DS 7

.

DUREE 4 heures. Calculatrice interdite. Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso).
Les exercices sont indépendants.

QUELQUES CONSIGNES :

- Traitez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. Ils sont indépendants.
- Justifiez toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :

✓ Vous n'avez pas affirmé d'emblée que le résultat à démontrer ou que l'équation à résoudre est toujours vraie…. Lorsque vous souhaitez transformer l'énoncé, raisonnez par équivalence. Lorsque vous résolvez une équation, raisonnez par équivalence.

✓ Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire.

✓ Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, …) sont utilisés et utilisés à bon escient.

✓ La phrase réponse, attendue et soulignée ou encadrée ou surlignée, répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé, n'hésitez pas à en faire part au professeur surveillant (moi !!!).

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul et D_n le déterminant d'ordre n suivant : $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$.

1. Calculer D_n en fonction de n.
2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} D_k$. Montrer que $S_n = \begin{cases} -\frac{n}{2} & si\ n\ pair \\ \frac{n+1}{2} & si\ n\ impair \end{cases}$.
3. Les suites $(D_n)_{n\geq 1}\ et\ (S_n)_{n\geq 1}$ ont -elles une limite quand $n \to +\infty$? (justifier).

Exercice 2

On pose $E = \mathbb{R}^3$, $id = id_{\mathbb{R}^3}$ et on définit deux applications $f\ et\ \varphi$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \varphi\big((x,y,z)\big) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)\ et\ f\big((x,y,z)\big) = (y+z, x+z, x+y).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Donner une base de $Ker\varphi$ et une base de $Im\varphi$. $Im\varphi$ et $Ker\varphi$ sont-ils supplémentaires dans E ?
3. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \varphi^k = 3^{k-1}\varphi$.
4. Soit $F = \{a\varphi + bid / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ et déterminer sa dimension.
5. Montrer que F est stable par composition.
6. Soit $g = a\varphi + bid \in F$. Montrer que : $g \in GL(E) \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ 3a + b \neq 0 \end{cases}$. Et le cas échéant, montrer que $g^{-1} \in F$.
7. Montrer que (id, f) est une base de F.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner expression de f^n comme combinaison linéaire de $\varphi\ et\ id_E$.
9. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer une expression de $f^{-1}((x,y,z))$
10. Montrer que $Ker(f - 2id_E) \oplus Ker(f + id_E) = \mathbb{R}^3$.
11. En déduire qu'il existe une base B de $\mathbb{R}^3$ telle que $mat_B f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un polynôme unitaire est un polynôme non nul de coefficient dominant égal à 1.
On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit φ l'application qui à tout P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \left((X^2-1)P\right)''$

1. Montrer que tout polynôme non nul est colinéaire à un unique polynôme unitaire.
2. Vérifier que : $\varphi(P) = (X^2-1)P'' + 4XP' + 2P$.
3. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Donner la matrice M de φ dans la base canonique B de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Soit λ un réel. Démontrer que : il existe un polynôme P non nul tel que $\varphi(P) = \lambda P$ si et ssi $det(M-\lambda I) = 0$.
6. Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, il existe un polynôme unitaire $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P_k) = (k+2)(k+1)P_k$.
7. Montrer que la famille $B' = (P_k)_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
8. Ecrire la matrice D de φ dans cette nouvelle base B'.
9. Justifier que D et M sont semblables.

Exercice 4

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On note O l'endomorphisme nul.
f étant un endomorphisme de E , on étudie l'existence et la valeur d'un plus petit entier p compris entre 1 et n tel que : $Ker(f^p) \oplus Im(f^p) = E$.

Partie A : Etude d'exemples.

1. Si f est un endomorphisme bijectif, quelle est la valeur de p ?
2. Dans cette question $E = \mathbb{R}^3$et f est l'endomorphisme $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $p = 2$.
3. Dans cette question, E est un $\mathbb{R}$-e-v de dimension 3 rapporté à une base B=(e_1, e_2, e_3) et f est l'endomorphisme $de\ E$ tel que $f(e_1) = e_1 - e_2$, $f(e_2) = -2e_2 - e_3$, $f(e_3) = -e_1 + 3e_2 + e_3$.
   a. Montrer qu'il existe une base B' de E dans laquelle la matrice de f est $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   b. En déduire la valeur de p .

4. Dans cette question $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f est l'application définie sur E par : $f(P) = P(X) - P(X-1)$.
   a. Décrire matriciellement f^2, f^3, f^4, f^5.
   b. En déduire la valeur de p.

Partie B : Cas général .
On suppose que f n'est <u>pas bijectif .</u>

1. Comparer au sens de l'inclusion les sous – espaces vectoriels de E suivants : $Ker(f^q)\ et\ Ker(f^{q+1})$ puis $Im(f^q)\ et\ Im(f^{q+1})$.
2. Justifier l'existence d'un plus petit entier $q \geq 1$ tel que : $Ker(f^q) = Ker(f^{q+1})$ et montrer que $q \leq n$.
3. On suppose **dans cette question uniquement** que : $q = n$.
   a. Montrer que f^n est l'endomorphisme nul et préciser la dimension de $Ker(f)$.
   b. Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{x_0}$ tel que : $B = (\overrightarrow{x_0}, f(\overrightarrow{x_0}), f^2(\overrightarrow{x_0}), \dots, f^{n-1}(\overrightarrow{x_0}))$ soit une base de E.
   c. Donner la matrice de f dans cette base B.
   d. Justifier que :$\forall k \in [\![1, n-1]\!], f^{n-1}(\overrightarrow{x_0}) \in Im\left(f^k\right) \cap Ker\left(f^k\right)$
   e. Conclure que $p = q = n$.
4. Montrer que : pour tout entier $k \geq q$, $Ker\left(f^k\right) = Ker(f^q)$ et $Im\left(f^k\right)\ et\ Im(f^q)$.
5. En déduire que : $Ker(f^q) \oplus Im(f^q) = E$. En déduire que p existe et comparer p et q.
6. Montrer que : pour tout entier k, on a l'implication suivante : $Ker(f^k) \oplus Im(f^k) = E \Rightarrow \begin{cases} Im(f^{2k}) = Im(f^k) \\ Ker(f^{2k}) = Ker(f^k) \end{cases}$.
7. En déduire que $p = q$.

. Fin .