^{n-k}=(-1)^nid+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}\varphi\circ(-1)^{n-k}id\\&=(-1)^nid+\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}(-1)^{n-k}\right]\varphi=(-1)^nid+\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}(-1)^{n-k}\right]\varphi\\&=(-1)^nid+\left[\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k(-1)^{n-k}-\frac{(-1)^n}{3}\right]\varphi\\&=(-1)^nid+\left[\frac{1}{3}2^n-\frac{(-1)^n}{3}\right]\varphi=(-1)^nid+\left[\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right]\varphi.\end{aligned}$$

9. $f = \underbrace{1}_{=a}\varphi \underbrace{-1}_{=b} id \in F$ *donc* $b = -1 \neq 0$ *et* $3a + b = 2 \neq 0$. Ainsi, d'après 6., $f$ est un automorphisme de $E$ et
$f^{-1} = \frac{1}{2}\varphi - id = \frac{1}{2}(f + id) - id = \frac{1}{2}(f - id)$. Donc $f^{-1}\big((x,y,z)\big) = \frac{1}{2}(-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$.

10. $(x,y,z) \in Ker(f - 2id_E) \Leftrightarrow f(x,y,z) = 2(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1}} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ x = y \end{cases}.$

Donc, $Ker(f - 2id_E) = \{(y,y,y)/y\ réel\}$=$vect(1,1,1) = Im\varphi$.

11. $(x,y,z) \in Ker(f + id_E) \Leftrightarrow f(x,y,z) = -(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y - z.$

Donc, $Ker(f + id_E) = \{(-y - z, y, z)/y, z\ réels\}$=$vect(-1,1,0), (-1,01)) = Ker(\varphi)$.
J'en déduis par la question 2. que $Ker(f - 2id_E) \oplus Ker(f + id_E) = \mathbb{R}^3$.

12. Par concaténation des deux bases, $B = (\underbrace{e_2 - e_1}_{u_1}, \underbrace{e_3 - e_1}_{u_2}, \underbrace{e_1 + e_2 + e_3}_{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

De plus, $u_1 = e_2 - e_1 \in Ker(f + id_E)$ donc $f(u_1) = -u_1$ . De même, $f(u_2) = -u_2$ et $f(u_3) = 2u_3$.

Donc, $mat_B f$=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

## Exercice 3 **Dans tout l'exercice, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.**

Un polynôme unitaire est un polynôme non nul de coefficient dominant égal à 1.
On note $Id$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $\varphi$ l'application qui à tout $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \big((X^2 - 1)P\big)''$

1. Montrer que tout polynôme non nul est colinéaire à un unique polynôme unitaire.
2. Vérifier que : $\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + 4XP' + 2P$.
3. Montrer que $\varphi$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Donner la matrice $M$ de $\varphi$ dans la base canonique $B$ de $\mathbb{R}_n[X]$ .
5. Soit $\lambda$ un réel. Justifier que : il existe un polynôme $P$ non nul tel que $\varphi(P) = \lambda P$ si et ssi $det(M - \lambda I) = 0$ .
6. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe un polynôme unitaire $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\varphi(P_k) = (k + 2)(k + 1)P_k$ .
7. Montrer que la famille $B' = (P_k)_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ .
8. Ecrire la matrice $D$ de $\varphi$ dans cette nouvelle base $B'$.
9. Montrer que $D$ *et* $M$ sont semblables.

1. Soit $P$ un polynôme non nul. Posons $n = \deg(P)$ *et* $codom(P)$ son coefficient dominant ( réel non nul).
Soit $Q = \lambda P$ *tq* $\lambda \in \mathbb{R}^*$, colinéaire à $P$. Alors $deg(Q) = \deg(P)$ *et* $codom(Q) = \lambda\ codom(P)$.
Donc $Q$ *est unitaire si*etssi $\lambda = \frac{1}{codom(P)}$. Ainsi, $\frac{1}{codom(P)}P$ est l'unique polynôme unitaire colinéaire à $P$.

2. $\varphi(P) = \big((X^2 - 1)P\big)'' = ((X^2 - 1)'P + (X^2 - 1)P')' = (2XP + (X^2 - 1)P')'$
$\varphi(P) = (2X'P + 2XP' + (X^2 - 1)'P' + (X^2 - 1)P'') = (2P + 2XP' + 2XP' + (X^2 - 1)P'') = (X^2 - 1)P'' + 4XP' + 2P.$

3. $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg\big(\varphi(P)\big) \underbrace{\leq}_{\substack{il\ y\ a\ égalité \\ si\ \varphi(P) \neq 0}} \deg\big((X^2 - 1)P\big) - 2 = \deg(X^2 - 1) + \deg(P) - 2 = \deg(P) \leq n.$

Donc, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
De plus, soit $P$ et $Q$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $a$ et $b$ deux réels.
Alors $\varphi(aP + bQ) = (X^2 - 1)(aP'' + bQ'') + 4X(aP' + bQ') + 2(aP + bQ) = a(X^2 - 1)P'' + b(X^2 - 1)Q'' + a4XP' + b4XQ' + a2P + b2X = a\varphi(P) + b\varphi(Q)$.
Ainsi, $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Déterminons la matrice de $\varphi$ dans la base canonique $B = (1, X, X^2, \dots, X^n)$de $\mathbb{R}_n[X]$.
$si\ k \in [\![2, n]\!], \varphi(X^k) = \big((X^2 - 1)X^k\big)'' = (X^{k+2} - X^k)'' = (k + 2)(k + 1)X^k - k(k - 1)X^{k-2}$
et $\varphi(X) = \big((X^3 - X)\big)'' = 6X$ et $\varphi(1) = \big((X^2 - 1)\big)'' = 2$.

Donc, $M = mat_B\ \varphi$=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 12 & 0 & \ddots & 0 & \\ & \vdots & 0 & 20 & \ddots & -(n-1)(n-2) & 0 \\ & & \vdots & 0 & \ddots & 0 & -n(n-1) \\ & & & & & (n+1)n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (n+2)(n+1) \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

Donc $det\varphi = detM = \prod_{k=0}^{n}(k + 2)(k + 1) \neq 0$. J'en déduis que $\varphi$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. $M = mat_B\ \varphi$=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 12 & 0 & \ddots & 0 & \\ & \vdots & 0 & 20 & \ddots & -(n-1)(n-2) & 0 \\ & & \vdots & 0 & \ddots & 0 & -n(n-1) \\ & & & & & (n+1)n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (n+2)(n+1) \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

5. Soit $\lambda$ un réel.
il existe un polynôme $P$ non nul tel que $\varphi(P) = \lambda P$

si et ssi $Ker(\varphi-\lambda id)$ contient un polynôme non nul

sietssi $\varphi-\lambda id$ n'est pas injective

car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dim finie.

sietssi $\varphi-\lambda id$ n'est pas bijective

si et ssi $det(M-\lambda I)=0$ .

6. $det(M-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 6-\lambda & 0 & -6 & \square & \vdots & \vdots\\ \vdots & 0 & 12-\lambda & 0 & \ddots & 0 & \square\\ \square & \vdots & 0 & 20-\lambda & \ddots & -(n-1)(n-2) & 0\\ \square & \square & \vdots & 0 & \ddots & 0 & -n(n-1)\\ \square & \square & \square & \square & \square & (n+1)n-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (n+2)(n+1)-\lambda \end{vmatrix}=\prod_{k=0}^{n}[(k+2)(k+1)-\lambda]$.

Donc, $det(M-\lambda I)=0$ sietssi il existe $k\in[\![0,n]\!]$tel que $\lambda=(k+2)(k+1)$ sietssi $a\lambda\in\{2,6,12,\dots(n+2)(n+1)\}$.
Prenons $\lambda=(k+2)(k+1)$ tq $k\in[\![0,n]\!]$. Alors il existe un polynôme $P$ non nul tel que $\varphi(P)=\lambda P$.
Or, d'après 1., il existe un polynôme unitaire $P_k\in\mathbb{R}_n[X]$ colinéaire à $P$ $tel\ que\ P_k=\frac{1}{codom(P)}P$.
Alors, $\varphi(P_k)=\varphi\left(\frac{1}{codom(P)}P\right)=\frac{1}{codom(P)}\varphi(P)=\frac{1}{codom(P)}\lambda P=\lambda\frac{1}{codom(P)}P=\lambda P_k$. Donc $P_k$ convient.

7. Montrer que la famille $B'=(P_k)_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ .

$\forall k$, deg$P_k\le n$ Donc $B'$ est une famille de $\mathbb{R}_n[X]$ . Et $cardB'=n+1=dim\mathbb{R}_n[X]$. Il reste à prouver que $B'$ est libre.
Soit $k\in[\![0,n]\!]$. $P_k$ est un polynôme non nul de $Ker(\varphi-(k+2)(k+1)id)$. Cherchons une base de ce noyau :

$T=mat_B(\varphi-(k+2)(k+1)id)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} C_0 & C_1 & & & C_k & & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} a_{00} & * & * & \cdots & \cdots & & 0 & 0\\ \square & a_{11} & * & \square & a_{0k} & & \vdots & \vdots\\ 0 & \square & a_{22} & \square & \square & & \square & \square\\ \vdots & 0 & 0 & a_{k-1,k-1} & a_{0k-1} & \cdots & * & 0\\ \square & \vdots & \vdots & \square & 0 & & 0 & *\\ \square & \square & \square & \square & \square & & a_{n-1,n-1} & *\\ \square & \square & 0 & 0 & 0 & & 0 & a_{nn}\\ 0 & 0 & & & & & & \end{pmatrix}\end{array}$ est triangulaire supérieure avec les coefficients de la diagonale non nul sauf le coefficient de la kème colonne ( avec la convention que la première colonne est la 0ème).

En effectuant, $C_k\leftarrow C_k-\frac{a_{0k-1}}{a_{k-1,k-1}}\ C_{k-1}$, le coefficient $a_{0k-1}$s'annule et $T$ devient $T'_{\square}$ dont on nomme toujours $a'_{ij}$les coefficients . Puis en effectuant, sur $T_1$, $C_k\leftarrow C_k-\frac{a'_{0k-2}}{a'_{k-2,k-2}}\ C_{k-2}$, le coefficient $a'_{0k-2}$ s'annule et $T_1$ devient $T_2$ ...

Ainsi, $T\sim_C T^{(k)}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} C_0 & C_1 & & & C_k & & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} a_{00} & * & * & \cdots & 0 & & 0 & 0\\ \square & a_{11} & * & \square & 0 & & \vdots & \vdots\\ 0 & \square & a_{22} & \square & \square & & \square & \square\\ \vdots & 0 & 0 & a_{k-1,k-1} & 0 & \cdots & * & 0\\ \square & \vdots & \vdots & \square & 0 & & 0 & *\\ \square & \square & \square & \square & \square & & a_{n-1,n-1} & *\\ \square & \square & 0 & 0 & 0 & & 0 & a_{nn}\\ 0 & 0 & & & & & & \end{pmatrix}\end{array}$.

Donc $rgT=n$ et le théorème du rang assure que $dimKer(T)=1$.
De plus, la colonne $C_k$ de $T^{(k)}$ est nulle et contient les composantes dans $B$ de $(\varphi-(k+2)(k+1)id)(X^k-\frac{a_{0k-1}}{a_{k-1,k-1}}X^{k-1}-\frac{a'_{0k-2}}{a'_{k-2,k-2}}\ X^{k-2}\dots)$. Donc, $(\varphi-(k+2)(k+1)id)\left(X^k-\frac{a_{0k-1}}{a_{k-1,k-1}}X^{k-1}-\frac{a'_{0k-2}}{a'_{k-2,k-2}}\ X^{k-2}\dots\right)=0\ et\ X^k-\frac{a_{0k-1}}{a_{k-1,k-1}}X^{k-1}-\frac{a'_{0k-2}}{a'_{k-2,k-2}}\ X^{k-2}$ ...est un vecteur non nul de $Ker(\varphi-(k+2)(k+1)id)$ et par conséquent, $(X^k-\frac{a_{0k-1}}{a_{k-1,k-1}}X^{k-1}-\frac{a'_{0k-2}}{a'_{k-2,k-2}}\ X^{k-2}\dots)$ est une base de $Ker(\varphi-(k+2)(k+1)id)$. J'en déduis que les polynômes de $Ker(\varphi-(k+2)(k+1)id)$ sont de degré $k$ ou nul. Donc $P_k$ qui est non nul ( car unitaire) est de degré $k$.
Le famille $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est donc échelonnée en degré et est donc libre. J'en conclus que $B'=(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. $\varphi(P_k)=(k+2)(k-1)P_k$. Donc ,$D=diag\big(2,6,12,\dots,(n+2)(n+1)\big)$.

9. $D=mat_{B'}\varphi\underbrace{=}_{\substack{formule\\de\\changement\\de\ bases}}mat_{B'}B\times mat_B\ \varphi\times mat_B\ B'\underbrace{=}_{\substack{en\ posant\\P=mat_B\,B'}}P^{-1}MP$. Donc $D$ et $M$ sont semblables.

## Exercice 4

Dans tout le problème, $E$ est un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ . On note $O$ l'endomorphisme nul et Pour $f$ endomorphisme de $E$ et $k$ entier naturel non nul, on note $f^0 = id_E$ et $f^k = f \circ f \circ \ldots \circ f = f^{k-1} \circ f$.
$f$ étant un endomorphisme de $E$ , on étudie l'existence et la valeur d'un plus petit entier $p$ compris entre $1$ et $n$ tel que : $Ker(f^p) \oplus Im(f^p) = E$.

**Partie A : Etude d'exemples.**

1. Si $f$ est un endomorphisme bijectif, quelle est la valeur de $p$ ?
2. Dans cette question $E = \mathbb{R}^3$ et $f$ est l'endomorphisme $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $p = 2$ .
3. Dans cette question, $E$ est un $\mathbb{R}$-e-v de dimension 3 rapporté à une base $B$=$(e_1, e_2, e_3)$ et $f$ est l'endomorphisme de $E$ tel que $f(e_1) = e_1 - e_2$ , $f(e_2) = -2e_2 - e_3$ , $f(e_3) = -e_1 + 3e_2 + e_3$ .
   **a.** Montrer qu'il existe une base $B'$ de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   **b.** En déduire la valeur de $p$ .
4. Dans cette question $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $f$ est l'application définie sur $E$ par : $f(P) = P(X) - P(X-1)$.
   **a.** Montrer que f estun endomorphisme de $E$.
   **b.** Décrire matriciellement $f^2, f^3, f^4, f^5$.
   **c.** En déduire la valeur de $p$.

1. Si $f$ est bijectif alors $Imf = E$ et $Kerf = \{O\}$ donc $Imf \oplus Kerf = E$. Donc $p = 1$.
2. $mat_B f = A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ et $mat_B f^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ où $B$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$A \underbrace{\sim_c}_{C_3 \leftarrow C_3 + C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $rg(f) = rg(A) = 2$ et $Imf = vect\Big(\underbrace{(4,-2,-4), (-1,-1,1)}_{\substack{\text{génératrice de } Imf \text{ et minimale dans } Imf \\ \text{donc base de } Imf}}\Big)$.

Alors, par le théorème du rang, $dimKer(f) = 1$ et $f\big((-1,1,1)\big) = (0,0,0)$. Donc $\big((-1,1,1)\big)$ est une base de $Kerf$.Mais, $(-1,1,1) = -\frac{1}{3}\big((4,-2,-4) + (-1,-1,1)\big)$. Donc$(-1,1,1) \in Kerf \cap Imf$. J'en déduis que $Kerf$ et $Imf$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
Donc $rg(f^2) = rg(A^2) = 1$ et $Imf = vect\big((-2,-2,2)\big) = vect\Big(\underbrace{(-1,-1,1)}_{\substack{\text{génératrice de } Imf \text{ et minimale dans } Imf \\ \text{donc base de } Imf}}\Big)$.

Alors, par le théorème du rang, $dimKer(f) = 2$ . De plus $f\big((1,1,0)\big) = f\big((0,2,1)\big) = (0,0,0)$. Donc $(0,2,1)$ et $(1,1,0)$ sont deux vecteurs de $Ker(f)$, non colinéaires. $\big((0,2,1), (1,1,0)\big)$ est donc une base de $Kerf$.
Concaténons ces deux bases et étudions si la famille ainsi obtenue est une base de $\mathbb{R}^3$

$det_B\big((0,2,1), (1,1,0), (-1,-1,1)\big) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Donc, $\big((0,2,1), (1,1,0), (-1,-1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. J'en déduis que $Ker(f^2) \oplus Im(f^2) = E$. Ainsi, $p = 2$.

3. Dans cette question, $E$ est un $\mathbb{R}$-e-v de dimension 3 rapporté à une base $B$=$(e_1, e_2, e_3)$ et $f$ est l'endomorphisme de $E$ tel que $f(e_1) = e_1 - e_2$ , $f(e_2) = -2e_2 - e_3$ , $f(e_3) = -e_1 + 3e_2 + e_3$ . Donc $M = mat_B f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a.Supposons qu'il existe une base $B' = (u_1, u_2, u_3)$ de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $f(u_1) = 0$ , $f(u_2) = u_1$ et $f(u_3) = u_2$. Donc $f^2(u_2) = 0$ et $f^2(u_3) = u_1$. Donc $u_3$ est un vecteur non nul de $E$ tel que : $f(u_3)$ et $f^2(u_3)$ sont non nuls.

Cherchons un tel vecteur : tout d'abord, $M^2 = mat_B f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $M^3 = 0$.

Donc $u_3 = e_1$ vérifie $f^2(u_3) \neq 0$. Posons $u_2 = f(e_1) = e_1 - e_2$ et $u_1 = f^2(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$.

$P = mat_B(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc, $rg(P) = 3$ donc $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $E$. De plus,

$N = mat_{B'} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $f(u_1) = f^3(e_1) \underbrace{=}_{car\ M^3=0} 0$ et $f(u_2) = f^2 = (e_1) = u_1$ et $f(u_3) = f(e_1) = u_2$.

Donc $B'$ convient.

A l'aide de $N$ et avec la même méthode que dans la question 2., je peux affirmer que $(u_1)$ est une base de $Ker(f)$ et $(u_1, u_2)$ est une base de $Im(f)$. Par suite, Donc, $u_1 \in Kerf \cap Imf$. J'en déduis que $Kerf$ $et$ $Imf$ ne sont pas supplémentaires dans $E$.

A l'aide de $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. et avec la même méthode que dans la question 2., je peux affirmer que $(u_1, u_2)$ est une base de $Ker(f)$ et $(u_1)$ est une base de $Im(f)$. Par suite, Donc, $u_1 \in Kerf \cap Imf$. J'en déduis que $Kerf$ $et$ $Imf$ ne sont pas supplémentaires dans $E$.

A l'aide de $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. je peux affirmer que $E = Ker(f)$ et $\{0\} = Im(f)$. Par suite, $Ker(f^3) \oplus Im(f^3) = E$. Ainsi, $p = 3$.

4. Dans cette question $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $f$ est l'application définie sur $E$ par : $f(P) = P(X) - P(X-1)$.

a.Introduisons la base canonique $B = (1, X, X^2, X^3)$de $\mathbb{R}_3[X]$. $f(1) = 0 \in E, f(X) = X - (X-1) = 1 \in E$ $et$ $f(X^2) = X^2 - (X-1)^2 = 2X - 1 \in E$ et $f(X^3) = X^3 - (X-1)^3 = 3X^2 - 3X + 1 \in E$.

De plus, $f$ est linéaire car $f(aP + bQ) = aP(X) + bQ(X) - \big(aP(X-1) + bQ(X-1)\big) = a\big(P(X) - P(X-1)\big) + b\big(Q(X) - Q(X-1)\big) = af(P) + bf(Q)$.

Donc si $P = a + bX + cX^2 + dX^3, alors\ f(P) \overset{car\ f\ linéaire}{\cong} a\overbrace{f(1)}^{\in E} + b\overbrace{f(X)}^{\in E} + c\overbrace{f(X^2)}^{\in E} + d\overbrace{f(X^3)}^{\in E} \in E$ car $E$ est stable par combinaison linéaire. J'en conclus que $f$ est un endomorphisme de $E$.

b. D'après ce qui précède, $M = mat_B f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $et\ mat_B f^2 = M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $et\ mat_B f^3 = M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $et\ M^4 = M^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, $f^4 = f^5 = O$.

c.$1 \in Kerf \cap Imf$ $(\ car\ 1 = f(X) et\ f(1) = 0)$. Donc, que $Kerf$ $et$ $Imf$ ne sont pas supplémentaires dans $E$.

$1 \in Kerf^2 \cap Imf^2 \left( car\ \ f^2(1) = 0\ et\ 2 = f(X^2) donc\ 1 = f\left(\frac{X^2}{2}\right) \right)$. Donc, que $Kerf^2$ $et$ $Imf^2$ ne sont pas supplémentaires dans $E$.

$1 \in Kerf^3 \cap Imf^3 \left( f^3(1) = 0\ et\ 6 = f(X^3) donc\ 1 = f\left(\frac{X^3}{6}\right) \right)$. Donc, que $Kerf$ $et$ $Imf$ ne sont pas supplémentaires dans $E$.

Comme $f^4 = O$. je peux affirmer que $E = Ker(f)$ et $\{0\} = Im(f)$. Par suite, $Ker(f^4) \oplus Im(f^4) = E$. Ainsi, $p = 4$.

**Partie B : Cas général .**

**On suppose que $f$ n'est pas bijectif .**

1. Comparer au sens de l'inclusion les sous – espaces vectoriels de $E$ suivants : $Ker(f^q)$ $et$ $Ker(f^{q+1})$ puis $Im(f^q)$ $et$ $Im(f^{q+1})$.
2. Justifier l'existence d'un plus petit entier $q \geq 1$ tel que : $Ker(f^q) = Ker(f^{q+1})$ et montrer que $q \leq n$ .
3. On suppose **dans cette question** que : $q = n$.
   - **a.** Montrer que $f^n$ est l'endomorphisme nul et préciser la dimension de $Ker(f)$.
   - **b.** Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{x_0}$ tel que : $B = (\overrightarrow{x_0}, f(\overrightarrow{x_0}), f^2(\overrightarrow{x_0}), \dots, f^{n-1}(\overrightarrow{x_0}))$ soit une base de $E$.
   - **c.** Donner la matrice de $f$ dans cette base $B$.
   - **d.** Justifier que :$\forall k \in [\![1, n-1]\!], f^{n-1}(\overrightarrow{x_0}) \in Im(f^k) \cap Ker(f^k)$
   - **e.** Conclure que $p = q = n$ .
4. Montrer que : pour tout entier $k \geq q$, on a : $Ker(f^k) = Ker(f^q)$ et $Im(f^k)$ $et$ $Im(f^q)$.
5. En déduire que : $Ker(f^q) \oplus Im(f^q) = E$. Que peut-on en déduire sur $p$ ?
6. Montrer que : pour tout entier $k$, on a l'implication suivante : $Ker(f^k) \oplus Im(f^k) = E \Rightarrow \begin{cases} Im(f^{2k}) = Im(f^k) \\ Ker(f^{2k}) = Ker(f^k) \end{cases}$.
7. En déduire que $p$ existe et que $p = q$.

1. $Ker(f^q) \subset Ker(f^{q+1})$ $et$ $Im(f^{q+1}) \subset Im(f^q)$ .

En effet,

$x \in Ker(f^q) \Rightarrow f^q(x) = 0 \Rightarrow f(f^q(x)) = f(0) \Rightarrow f^{q+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker(f^{q+1})$.

$x \in Im(f^{q+1}) \Rightarrow \exists t \in E / x = f^{q+1}(t) \Rightarrow \exists t \in E / x = f^q(f(t)) \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{en\ posant \\ z=f(t)}} \exists z \in E / x \in Im(f^q)$ .

2. Notons $d_q = \dim\big(Ker(f^q)\big)$. Comme $\{O\} \subset Ker(f^q) \subset Ker(f^{q+1}) \subset E, 0 \leq d_q \leq d_{q+1} \leq n$. La suite $(d_q)$ est une suite d'entiers naturels, croissante et majorée donc convergente. J'en déduis que cette suite $(d_q)$ est stationnaire. IL existe donc un entier $q_0 \in [\![1, n]\!]$tel que $d_{q_0} = d_{q_0+1}$ $et$ un plus petit entier $q \geq 1$ tel que : $d_q = d_{q+1}$. Comme $dimKer(f^{q_0+1}) =$

$dimKer(f^{q_0})$ et $Ker(f^{q_0})$ est un ss-e-v de $Ker(f^{q_0+1})$, $Ker(f^{q_0}) = Ker(f^{q_0+1})$.Il existe donc un plus petit entier $q \in [\![1, q_0]\!]$tel que : $Ker(f^q) = Ker(f^{q+1})$. Comme $q_0 \in [\![1,n]\!]$ et $q \leq q_0$, $q \in [\![1,n]\!]$.

**4.** On suppose **dans cette question** que : $q = n$.

**a.** $n$ est le plus petit entier tel que : $Ker(f^n) = Ker(f^{n+1})$. Donc pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $Ker(f^k) \neq Ker(f^{k+1})$et $d_k < d_{k+1}$. Alors $1 \leq d_1 < d_2 < \cdots . < d_n \leq n$. Comme il n'existe que n valeurs distinctes entre 1 et nb , nécessairement, $d_k = k$ . $En\ particulier,$

- $d_n = n\ donc, Ker(f^n) = E$ ce qui signifie que $f^n$ est l'endomorphisme nul.
- $d_1 = 1\ i.e., dimKer(f) = 1.$

b.Comme $f^{p-1} \neq O_{\mathscr{L}(E)}$ , il existe $\vec{x} \in E$ tel que $f^{p-1}(\vec{x}) \neq \overrightarrow{O_E}$.

Comme $f^p = O$ , $\forall k \geq p, f^{p+k} = f^k \circ f^p \overset{\substack{car\ f^p=0\ et\ f^k linéaire\ donc \\ f^k(\overrightarrow{0_E})=\overrightarrow{0_E}}}{\widehat{=}} O_{\mathscr{L}(E)}$. Donc, $\forall k \geq p, f^{p+k}(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$.

Montrer que : $B = (\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \ldots, f^{p-1}(\vec{x}))$ est libre.

Soit $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels tels que $\lambda_0\vec{x} + \lambda_1 f(\vec{x}) + \lambda_2 f^2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$ $(**)$.

Composons par $f^{p-1}$ : $f^{p-1}\left(\lambda_0\vec{x} + \lambda_1 f(\vec{x}) + \lambda_2 f^2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(\vec{x})\right) = f^{p-1}(\overrightarrow{O_E})$. Cela donne, en utilisant la linéarité de $f^{p-1}$, $\lambda_0 f^{p-1}(\vec{x}) + \lambda_1 f^p(\vec{x}) + \lambda_2 f^{p+1}(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{2p-2}(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$. Comme $f^p(\vec{x}) = f^{p+1}(\vec{x}) = \cdots = f^{2p-2}(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$, j'obtiens : $\lambda_0 f^{p-1}(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$. Or, $f^{p-1}(\vec{x}) \neq \overrightarrow{O_E}$.Donc nécessairement, $\lambda_0 = 0$. Alors, $(**)$ s'écrit : $\lambda_1 f(\vec{x}) + \lambda_2 f^2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$.

Composons par $f^{p-2}$ : $f^{p-2}\left(\lambda_1 f(\vec{x}) + \lambda_2 f^2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(\vec{x})\right) = f^{p-1}(\overrightarrow{O_E})$. Cela donne, en utilisant la linéarité de $f^{p-2}$,

$\lambda_1 f^{p-1}(\vec{x}) + \lambda_2 f^p(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{2p-2}(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$. Comme $f^p(\vec{x}) = f^{p+1}(\vec{x}) = \cdots = f^{2p-2}(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$, j'obtiens : $\lambda_1 f^{p-1}(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$ puis $\lambda_1 = 0$. Alors, $(**)$ s'écrit $\lambda_2 f^2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$. On itère ce précédé… A la dernière étape, après avoir montré que $\lambda_0 = \lambda_1 = .. = \lambda_{p-2} = 0$ , $(**)$ s'écrit $\lambda_{p-1} f^{p-1}(\vec{x}) = \overrightarrow{O_E}$ et j'en déduis $\lambda_{p-1} = 0$.

Je peux ainsi conclure que $B = (\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \ldots, f^{p-1}(\vec{x}))$ est libre.

J'en conclus que $B$ est libre et finalement $B$ est une base de E. Ainsi, $\overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{x_{\square}}$ convient.

**5.** Ecrire les matrices de $u, u^2, .., u^{n-1}$ dans la base $B$.

$$c.mat_B f = \begin{pmatrix} \overbrace{0}^{f(\overrightarrow{x_0})} & \overbrace{0}^{f(f(\overrightarrow{x_0}))} & \overbrace{0}^{f(f^2(\overrightarrow{x_0}))} & \overbrace{0} & \overbrace{0}^{f(f^{n-2}(\overrightarrow{x_0}))} & \overbrace{0}^{f(f^{n-1}(\overrightarrow{x_0}))} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \square & \vdots & 0 & \ddots & \square & 0 \\ \square & \square & \vdots & \vdots & 0 & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overrightarrow{x_0} \\ f(\overrightarrow{x_0}) \\ f^2(\overrightarrow{x_0}) \\ \vdots \\ \square \\ \square \\ f^{n-1}(\overrightarrow{x_0}) \end{array} \quad \text{car } f(f^k(\overrightarrow{x_0})) = f^{k+1}(\overrightarrow{x_0})$$

**d.** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$f^{n-1}(\overrightarrow{x_0}) \underbrace{=}_{car\ n-1-k \geq 0} f^k\left(f^{(n-1)-k}(\overrightarrow{x_0})\right) \in Im(f^k)$ .

$f^k(f^{n-1}(\overrightarrow{x_0})) = f^{k+n-1}(\overrightarrow{x_0}) \underbrace{=}_{\substack{car\ k+n-1 \geq n \\ et\ f^n=0\ dc\ f^{n+1}=f^{n+2}=\cdots=0}} \vec{0}$ . Donc, $f^{n-1}(\overrightarrow{x_0}) \in Ker(f^k)$.

J'en déduis que $Ker(f^k)$ et $Im(f^k)$ ne sont pas en somme directe et ne sont donc pas supplémentaires dans $E$. Donc $q \geq n$. Enfin, $f^n = 0\ donc\ Ker(f^n) = E\ et\ Im(f^n) = \{0\}$. Et ainsi, $q = n = p$. .

**5.** $q$ est le plus petit entier non nul tel que : $Ker(f^q) = Ker(f^{q+1})$ .

Montrons par récurrence que : pour tout entier $k \geq q$, on a $H(k)$ : "$Ker(f^k) = Ker(f^q)$" et $Im(f^k)\ et\ Im(f^q)$.

Init : $H(q)$ est trivialement vraie.

Propagation ; soit un entier $k \geq q$. Supposons $H(k)$ vraie . Je sais que $Ker(f^k) \subset Ker(f^{k+1})$. De plus, soit $x \in Ker(f^{k+1})$;alors $0 = f^{k+1}(x) = f^{q+1}(f^{k-q}(x))$ donc $f^{k-q}(x) \in Kerf^{q+1}$.Or $Kerf^{q+1} = Kerf^q$. Donc $f^{k-q}(x) \in Kerf^q$ i.e. $f^q(f^{k-q}(x)) = 0$ i.e. $f^k(x) = 0$ ; donc, $x \in Ker(f^{k+1})$. Donc, $Ker(f^{k+1}) \subset Ker(f^k)$ $et$ finalement, $Ker(f^k) = Ker(f^{k+1})$.Comme $Ker(f^k) = Ker(f^q)$, $Ker(f^{k+1}) = Ker(f^q)$.

Ccl : pour tout entier $k \geq q$, $Ker(f^k) = Ker(f^q)$.

Soit $k \geq q$ . Le théorème du rang assure que $dimIm(f^k) = dimE - dimKer(f^k) \overset{\substack{car \\ Ker(f^k)=Ker(f^q)}}{\widehat{=}} dimE - dimKer(f^q) = dim\ Im(f^q)$. Comme de plus, $Im(f^k)$ est un ss-e-v de $Im(f^q)$. Je peux conclure que $Im(f^k) = Im(f^q)$.

**6.** Comme $dimKer(f^q) + dimIm(f^q) = dimE$ ( $théo\ du\ rang$), il suffit de montrer que $Ker(f^q) \cap Im(f^q) = \{0\}$ pour prouver que $Ker(f^q) \oplus Im(f^q) = E$.

Le vecteur nul est dans $Ker(f^q) \cap Im(f^q)$ puisque $f^q(0) = 0$.

Soit $x \in Ker(f^q) \cap Im(f^q)$. Alors $f^q(x) = 0\ et$ il existe $t \in E\ tq$: $x = f^q(t)$. Donc, $f^{2q}(t) = 0$. Alors $t \in Ker(f^{2q})$. Or, $Ker(f^q) = Ker(f^{2q})$.Donc $t \in Ker(f^q)$.Alors, $x = f^q(t) = 0$. Ainsi, $Ker(f^q) \cap Im(f^q) = \{0\}$.

J'en conclus que $Ker(f^q) \oplus Im(f^q) = E$ et par suite, $p$ existe alors $p \leq q$.

**7.** Soit k un entier naturel. Supposons que $Ker(f^k) \oplus Im(f^k) = E$. Je sais que $Im(f^{2k}) \subset Im(f^k)$.
Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in Im(f^k)$. Donc, $\exists t \in E / x = f^k(t)$. Comme $Ker(f^k) \oplus Im(f^k) = E$ , il existe $u \in Ker(f^k)$ *et* $y \in Im(f^k)$ tq : $t = u + y$ et$\exists v \in E/\ y = f^k(v)$ . Donc, $x = f^k(t) = f^k(u) + f^k(y) = f^k(y) = f^{2k}(v)$. Donc, $x \in Im(f^{2k})$.Ainsi, $Im(f^{2k}) = Im(f^k)$. Alors le théorème du rang assure que $\dim(Ker(f^{2k})) = \dim\ (Ker(f^k))$ et comme $Ker(f^k)\ est\ un\ ss-e-v\ de\ Ker(f^{2k})$, nécessairement, $Ker(f^{2k}) = Ker(f^k)$.Comme $Ker(f^k)$ est un ss-ev de $Ker(f^{k+1})$, lui-même ss-e-v de $Ker(f^{k+1})$, … , on peut donc affirmer que $Ker(f^k)$= $Ker(f^{k+1})$ =…= $Ker(f^{2k})$ et par suite, $Im(f^k)$= $Im(f^{k+1})$ =…= $Im\ (f^{2k})$ dès que $Ker(f^k) \oplus Im(f^k) = E$.

**8.** Comme $p$ existe et $Ker(f^p) \oplus Im(f^p) = E$, $Ker(f^p)$= $Ker(f^{p+1})$ donc $q$ existe et $q \leq p$. Ainsi, $p = q$.

# . Fin .