# Corrigé du DL 13

**Exercice** Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Calculer $\Delta_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \begin{matrix} a & b \end{matrix} & ⋰ & 0 \\ \vdots & \square & \begin{matrix} b & a \end{matrix} & \square & \vdots \\ 0 & ⋰ & \square & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$ déterminant d'ordre $2n$.

$$\Delta_n(a,b) = \begin{vmatrix} a^+ & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \begin{matrix} a & b \end{matrix} & ⋰ & 0 \\ \vdots & \square & \begin{matrix} b & a \end{matrix} & \square & \vdots \\ 0 & ⋰ & \square & \ddots & 0 \\ b^{(-1)^{2n+1}} & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = a\underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \square & \square & \vdots & \vdots \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^+ \end{vmatrix}}_{\det d'ordre\ 2n-1} + \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1} b \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b^{(-1)^{2n-1+1}} \\ a & 0 & b & 0 \\ \square & \square & \vdots & \vdots \\ 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & a & 0 \end{vmatrix}}_{\det d'ordre\ 2n-1}$$

$= a^2 \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ \square & \square & \square \\ b & 0 & a \end{vmatrix}}_{\det d'ordre\ 2n-2} - b^2 \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ \square & \square & \square \\ b & 0 & a \end{vmatrix}}_{\det d'ordre\ 2n-2} = (a^2-b^2)\Delta_{n-1}(a,b)$. La suite $(\Delta_n(a,b))$ est donc géométrique de raison $(a^2-b^2)$. Ainsi,

$\forall n, \Delta_n(a,b) = (a^2-b^2)^{n-1}\Delta_1(a,b) = (a^2-b^2)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2-b^2)^n$.

**PROBLEME** Dans tout le problème, $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension 3** .

Pour $u$ endomorphisme de $E$ et $n$ entier naturel non nul , on note $u^n = u \circ u \circ \ldots \circ u = u^{n-1} \circ u$ ($n$ fois) .
On note $M_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 , $GL_3(\mathbb{R})$l'ensemble des matrices inversibles de $M_3(\mathbb{R})$ et $I$ la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$.
**Définition**: Pour deux matrices $A$ et $B$ de $M_3(\mathbb{R})$, on dit que la matrice $A$ est semblable à la matrice $B$ lorsqu'il existe une matrice $P$ de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$.

## *PARTIE I*

**1.** Soit $(A,B,C) \in M_3(\mathbb{R})^3$.
Montrer que :

**a.** $A$ est semblable à $A$ .

$A = IAI = I^{-1}AI$. Donc, $A$ est semblable à $A$.

**b.** Si $A$ est semblable à $B$ alors $B$ est semblable à $A$.

Je suppose que $A$ est semblable à $B$ alors il existe une matrice $P$ inversible telle que : $A = P^{-1}BP$
Alors, $PAP^{-1} = P(P^{-1}BP)P^{-1} = (PP^{-1})B(P^{-1}P) = IBI = B$. Donc, $B$ est semblable à $A$.

**c.** Si $A$ est semblable à $B$ et $B$ semblable à $C$ alors $A$ est semblable à $C$.

Je suppose que $A$ est semblable à $B$ et $B$ est semblable à $C$ alors il existe deux matrices $P$ et $Q$ inversibles telles que :
$A = P^{-1}BP$ et $B = Q^{-1}CQ$. Donc, $A = P^{-1}Q^{-1}CQP \underbrace{=}_{\substack{puisque \\ P\ et\ Q\ inversibles \\ PQ\ inversible\ et \\ (QP)^{-1}=P^{-1}Q^{-1}}} (QP)^{-1}C(QP) = H^{-1}CH$ avec $H = QP$ inversible.

Donc $A$ est semblable à $C$.

NB : on a prouvé dans ces questions $a, b$ et $c$ que « être semblable à » est une relation d'équivalence dans $M_3(\mathbb{R})$.

**d.** Si $A$ est semblable à $B$ alors $detA = detB$ , $trA = trB$ et $rgA = rgB$.

Je suppose que $A$ est semblable à $B$ alors il existe une matrice $P$ inversible telle que : $A = P^{-1}BP$. Alors

1. $\det(A) = \det(P^{-1}BP) \underbrace{=}_{car\ \det(MN)=\det(M)\det(N)} \det(P^{-1})\det(B)\det(P) = \frac{1}{\det(P)}\det(B)\det(P) = \det(B)$.
2. $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}BP) \underbrace{=}_{car\ tr(MN)=tr(NM)} \mathrm{tr}(BPP^{-1}) = \mathrm{tr}(B)$.
3. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(P^{-1}BP) \underbrace{=}_{\substack{car \\ multplier\ une \\ matrice\ à\ gauche \\ par\ une\ matrice\ inversible \\ revient\ à\ faire \\ une\ succession \\ finie\ d'opérations \\ élémentaires \\ sur\ les\ lignes\ de\ cette\ matrice \\ et\ ne\ change\ donc\ pas\ son\ rang.}} \mathrm{rg}(PP^{-1}BP) = \mathrm{rg}(BP) \underbrace{=}_{\substack{car \\ multplier\ une \\ matrice\ à\ droite \\ par\ une\ matrice\ inversible \\ urevient\ à\ faire \\ une\ succession \\ finie\ d'opérations \\ élémentaires \\ sur\ les\ colonnes\ de\ cette\ matrice \\ et\ ne\ change\ pas\ son\ rang.}} \mathrm{rg}(BPP^{-1}) = rg(B)$.

**e.** $A$ est semblable à $B$ <u>si et ssi</u> $A$ et $B$ sont deux matrices d'un même endomorphisme.

Soit $A$ et $B$ deux matrices de $M_3(\mathbb{R})$. Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont $A$ est la matrice dans la base canonique $C$ de $\mathbb{R}^3$.
$A$ est semblable à $B$

$\Longleftrightarrow$ $B$ est semblable à $A$

$\Longleftrightarrow$ il existe $P$ inversible telle que : $B = P^{-1}AP$

$\Longleftrightarrow$il existe une base $C'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que : $B = (mat_{C'}C)^{-1}A(mat_{C'}C)$

$\Longleftrightarrow$il existe une base $C'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que : $B = (mat_{C'}C)(mat_C u)(mat_C C')$

$\Longleftrightarrow$il existe une base $C'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que : $B = mat_{C'}u$.

$\Longleftrightarrow$ $A$ et $B$ sont deux matrices, dans deux bases de $\mathbb{R}^3$, d'un même endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

$\Longrightarrow$En introduisant $C'$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie matriciellement par $P = mat_C C'$. $P$ inversible donc $C'$ base de $E$.

# PARTIE II

**2.** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ et soient $i$ $et$ $j$ deux entiers naturels.
On considère l'application $w$ de $Ker(u^{i+j})$ vers $E$ définie par : $w(x) = u^j(x)$.

a. Montrer que $Im(w) \subset Ker(u^i)$.

Soit $y \in Im(w)$. Alors il existe $x \in Ker(u^{i+j})$ tel que $y = w(x) = u^j(x)$.
$Alors,\ u^i(y) = u^i\left(u^j(x)\right) = u^{i+j}(x) \underbrace{=}_{\substack{car \\ x \in Ker(u^{i+j})}} 0$. J'en déduis que $y \in Ker(u^i)$. Ainsi, $Im(w) \subset Ker(u^i)$.

b. En déduire que $dim(Ker\ u^{i+j}) \leq dim(Ker(u^i)) + dim(Ker(u^j))$.

Le théorème du rang assure que $\dim(Im(w)) + \dim(Ker(w)) \overset{**}{=} \dim(Ker(u^{i+j}))$.
Or, $Im(w) \subset Ker(u^i)$ donc, $\dim(Im(w)) \leq \dim\left(Ker(u^i)\right)$.
De plus, $x \in Ker(w) \Longrightarrow w(x) = 0 \Longrightarrow u^j(x) = 0 \Longrightarrow x \in Ker(u^j)$ ; donc, $Ker(w) \subset Ker(u^j)$. Et par conséquent, $\dim(Ker(w)) \leq \dim\left(Ker(u^j)\right)$. Il s'en suit, en utilisant **, que $\dim\left(Ker(u^{i+j})\right) \leq \dim\left(Ker(u^i)\right) + \dim(Ker(u^j))$.

**3.** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant : $u^3 = 0$ $et$ $rg(u) = 2$

a. Montrer que $dim(Ker\ u^2) = 2$ (on pourra utiliser deux fois la question 2b.)

Tout d'abord , le théorème du rang assure que $\dim(Ker(u)) = dimE - rg(u) = 3 - 2 = 1$.
Alors, d'après 2b), $\dim(Ker(u^2)) \underbrace{\leq}_{2.b.} \dim(Ker(u)) + \dim(Ker(u)) = 2$.

De plus, $3 \underbrace{=}_{\substack{car\ u^3=0 \\ i.e.\ Ker(u^3)=E}} \dim(Ker(u^3)) \underbrace{\leq}_{2.b.} \dim(Ker(u^2)) + \dim(Ker(u)) = \dim(Ker(u^2)) + 1$. Donc, $\dim(Ker(u^2)) \geq 2$.

Ainsi, $\dim(Ker(u^2)) = 2$.

b. Montrer que l'on peut trouver un vecteur $a$ non nul de $E$ tel que $u^2(a) \neq 0$ et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de $E$.

$dim(Ker\ u^2) = 2 < 3 = \dim(E)$. Donc, $Ker(u^2) \subsetneq E$. Donc $E$ contient un vecteur $a$ qui n'appartient pas à $Ker\ u^2$ et qui vérifie par conséquent, $u^2(a) \neq 0$.

<u>Montrons que $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de $E$.</u>

$(u^2(a), u(a), a)$ est une famille de 3 vecteurs de $E$. Comme $3 = dimE$, pour prouver que cette famille est une base de $E$, il suffit de prouver que cette famielle est libre.

Soit $\alpha, \beta$ $et$ $\gamma$ des réels tels que $\alpha u^2(a) + \beta\, u(a) + \gamma a \overset{(*)}{=} 0$.
Alors $u^2(\alpha u^2(a) + \beta\, u(a) + \gamma a) = u^2(0)$ . Comme $u$ est linéaire, cette égalité s'écrit aussi $\alpha u^4(a) + \beta\, u^3(a) + \gamma u^2(a) = 0$
Et finalement, puisque $u^3 = 0$ et donc $u^4 = 0$, il reste $\gamma u^2(a) = 0$.Je conclus en utilisant les règles de calcul sur les vecteurs : comme $u^2(a) \neq 0, nécessairement\ \gamma = 0$. Alors l'égalité $(*)$ s'écrit : $\alpha u^2(a) + \beta\, u(a) = 0$.
Alors $u(\alpha u^2(a) + \beta\, u(a)) = u(0)$ . Comme $u$ est linéaire, cette égalité s'écrit aussi $\alpha u^3(a) + \beta\, u^2(a) = 0$
Et finalement, puisque $u^3 = 0$ ,il reste $\beta u^2(a) = 0$. Je conclus en utilisant les règles de calcul sur les vecteurs, comme $u^2(a) \neq 0, nécessairement\ \beta = 0$. Alors l'égalité (*) s'écrit : $\alpha u^2(a) = 0$. comme $u^2(a) \neq 0, nécessairement\ \alpha = 0$.
J'en conclus que la famille $B = (u^2(a), u(a), a)$ est libre et finalement est une base de $E$.

c. Ecrire la matrice $U$ $de$ $u$ et la matrice $V$ $de$ $u^2 - u$ dans cette base.

$$U = mat_B u = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{u^3(a)} & \overbrace{u^2(a)} & \overbrace{u(a)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u^2(a) \\ u(a) \\ a \end{array} \text{ car } \begin{cases} u(u^2(a)) = u^3(a) = 0 = 0u^2(a) + 0u(a) + 0a \\ u(u(a)) = u^2(a) = 1u^2(a) + 0u(a) + 0a \\ u(a) = 0u^2(a) + 1u(a) + 0a \end{cases}$$

$$V = mat_B v = U^2 - U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**4.** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant : $u^2 = 0$ $et$ $rg(u) = 1$

a. Montrer que l'on peut trouver un vecteur $b$ non nul de $E$ tel que $u(b) \neq 0$

Le Théorème du rang assure que $dimKer(u) = 2$ . Donc $Ker\ (u) \subsetneq E$. Donc $E$ contient un vecteur $b$ qui n'appartient pas à $Ker\ (u)$ et qui vérifie par conséquent, $u(b) \neq 0$.

b. Justifier l'existence d'un vecteur $c$ de $Ker\ (u\ )$tel que $(u(b), c)$ soit libre puis montrer que la famille $(\ b, u(b)\ , c)$ est une base de $E$.

$u^2(b) = 0\ i.e\ u(b) \in Ker(u)$. Donc $u(b)$ est un vecteur non nul $de\ Ker(u)$. Comme $dimKer(u) = 2$ , on peut compléter la famille libre $(u(b))$ par un vecteur $c$ de $Ker(u)$ pour obtenir une base de $Ker(u)$. Ainsi, $(c, u(b))$ est une base de $Ker(u)$ et est donc une famille libre de vecteur de E.

Montrons que $(b, u(b), c)$ est une base de $E$, il suffit comme précédemment de prouver que cette famille est libre.

Soit $\alpha, \beta\ et\ \gamma$des réels tels que $\alpha b + \beta\ u(b) + \gamma c \overset{(**)}{=} 0$. Alors $u(\alpha b + \beta\ u(b) + \gamma c) = u(0)$ . Comme $u$ est linéaire, cette égalité s'écrit aussi $\alpha u(b) + \beta\ u^2(b) + \gamma u(c) = 0$. Et finalement, puisque $u^2 = 0$ et $c \in Ker(u)$, il reste $\alpha u(b) = 0$. Je conclus en utilisant les règles de calcul sur les vecteurs : comme $u(b) \neq 0, nécessairement\ \alpha = 0$. Alors l'égalité $(**)$ s'écrit : $\beta\ u(b) + \gamma c = 0$. Comme $(c, u(b))$ est libre , nécessairement,$\beta = \gamma = 0$.J'en conclus que la famille $B = (b, u(b), c)$ est libre et finalement est une base de $E$.

c. Ecrire la matrice $U'\ de\ u$ et la matrice $V'\ de\ u^2 - u$ dans cette base.

$$U' = mat_B u = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(b) & u^2(b) & u(c) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} b \\ u(b) \\ c \end{matrix} \text{ car } \begin{cases} u(b) = 0b + 1u(b) + 0c \\ u(u(b)) = u^2(b) = 0 = 0b + 0u(b) + 0c. \\ u(c) = 0 = 0b + 0u(b) + 0c \end{cases}$$

$$V' = mat_B v = U'^2 - U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# PARTIE III

Soit désormais une matrice $A$ de $M_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On se propose de montrer que $A$ est semblable à son inverse $A^{-1}$ .

On pose alors $N=\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$et soit $P$ de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP\ =\ T\ =\ I + N$

**5.** Expliquer pourquoi la matrice $A^{-1}$ existe.

$$\det(A) \underbrace{=}_{d'après\ 1.d.} \det(T) \underbrace{=}_{\substack{car\ T\ est\ triangulaire \\ donc\ \det(T) = produit\ des \\ coeff\ de\ sa\ diagonale.}} 1 \neq 0.$$ Par conséquent, $A$ est inversible et $A^{-1}$ existe.

**6.** Calculer $N^3$et montrer que $P^{-1}A^{-1}\ P\ =\ I -\ N + N^2$ .

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = (0)$. Donc, $(I + N)(\ I -\ N + N^2) = I - N^3 = I$.

Par conséquent, $I -\ N + N^2 = (I + N)^{-1} = T^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} \underbrace{=}_{(QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}} (AP)^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$.

**7.** Quel est le rang de N ?

Le rang de $N$ dépend des valeurs de $\alpha, \beta\ et\ \gamma$.

Si $\alpha\ et\ \gamma$ non nuls alors $rg(N) = 2.$

Si $(\alpha = 0\ et\ \gamma \neq 0)$ ou $((\alpha, \beta) \neq (0,0)\ et\ \gamma = 0)$ alors $rg(N) = 1.$

Si $\alpha = 0 = \gamma = \beta$ alors $rg(N) = 0.$

**8.** On suppose dans cette question que $N = 0$ ie. $rgN = 0$. Montrer alors que les matrices $A\ et\ A^{-1}$ sont semblables.

$N = 0$ donc $P^{-1}AP = T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I. Alors\ \ A = PIP^{-1} = I\ et\ A^{-1} = I = A$. Donc $A$ et $A^{-1}$sont semblables.

**9.** On suppose dans cette question que $rg(N) = 2$ . On pose $M = N^2 - N$.

**a.** Montrer que la matrice $N$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$et en déduire une matrice simple semblable à $M$.

Prenons $E = \mathbb{R}^3$. Les résultats des parties $I$ et $II$ s'appliquent dans $E$.

Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont $N$ est la matrice dans la base canonique $C$ de $\mathbb{R}^3$.

Alors $u^3 = 0\ car\ N^3 = 0\ et\ rg(u) = rg(N) = 2$. Donc, les questions 3 b et c assurent qu'il existe une base B de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$U = mat_B u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $U$ et $N$ sont alors deux matrices d'un même endomorphisme ; la question $1.d.$ permet alors de conclure que $U$ et $N$ sont semblables i.e. il existe $Q$ inversible telle que $N = Q^{-1}UQ$ .

Alors, $M = N^2 - N = Q^{-1}UQQ^{-1}UQ - Q^{-1}UQ = Q^{-1}U^2Q - Q^{-1}UQ = Q^{-1}(U^2 - U)Q = Q^{-1}VQ$ . Donc $M$ est semblable à $V$.

**b**. Calculer $M^3$ et $rg(M)$.

Comme $M = Q^{-1}VQ$, $M^3 = Q^{-1}V^3Q = 0$ et $rg(M) = rg(V) = 2$.

**c.** Montrer que les matrices $N$ *et* $M$ sont semblables.

$M$ vérifie donc les mêmes propriétés que $N$ qui ont permis de prouver que $N$ est semblable à $U$. J'en déduis donc que $M$ est elle-même semble à $U$. Et par conséquent, la question $1c$ permet de conclure que $M$ et $N$ sont semblables .

**d.** Montrer que les matrices $A$ *et* $A^{-1}$ sont semblables.

$M$ et $N$ sont semblables donc il existe une matrice $H$ inversible telle que : $M = H^{-1}NH$ .

$Alors,\ Z = P^{-1}A^{-1}\,P\ =\ I - N + N^2 = I + M = H^{-1}IH +\ H^{-1}NH = H^{-1}(I + N)H = H^{-1}AH.$

J'en déduis que $A^{-1}$et $A$ sont semblables à une même matrice $Z$ et par conséquent d'après 1d., $A^{-1}$*et* $A$ sont semblables.

**10.** On suppose dans cette question que $rg(N) = 1$ . On pose $M = N^2 - N$.

Montrer que les matrices $A$ *et* $A^{-1}$ sont semblables.

On montrer de même que $N$ *et* $U'$ sont semblables puis $M$ *et* $V'$ et enfin $M$ *et* $U'$. J'en déduis que $M$ et $N$ sont semblables. Et comme au 9d., il en découle que $A^{-1}$*et* $A$ sont semblables.

**11. Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A$ .

**a.** Déterminer tous les réels λ tels que l'équation $u(X) = \lambda X$ admette une solution $X$ non nulle. Trouver alors une base $Ker(u - \lambda id)$.

$\exists X \neq 0, u(X) = \lambda X \iff \exists X \neq 0 / (u - \lambda id)(X) = 0 \iff Ker(u - \lambda id) \neq \{O\} \iff u - \lambda id\ n'est\ pas\ injective$
$\iff u - \lambda id\ n'est\ pas\ bijective \underbrace{\iff}_{car\ A - \lambda I = mat_C(u - \lambda id)} A - \lambda I\ non\ inversible \iff \det(A - \lambda I) = 0$. Or,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underbrace{=}_{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda+1 & -1 \\ -1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

Donc $\exists X \neq 0, u(X) = \lambda X \iff \lambda = 1.$

Cherchions une base de $Ker(u - id)$. $On\ sait\ que\ mat_C(u - id) = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $X = (x, y, z)$.

$X \in Ker(u - id) \iff (u - id)(X) = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff y = -z.$

Donc, $Ker(u - id) = \{(x, z, -z)/x, z\ réels\} = vect\ \underbrace{((1,0,0), (0,1,-1))}_{clairement\ non\ colinéaires}.$

Donc $((1,0,0), (0,1,-1))$ est une base de $Ker(u - id)$.

**b.** Montrer que $A$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Et conclure que les matrices $A$ *et* $A^{-1}$ sont semblables.

Déterminer une base $C' = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$telle que $mat_{C'}u = T$.

Il existe une base $C' = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ $telle\ que\ mat_{C'}u = T$

**sietssi** il existe trois vecteurs $a, b$ *et* $c$ linéairement indépendants tels que $\begin{cases} u(a) = a \\ u(b) = b \\ u(c) = b + c \end{cases}$

**sietssi** il existe trois vecteurs $a, b$ *et* $c$ linéairement indépendants tels que $\begin{cases} a \in Ker(u - id) \\ b \in Ker(u - id) \\ (u - id)(c) = b \end{cases}$

**sietssi** il existe trois vecteurs $a, b$ *et* $c$ linéairement indépendants tels que $\begin{cases} a \in Ker(u - id) \\ b \in Ker(u - id) \cap Im(u - id). \\ (u - id)(c) = b \end{cases}$

Or, $Ker(u - id) = vect\big((1,0,0), (0,1,-1)\big)$et d' après la matrice de $u - id$ dans $C$, $(0,1,-1) = (u - id)\big((0,1,0)\big) \in Im(u - id)$.
donc $(0,1,-1) \in Ker(u - id) \cap Im(u - id)$.
Posons $b = (0,1,-1), c = (0,1,0) et\ a = (1,0,0)$.

Alors $\begin{cases} a \in Ker(u-id) \\ b \in Ker(u-id) \cap Im(u-id) \\ (u-id)(c) = b \end{cases}$. De plus, la famille $(a,b,c)$ est échelonnée en 0 par la droite et ne contient pas le triplet nul et est donc libre. J'en déduis que $(a,b,c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $mat_{C'}u = T$ et ainsi on peut conclure que $A$ et $T$ sont semblables. Alors d'après les questions précédentes, je peux désormais affirmer que $A \; et \; A^{-1}$ sont semblables.

**12.** Toute matrice de $M_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est – elle semblable à une matrice du type $T$ ?

NON . Donnons un contre-exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = mat_C u \text{ où } C = (e_1, e_2, e_3) \; base \; canonique \; de \; \mathbb{R}^3$.

Alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. $Donc \; A = mat_{C'}u \text{ où } C' = (e_1, e_3, e_2) \; est \; \underbrace{une \; autre \; base}_{\substack{c'est \; évident \\ puisque \; on \; a \; juste \\ échangé \; deux \; vecteurs \\ de \; C}} \; de \; \mathbb{R}^3$

Comme $A \; et \; A^{-1}$sont deux matrices d'un même endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $A \; et \; A^{-1}$sont semblables.
Justifions que $A$ n'est pas semblable à $T$.

$\forall P \in GL_3(\mathbb{R}), \det(P^{-1}TP - 2I) = \det(P^{-1}TP - P^{-1}(2I)P) = \det(P^{-1}(T-2I)P)$

$\det(P^{-1}TP - 2I) = \det P^{-1} \times det(T-2I) \times detP = \frac{1}{\det(P)} \times det(T-2I) \times detP$

$\det(P^{-1}TP - 2I) = det(T-2I) = -1.$

Or $\det(A - 2I) = 0 \neq \det(P^{-1}TP - 2I)$. Donc $\forall P \in GL_3(\mathbb{R}), P^{-1}TP \neq T$. Ainsi $T$ et $A$ ne sont pas semblables tandis que $A \; et \; A^{-1}$le sont.