CORRIGE DU TD 4

Forme algébrique, forme trigonométrique d'un nombre complexe. Géométrie avec les nombres complexes.

x et y désignent des réels, z un complexe, n un entier naturel et $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct du plan.

EX 1 Soit z un nombre complexe et x un réel. Expliquer pourquoi ces nombres complexes sont réels ou imaginaires purs :

$B = (z-\bar z)/(z^3+\bar z^3)$ $\quad C = \frac{z^2-\bar z^2}{z\bar z+2}$ $\quad D = \left(e^{ix}+\frac{1}{e^{ix}}\right)^2$ et $E = \frac{i}{e^{-ix}-e^{ix}}$

$B = \frac{z-\bar z}{z^3+\bar z^3} = \frac{2iIm(z)}{z^3+\bar z^3} = \frac{2iIm(z)}{2Re(z^3)} = \frac{Im(z)}{\underbrace{Re(z^3)}_{\in\mathbb{R}}} i \in i\mathbb{R}.$

$D = \left(e^{ix}+\frac{1}{e^{ix}}\right)^2 = (e^{ix}+e^{-ix})^2 = (2\cos(x))^2 \in \mathbb{R}^+.$

$E = \frac{i}{e^{-ix}-e^{ix}} = \frac{i}{2isin(-x)} = -\frac{1}{2\sin(x)} \in \mathbb{R}$

$C = \frac{z^2-\bar z^2}{z\bar z+2} = \frac{z^2-\overline{z^2}}{|z|^2+2} = \frac{2iIm(z^2)}{|z|^2+2} = \underbrace{\frac{2Im(z^2)}{|z|^2+2}}_{\in\mathbb{R}} i \ \in i\mathbb{R}$

EX 2 Calculer les parties réelle et imaginaire, le module et un argument de chacun des complexes suivants et placer l'image ponctuelle de ce complexe dans le plan

1. $\frac{(4i-3)}{(2-i)^3}$
2. $\left(\frac{i-1}{1-i\sqrt3}\right)^8$
3. $(1-i)^2$
4. $(1+i)^{1999}$
5. $\frac{1}{1+itan(x)}$
6. $\frac{1+ix}{1-ix}$
7. $\frac{1+cosx+isinx}{1-cosx+isinx}$
8. $e^{ix}-e^{iy}$
9. $i+1+\sqrt2 e^{ix}$
10. $1+e^{ix}+e^{2ix}$
11. $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}$
12. $\left(\frac{2e^{ix}-2}{e^{i2x}-e^{i\frac{x}{2}}}\right)^{2016}$.

1. $z = \frac{(4i-3)}{(2-i)^3} = \frac{(4i-3)\overline{(2-i)}^3}{|(2-i)^3|^2} = \frac{(4i-3)\overline{(2-i)}^3}{(|2-i|^2)^3} = \frac{1}{5^3}(4i-3)(2^3+3.2^2(-i)+3.2(-i)^2+(-i)^3)$
$= \frac{1}{5^3}(4i-3)(8-12i-6+i) = \frac{1}{5^3}(4i-3)(2-11i) = \frac{1}{5^3}(41i+38)$. Donc, $Re(z) = \frac{41}{5^3}$ et $Im(z) = \frac{38}{5^3}$.

$|z| = \frac{|4i-3|}{|2-i|^3} = \sqrt{\frac{25}{5^3}} = \sqrt{\frac15} = \frac{\sqrt5}{5}$. *Notons* θ *l'argument principal de* z. Alors $z = \sqrt{\frac15}\left(\underbrace{\frac{\sqrt5}{5^3}\times 38}_{\cos(\theta)} + \underbrace{\frac{\sqrt5}{5^3}\times 41}_{\sin(\theta)} i\right)$. Donc, $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan(\theta) = \frac{41}{38}$.

Ainsi, $\theta = Arctan\left(\frac{41}{38}\right)$.

2. $z = \left(\frac{i-1}{1-i\sqrt3}\right)^8 = \left(\frac{\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}i-\frac{\sqrt2}{2}\right)}{2\left(\frac12-\frac{i\sqrt3}{2}\right)}\right)^8 = \left(\frac{\sqrt2 e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^8 = \left(\frac{1}{\sqrt2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}\right)^8 = \left(\frac{1}{\sqrt2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}\right)^8 = \frac{1}{16}e^{i8\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{16}e^{i\left(\frac{26\pi}{3}\right)} = \frac{1}{16}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{16}\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{-1}{32}+\frac{i\sqrt3}{32}.$
Ainsi, $Re(z) = \frac{-1}{32}, Im(z) = \frac{\sqrt3}{32}$, $|z| = \frac{1}{16}$ *et* $arg(z) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

3. $z = (1-i)^2 = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Ainsi, $Re(z) = 0, Im(z) = -2$, $|z| = 2$ *et* $arg(z) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$.

4. $z = (1+i)^{1999} = \left[\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}i+\frac{\sqrt2}{2}\right)\right]^{1999} = \left[\sqrt2 e^{i\frac{\pi}{4}}\right]^{1999} = \left[\sqrt2\right]^{1999}\left[e^{i\frac{\pi}{4}}\right]^{1999} = \sqrt2\left[\sqrt2\right]^{1998}e^{i(1999)\frac{\pi}{4}} = \sqrt2.2^{999}.e^{i\left((2000)\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt2.2^{999}.e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$
$= \sqrt2.2^{999}.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sqrt2.2^{999}.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{999}-i2^{999}$. Ainsi, $Re(z) = 2^{999}, Im(z) = -2^{999}$, $|z| = \sqrt2.2^{999}$ *et* $arg(z) \equiv \frac{-\pi}{4}[2\pi]$.

5. $z = \frac{1}{1+itan(x)} = \frac{1}{1+\frac{isin(x)}{\cos(x)}} = \frac{\cos(x)}{\cos(x)+isin(x)} = \frac{\cos(x)}{e^{ix}} = \cos(x)\,e^{-ix} = \cos(x)\left(\cos(x)-isin(x)\right) = cos^2(x) - isin(x)\cos(x).$

Ainsi, $Re(z) = cos^2(x), Im(z) = -\sin(x)\cos(x)$, $|z| = |\cos(x)|$ *et* $arg(z) \equiv \begin{cases} -x\ [2\pi]\ si\ cos(x) > 0 \\ n'existe\ pas\ si\ \cos(x) = 0 \\ -x+\pi\ [2\pi]\ si\ cos(x) < 0 \end{cases}$.

6. $z = \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{(1+ix)^2}{1+x^2} = \frac{1-x^2+2ix}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2}$. Donc, $Re(z) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ *et* $Im(z) = \frac{2x}{1+x^2}$.
Posons $\theta = Arctan(x)$. Alors $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *et* $x = tan(\theta)$.

Par suite, $z = \frac{1+itan(\theta)}{1-itan(\theta)} = \frac{1+\frac{isin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-i\frac{sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{1+i\frac{sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-i\frac{sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta)+isin(\theta)}{\cos(\theta)-isin(\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{i2\theta} = e^{i2Arctan(x)}$. Donc, $|z| = 1$ *et* $\arg(z) \equiv Arctan(x)[2\pi]$

7. $z = \frac{1+cosx+isinx}{1-cosx+isinx} = \frac{1+e^{ix}}{1-e^{-ix}} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}}{-2isin\left(-\frac{x}{2}\right)e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{ix}}{isin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} = cotan\left(\frac{x}{2}\right)e^{i} = cotan\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + icotan\left(\frac{x}{2}\right)sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
$z = cotan\left(\frac{x}{2}\right)\sin(x) - icotan\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x)$. Donc $Re(z) = cotan\left(\frac{x}{2}\right)\sin(x)$ *et* $Im(z) = -cotan\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x)$.

Et $|z| = \left|cotan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$. Et $\arg(z) \equiv \begin{cases} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\ [2\pi]\ si\ cotan\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \\ nexiste\ pas\ si\ cotan\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\ \left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ [2\pi]\ si\ cotan\left(\frac{x}{2}\right) < 0 \end{cases}$.

8. $e^{ix}-e^{iy} = e^{iy}\left(e^{i(x-y)}-1\right) = e^{iy}\left(2isin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right) = 2sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y+\pi}{2}\right)}$. Donc, $Re(z) = 2sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y+\pi}{2}\right)$ *et* $Im(z) = 2sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y+\pi}{2}\right)$.

Et $|z| = \left|2sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|$. Et $\arg(z) \equiv \begin{cases} \frac{x+y+\pi}{2}\ [2\pi]\ si\ sin\left(\frac{x-y}{2}\right) > 0 \\ nexiste\ pas\ si\ sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0 \\ \frac{x+y-\pi}{2}\ [2\pi]\ si\ sin\left(\frac{x-y}{2}\right) < 0 \end{cases}$.

9. $i+1+\sqrt2e^{ix} = \sqrt2e^{i\frac{\pi}{4}}+\sqrt2e^{ix} = \sqrt2\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{ix}\right) = \sqrt2e^{ix}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}+1\right) = \sqrt2e^{ix}2\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)} = 2\sqrt2\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)}$.

Donc, $Re(z) = 2\sqrt2\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)$ *et* $Im(z) = 2\sqrt2\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)$. *Et* $|z| = \left|2\sqrt2\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\right|$. Et $\arg(z) \equiv \begin{cases} \frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\ [2\pi]\ si\ \cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right) > 0 \\ nexiste\ pas\ si\ \cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right) = 0 \\ \frac{9\pi}{8}+\frac{x}{2}[2\pi]\ si\ \cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right) < 0 \end{cases}$.

10. $1+e^{ix}+e^{2ix} = 1+e^{2ix}+e^{ix} = 2\cos(x)e^{ix}+e^{ix} = (2\cos(x)+1)e^{ix}$. Donc, $Re(z) = (2\cos(x)+1)\cos(x)$ *et* $Im(z) = (2\cos(x)+1)\sin(x)$. *Et* $|z| = |2\cos(x)+1|$. Et $\arg(z) = \begin{cases} x\ si\ 2\cos(x)+1 > 0 \\ nexiste\ pas\ si\ 2\cos(x)+1 = 0 \\ x+\pi\ si\ 2\cos(x)+1 < 0 \end{cases}$.

11. $Soit\ n \in \mathbb{N}^*. z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n-1}(e^{ix})^k = \begin{cases} n\ si\ e^{ix}=1 \\ \frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\ \ si\ e^{ix} \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} n \quad si\ x \equiv 0[2\pi] \\ \frac{2isin\left(\frac{nx}{2}\right)e^{i\frac{nx}{2}}}{2isin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}}\ \ si\ x \equiv 0[2\pi] \end{cases} = \begin{cases} n \quad si\ x \equiv 0[2\pi] \\ \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)e^{i\frac{(n-1)}{2}x}}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\ \ si\ x \equiv 0[2\pi] \end{cases}.$

Donc, $Re(z) = \begin{cases} n \quad si\ x \equiv 0[2\pi] \\ \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n-1)}{2}x\right)\ \ si\ x \equiv 0[2\pi] \end{cases}\ et\ Im(z) = \begin{cases} 0 \quad si\ x \equiv 0[2\pi] \\ \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n-1)}{2}x\right)\ \ si\ x \equiv 0[2\pi] \end{cases}.$

$Et\ |z| = \begin{cases} n\ si\ x \equiv 0[2\pi] \\ \left|\frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right|\ \ si\ x \not\equiv 0[2\pi] \end{cases}$ et si $x \not\equiv 0\ [2\pi] alors\ \arg(z) \equiv \begin{cases} n'existe\ pas\ si\ \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 0 \\ x \quad [2\pi] \quad si\ \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} > 0 \\ x+\pi\ [2\pi] \quad si\ \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} < 0 \end{cases}$ et si $x \equiv 0\ [2\pi] alors\ \arg(z) \equiv 0\ [2\pi]\ car\ n \neq 0.$

12. $\left(\frac{2e^{ix}-2}{e^{i2x}-e^{i\frac{x}{2}}}\right)^{2016} = \left(\frac{2(e^{ix}-1)}{e^{i2x}-e^{i\frac{x}{2}}}\right)^{2016} = \left(\frac{4isin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{\frac{i3}{2}x}-1)}\right)^{2016} = \left(\frac{4isin\left(\frac{x}{2}\right)}{2isin\left(\frac{3}{4}x\right)e^{i\frac{3}{4}x}}\right)^{2016} = \left(2\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{3}{4}x\right)}e^{-i\frac{3}{4}x}\right)^{2016} = \left(2\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{3}{4}x\right)}\right)^{2016} e^{-i\frac{3(2016)}{4}x} = \left(2\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{3}{4}x\right)}\right)^{2016} e^{-i162x}$. Donc, $Re(z) = \left(2\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{3}{4}x\right)}\right)^{2016} \cos(162x)\ et\ Im(z) = -\left(2\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{3}{4}x\right)}\right)^{2016} \sin(162x).\ Et\ |z| = \left(2\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{3}{4}x\right)}\right)^{2016}$ et $\arg(z) \equiv \begin{cases} -162x \quad [2\pi]\ si\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0 \\ n'existe\ pas\ si\ sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \end{cases}$

EX 3 Déterminer tous les complexes z tels que :

1) $3z^2 - 5|z^2| + 2 = 0.$

2) $z^5\bar{z} = 1$

3) $Im\left(\frac{1}{z^2+z+1}\right) = 0.$

4) $|z| = |1-z| = \left|\frac{1}{z}\right|.$

1) $3z^2 - 5|z^2| + 2 = 0 \Leftrightarrow 3z^2 - 5|z|^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + (iy)^2 + 2ixy) - 5(x^2+y^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - y^2 + 2ixy) - 5(x^2+y^2) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2 - 2x^2 - 8y^2 + 2i6(xy) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6xy = 0 \\ 2 - 2x^2 - 8y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0\ ou\ y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} ou \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\frac{1}{2} \end{cases} ou \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$

Ainsi, $Sol = \left\{1, -1, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\right\}.$

2) Si $z^5\bar{z} = 1 alors\ z \neq 0$. Désormais $z \neq 0$. Posons $z = re^{ia}$.

Alors, $z^5\bar{z} = 1 \Leftrightarrow (re^{ia})^5\overline{(re^{ia})} = 1 \Leftrightarrow r^5e^{i5a}re^{-ia} = 1 \Leftrightarrow r^6e^{i4a} = 1e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^6 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}/4a = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}/a = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/z = e^{i\frac{k\pi}{2}}.$

Ainsi, $Sol = \{1, -1, i, -i\}.$

3) $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}$. Désormais $z \in \mathbb{C}\backslash\{e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}\}$.

$Im\left(\frac{1}{z^2+z+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z^2+z+1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + z = \overline{z^2+z} \Leftrightarrow z^2 + z = \bar{z}^2 + \bar{z} \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 - (z - \bar{z}) = 0$

$\Leftrightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z}) - (z-\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})[(z+\bar{z}) - 1] = 0 \Leftrightarrow (z = \bar{z}\ ou\ z + \bar{z} = 1) \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R}\ \ ou\ 2Re(z) = 1) \Leftrightarrow \left(z \in \mathbb{R}\ \ ou\ Re(z) = \frac{1}{2}\right).$

Ainsi, $Sol = \left\{x; \frac{1}{2} + ix/x \in \mathbb{R}\right\}.$

4) Soit z un complexe non nul.

$|z| = |1-z| = \left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z| = |1-z| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z| = |1-z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM^2 = 1 \\ OM = AM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM = 1 \\ M \in med[0,A] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in C(O,1) \\ M \in med[0,A] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ Re(z) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} Im^2(z) + Re^2(z) = 1 \\ Re(z) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Im(z)^2 = \frac{3}{4} \\ Re(z) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Im(z) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ Re(z) = \frac{1}{2} \end{cases}$. Ainsi, $Sol = \left\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\} = \left\{e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{-i\pi}{3}}\right\}.$

Ex 3 bis Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\ et\ z \in \mathbb{C}$ tels que : $ad - bc > 0\ et\ cz + d \neq 0$. Montrer que : $Im(z) > 0 \Longrightarrow Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0.$

$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{(cz+d)((c\bar{z}+d)} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + (ad+bc)Re(z) + bd}{|cz+d|^2} + i\underbrace{\frac{(ad-bc)}{|cz+d|^2}Im(z)}_{=Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}$. Comme $ad - bc > 0\ \ et\ |cz+d|^2 > 0$, $Im(z) > 0 \Longrightarrow Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0.$

EX 4 Soient $(u, v, w) \in U^3$.

1. Montrer que : $|u + v + w| = |uv + vw + wu|$.
2. Montrer que : pour tout complexe z non nul, $\left|u - \frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{|u-z|}{|z|}$.
3. On suppose, ici, que: $1 + uv \neq 0$. Montrer que : $\frac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$.
4. On suppose, ici, que: $u \neq 1$. Montrer que $Re\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{1}{2}$.
5. On suppose, encore, que: $u \neq 1$. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le complexe $\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n$ est-il réel ?

Comme u, v et w sont de module 1, nous pouvons poser $u = e^{ia}$, $v = e^{ib}\ \ et\ w = e^{ic}$ tels que a, b et c réels.

1. Alors, $|u+v+w|^2 = (u+v+w)\overline{(u+v+w)} = (u+v+w)\ \ (\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}) = (e^{ia}+e^{ib}+e^{ic})(e^{-ia}+e^{-ib}+e^{-ic})$

$= 1 + e^{i(a-b)} + e^{i(a-c)} + e^{i(b-a)} + 1 + e^{i(b-c)} + e^{i(c-a)} + e^{i(c-b)} + 1$

$= 3 + 2\cos(a-b) + 2\cos(a-c) + 2\cos(b-c).$

Ainsi, comme u, v et w sont des complexes de modules 1 quelconques, on a prouvé que pour tous réels A,B et C , $\left|e^{iA} + e^{iB} + e^{iC}\right|^2 = 3 + 2[\cos(A-B) + \cos(A-C) + \cos(B-C)]$

$|uv + vw + wu|^2 = \left|e^{i(a+b)} + e^{i(c+b)} + e^{i(a+c)}\right|^2 \underset{\substack{en\ appliquant\ le\ résultat\\ précédent\ à\ A=a+b,\\ B=b+c\ et\ C=c+a}}{\triangleq} 3 + 2\left[\cos\left((a+b)-(c+b)\right) + \cos\left((a+b)-(c+a)\right) + \cos\left((b+c)-(c+a)\right)\right]$

$= 3 + 2[\cos(a-c) + \cos(b-c) + \cos(b-a)] \underbrace{=}_{\substack{car\ \forall t \in \mathbb{R},\\ \cos(t) = \cos(-t)}} 3 + 2[\cos(a-c) + \cos(b-c) + \cos(a-b)] = |u+v+w|^2.$

Comme les deux réels $|u+v+w|\ et\ |uv+vw+wu|$ sont positifs et ont le même carré, je peux conclure que $|uv+vw+wu| = |u+v+w|$.

2. Soit z un complexe non nul. Alors $\bar{z} \neq 0\ et\ |z| \neq 0$.

$\left|u - \frac{1}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{u\bar{z}-1}{\bar{z}}\right| \overset{car\ \left|\frac{w}{w'}\right| = \frac{|w|}{|w'|}}{\triangleq} \frac{|u\bar{z}-1|}{|\bar{z}|} \overset{\substack{car\ |u|=1\\ donc\ u\neq 0}}{\triangleq} \frac{\left|u\left(\bar{z}-\frac{1}{u}\right)\right|}{|z|} \overset{car\ |ww'|=|w||w'|}{\triangleq} \frac{|u|\left|\left(\bar{z}-\frac{\bar{u}}{|u|^2}\right)\right|}{|z|} \overset{car\ |u|=1}{\triangleq} \frac{|(\bar{z}-\bar{u})|}{|z|} = \frac{|\overline{z-u}|}{|z|} \overset{car\ |w|=|\bar{w}|}{\triangleq} \frac{|z-u|}{|z|} \overset{car\ |w|=|-w|}{\triangleq} \frac{|u-z|}{|z|}.$

3. On suppose que $1+uv \neq 0$. Alors, $\frac{u+v}{1+uv} = \frac{e^{ia}+e^{ib}}{1+e^{i(a+b)}} = \frac{e^{ia}(1+e^{i(b-a)})}{1+e^{i(a+b)}} \frac{e^{ia} 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{b-a}{2}}}{2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) e^{i\frac{b+a}{2}}} = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} .\, e^{i\left[a+\left(\frac{b-a}{2}\right)-\left(\frac{b+a}{2}\right)\right]} = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} e^{i0} = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} \in \mathbb{R}$.

4. On suppose, ici, que: $u \neq 1$.

Alors $\frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-e^{ia}} = \frac{1}{-2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{\frac{ia}{2}}} = \frac{-1}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+\pi}{2}\right)}} = \frac{-e^{-i\left(\frac{a+\pi}{2}\right)}}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{-1}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\left(\cos\left(-\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{-1}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\left(-\sin\left(\frac{a}{2}\right) - i\cos\left(\frac{a}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\cot an\left(\frac{a}{2}\right)$.

Ainsi, $Re\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{1}{2}$

5. $\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n = \left(\frac{e^{ia}+1}{e^{ia}-1}\right)^n = \left(\frac{2\cos\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}}}{2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}}}\right)^n = \left(\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{i\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\right)^n = \left(-\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} i\right)^n = \left(-\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\right)^n i^n = \left(-\cot an\left(\frac{a}{2}\right)\right)^n i^n$.

Ou bien $\cot an\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ i.e. $\exists k \in \mathbb{Z}/\ \frac{a}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ i.e. . $\exists k \in \mathbb{Z}/\ a = \pi + 2k\pi$ i.e. $u = -1$ alors $\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n = 0 \in \mathbb{R}$.

Ou bien $\cot an\left(\frac{a}{2}\right) \neq 0$ i.e. $u \neq -1$ alors $\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow i^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n\ pair$.

Ex 4 bis Montrer que $f:(z \mapsto |1+iz|^2 + |z+i|^2)$ est constante sur U.

version géométrique

Soit $z \in U$. On note M le point d'affixe z . Alors M est sur le cercle trigonométrique.

On note A le point d'affixe i est B celui d'affixe $-i$. Alors $[A,B]$ est un diamètre du cercle trigonométrique.

Par conséquent, $(MA) \perp (MB)$.

$$f(z) = |1+iz|^2 + |z+i|^2 = |i(-i+z)|^2 + |z+i|^2 = |i|^2|-i+z|^2 + |z+i|^2$$

$$f(z) = |z-i|^2 + |z+i|^2 = MA^2 + MB^2 \underbrace{=}_{\substack{Pythagore\\ dans\ ABM\\ rectangle\ en\ M}} AB^2 = 4.$$ Donc f est constante égale à 4 sur U.

OU BIEN (en version algébrique)

Soit $z \in U$. Alors il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$.

Par conséquent, $f(z) = \left|1+ie^{i\theta}\right|^2 + \left|e^{i\theta}+i\right|^2$

$$= \left|1+e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta}\right|^2 + \left|e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}\right|^2$$

$$= \left|1+e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\right|^2 + \left|e^{i\theta}\left(1+e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right)\right|^2$$

$$= \left|2\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)e^{i\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\right|^2 + \left|e^{i\theta}2\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)e^{i\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right|^2$$

$$= \left|2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|^2 + \left|2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|^2$$

$$= 4\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right|^2\left|e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|^2 + 4\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|^2\left|e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|^2$$

$$= 4\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$\underbrace{=}_{\cos(t)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} 4\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$\underbrace{=}_{\cos^2(t)+\sin^2(t)=1} 4\underbrace{\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]}_{=1} = 4.$$

EX 6 Montrer que pour tous complexes $z\ et\ w$,

1. $1 \leq |1+z| + |z|$.
2. $|z| + |w| + |z+w| \leq |2z| + |2w|$
3. $|z| \leq |z|^2 + |1-z|$
4. $1 + |zw-1| \leq (1+|z-1|) + (1+|w-1|)$.
5. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2+|w|^2)$.

1. $1 = |1| = |(1+z)-z| \underbrace{\leq}_{1ère\ I.T} |1+z| + |z|$.
2. $|z+w| \leq |z| + |w|\ .\ Donc, |z| + |w| + |z+w| \leq 2(|z|+|w|) = 2|z| + 2|w| \overset{car\ 2\ \in \mathbb{R}^+}{=} |2z| + |2w|$.
3. $Posons\ t = z-1\ et\ s = w-1$. Alors,

   $1 + |zw-1| = 1 + |(t+1)(s+1)-1| = 1 + |s+t+st| \leq 1 + |s| + |t| + |st| = 1 + |s| + |t| + |s||t| = (1+|s|)(1+|t|) = (1+|z-1|) + (1+|w-1|)$.
4. **1[er] cas** $|z| \geq 1$. Alors $|z|^2 \geq |z|\ donc\ |z|^2 + |1-z| \geq |z|\ car\ |1-z| \geq 0$.

   2[ème] cas $|z| < 1$. Alors $0 < 1-|z| = |1|-|z| \underbrace{\leq}_{2\ ème\ IT} |1-z|\ donc\ |z|(1-|z|) \leq |z||1-z| \underbrace{\leq}_{car\ |z|\leq 1} |1-z|$ et par conséquent, $|z| - |z|^2 \leq |1-z|$. J'en conclus que $|z| \leq |z|^2 + |1-z|$.
5. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) + (z-w)(\overline{z-w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) + (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = 2z\bar{z} + 2w\bar{w} = 2(|z|^2+|w|^2)$.

Ex 7 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1\ et\ n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$.

Comme $|z| \neq 1, z \neq 1$. $\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| = \left|\frac{(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^n)}{1-z}\right| = \left|\sum_{k=0}^n z^k\right| \overset{1ère\ IT}{\leq} \sum_{k=0}^n |z^k| = \sum_{k=0}^n |z|^k \underbrace{=}_{car\ |z|\neq 1} \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$.

Ex 8 Soit a et b deux complexes de module strictement inférieur à 1. Montrer que : $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$.

Tout d'abord, $|1-\bar{a}b| \geq \left||1|-|\bar{a}b|\right| = \left||1|-|\bar{a}||b|\right| = \left|1-|a||b|\right|$. Or, $|a| < 1\ et\ |b| < 1$.Donc, $|a||b| < 1\ et\ aisni \left|1-|a||b|\right| > 0$ et par suite $|1-\bar{a}b| > 0$.

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|} < 1 \overset{\substack{car\\ |1-\bar{a}b|>0}}{\Leftrightarrow} |a-b| < |1-\bar{a}b| \Leftrightarrow |a-b| < |1-\bar{a}b| \Leftrightarrow |a-b|^2 < |1-\bar{a}b|^2.$$

$Or, |1-\bar{a}b|^2 - |a-b|^2 = (1-\bar{a}b)\left(\overline{1-\bar{a}b}\right) - (a-b)\left(\overline{a-b}\right) = (1-\bar{a}b)\left(1-a\bar{b}\right) - (a-b)\left(\bar{a}-\bar{b}\right) = 1 + a\bar{a}b\bar{b} - a\bar{a} - b\bar{b}$

$= 1 + |a|^2|b|^2 - |a|^2 - |b|^2 = (1-|a|^2)(1-|b|^2) \underbrace{\geq}_{\substack{car\ |a|<1\ donc\ |a|^2<1\\ idem\ pour\ b}} 0.$

J'en déduis que $|a-b|^2 < |1-\bar{a}b|^2$ et par conséquent, l'inégalité $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$qui lui est équivalente est vraie aussi.

Ex 9 Soit $u \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ *et* $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que : $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1$.

$$\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z-u\bar{z}}{1-u} = \overline{\left(\frac{z-u\bar{z}}{1-u}\right)} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\overline{\left(\frac{z-u\bar{z}}{1-u}\right)}=\frac{\overline{z-u\bar{z}}}{\overline{1-u}}=\frac{\bar{z}-\bar{u}\bar{\bar{z}}}{1-\bar{u}}=\frac{\bar{z}-\bar{u}\bar{\bar{z}}}{1-\bar{u}}=\frac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}}} \frac{z-u\bar{z}}{1-u} = \frac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}} \Leftrightarrow (z-u\bar{z})(1-\bar{u}) = (1-u)(\bar{z}-\bar{u}z) \Leftrightarrow z - z\bar{u} - u\bar{z} + u\bar{u}\bar{z} = \bar{z} - \bar{u}z - u\bar{z} + u\bar{u}z$$

$$\Leftrightarrow z - \bar{z} - |u|^2(z-\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})(1-|u|^2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{z = \bar{z}}_{\substack{impossible \\ car\ z \notin \mathbb{R}}} \ ou\ |u|^2 = 1 \Leftrightarrow |u|^2 = 1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ |u|\ est \\ un\ réel\ positif}} |u| = 1.$$

EX 10 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Montrer que les racines complexes de $P(z) = z^n - z - 1$ sont de module strictement compris entre 0 et 2.

Soit z une racine complexe de $P.\ Alors\ P(z) = z^n - z - 1 = 0$. Donc $z^n = z + 1$ et par conséquent, $|z|^n = |z^n| = |z+1| \leq |z| + 1$.

Soit $\varphi : (t \mapsto t^n - t - 1)$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ *et* $\forall t \geq 0, \varphi'(t) = nt^{n-1} - 1$. Donc $\varphi'(t) \geq 0 \Leftrightarrow nt^{n-1} \geq 1 \Leftrightarrow t^{n-1} \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow t \geq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

t	0	$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$	2	$+\infty$
$\varphi'(t)$	$-$		$+$	
$\varphi(t)$	$\searrow$		$\nearrow$	

$2 > 1 > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ Donc φ est strictement croissante *sur* $[2, +\infty[$.

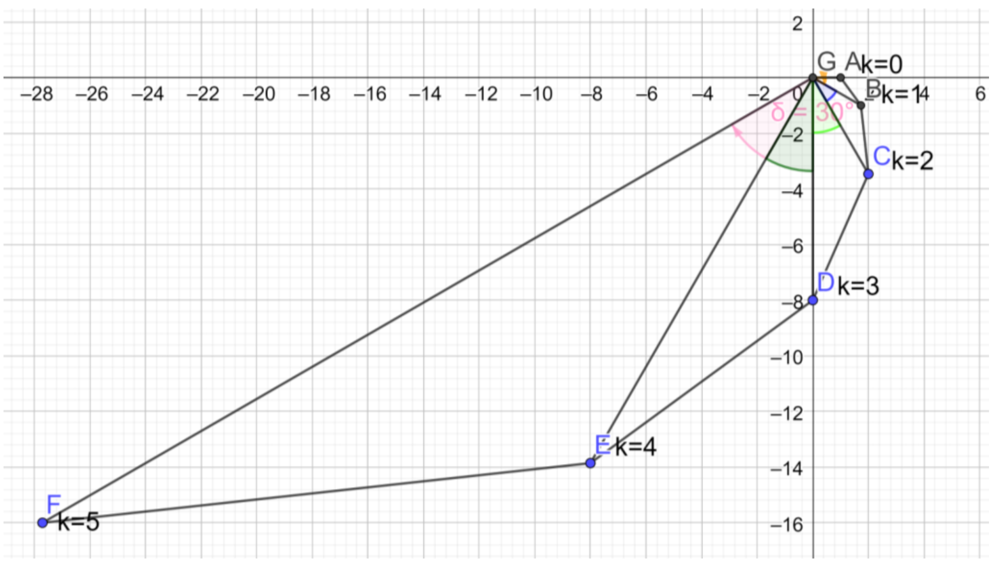
Comme $\varphi(2) > 0, \forall t \geq 2, \varphi(t) > 0$.

Alors par contraposée, puisque $\varphi(|z|) \leq 0$, nécessairement $|z| < 2$.

EX 11 Déterminer les entiers n tels que : $(\sqrt{3} - i)^n$ soit réel. Représenter les points d'affixe $z_k = (\sqrt{3} - i)^k$ tq $k \in [\![0,5]\!]$.

$$(\sqrt{3} - i)^n = \left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right)^n = \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n e^{-in\frac{\pi}{6}}.$$

Donc, $(\sqrt{3} - i)^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \arg\left((\sqrt{3} - i)^n\right) = k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / -n\frac{\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / n = -6k \Leftrightarrow$ *n est un multiple de 6.*



EX 12 Déterminer une fonction polynômiale P tel que : pour tout réel x, $sin(7x) = P(\sin(x))$.

$sin(7x) = Im(e^{i7x}) = Im((e^{ix})^7) = Im((\cos(x) + isin(x))^7)$.

Or, $(\cos(x) + isin(x))^7 \overset{FBN}{\triangleq} (\cos(x))^7 + 7(\cos(x))^6(isin(x)) + 21(\cos(x))^5(isin(x))^2 + 35(\cos(x))^4(isin(x))^3 + 35(\cos(x))^3(isin(x))^4 + 21(\cos(x))^2(isin(x))^5 + 7(\cos(x))^1(isin(x))^6 + (isin(x))^7$.

$$(\cos(x) + isin(x))^7 = \left[(\cos(x))^7 - 21(\cos(x))^5(sin(x))^2 + 35(\cos(x))^3(sin(x))^4 - 7(\cos(x))^1(sin(x))^6\right]$$
$$+ i\left[7(\cos(x))^6(sin(x)) - 35(\cos(x))^4(sin(x))^3 + 21(\cos(x))^2(sin(x))^5 - (sin(x))^7\right].$$

Donc, $sin(7x) = 7(\cos(x))^6(sin(x)) - 35(\cos(x))^4(sin(x))^3 + 21(\cos(x))^2(sin(x))^5 - (sin(x))^7$

$= 7(\cos^2(x))^3(sin(x)) - 35(\cos^2(x))^2(sin(x))^3 + 21(\cos(x))^2(sin(x))^5 - (sin(x))^7$

$= 7(1 - \sin^2(x))^3(sin(x)) - 35(1 - \sin^2(x))^2(sin(x))^3 + 21(1 - \sin^2(x))(sin(x))^5 - (sin(x))^7$

$= 7[1 - 3\sin^2(x) + 3sin^4(x) - sin^6(x)]\sin(x) - 35[1 - 2\sin^2(x) + sin^4(x)]sin^3(x + 21[1 - \sin^2(x)]sin^5(x) - sin^7(x)$

$= 7(sin(x) - 3\sin^3(x) + 3sin^5(x) - sin^7(x)) - 35(sin^3(x) - 2\sin^5(x) + sin^7(x)) + 21(\sin^5(x) - \sin^7(x)) - \sin^7(x)$.

Ainsi, $sin(7x) = 7\sin(x) - 56sin^3(x) + 112sin^5(x) - 64sin^7(x) = P(\sin(x))$ où $P(t) = -64t^7 + 112t^5 - 56t^3 + 7t$.

EX 13 Retrouver la relation entre $cos(3t), cos^3(t)et\ cos(t)$.

$ccos^3(t)et\ cos(t)$.

EX 14 Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)\, sin^5(2t)dt$.

$$\cos(3t)\, sin^5(2t) \overset{Euler}{\triangleq} \left(\frac{e^{i3t} + e^{-i3t}}{2}\right)\left(\frac{e^{i2t} - e^{-i2t}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{2(2i)^5}(e^{i3t} + e^{-i3t})(e^{i2t} - e^{-i2t})^5$$

$$\overset{FBN}{\triangleq} \frac{1}{2^6 i^4 i}(e^{i3t} + e^{-i3t})[(e^{i2t})^5 + 5(e^{i2t})^4(-e^{-i2t})^1 + 10(e^{i2t})^3(-e^{-i2t})^2 + 10(e^{i2t})^2(-e^{-i2t})^3 + 5(e^{i2t})^1(-e^{-i2t})^4 + (-e^{-i2t})^5]$$

$$= \frac{1}{2^6 i}(e^{i3t} + e^{-i3t})(e^{i10t} - 5e^{i6t} + 10e^{i2t} - 10\, e^{-i2t} + 5e^{-i6t} - e^{-i10t})$$

$$= \frac{1}{2^6 i}(e^{i13t} - 5e^{i9t} + 10e^{i5t} - 10\, e^{it} + 5e^{-i3t} - e^{-i7t} + e^{i7t} - 5e^{i3t} + 10e^{-it} - 10e^{-i5t} + 5e^{-i9t} - e^{-i13t})$$

$$= \frac{1}{2^6 i}(e^{i13t} - 5e^{i9t} + 10e^{i5t} - 10\, e^{it} + 5e^{-i3t} - e^{-i7t} + e^{i7t} - 5e^{i3t} + 10e^{-it} - 10e^{-i5t} + 5e^{-i9t} - e^{-i13t})$$

$$\overset{Euler}{\triangleq} \frac{1}{2^6 i}[2isin(13t) - 10isin(9t) + 20i\sin(5t) - 10i\sin(3t) - 20isin(t) + 2isin(7t)]$$

$= \frac{1}{2^5}[sin(13t) - 5sin(9t) + 10\sin(5t) - 5\sin(3t) - 10sin(t) + sin(7t)]$

Donc, $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2^5}[sin(13t) - 5sin(9t) + 10\sin(5t) - 5\sin(3t) - 10sin(t) + sin(7t)]dt$

$$I = \frac{1}{2^5}\left[-\frac{1}{13}cos(13t) + \frac{5}{9}cos(9t) - 2\cos(5t) + \frac{5}{3}cos(3t) + 10cos(t) - \frac{1}{7}cos(7t)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I = \frac{1}{2^5}\left[-\frac{1}{13}cos\left(13\frac{\pi}{3}\right) + \frac{5}{9}cos\left(9\frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(5\frac{\pi}{3}\right) + \frac{5}{3}cos\left(3\frac{\pi}{3}\right) + 10cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{7}cos\left(7\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\frac{1}{13}+\frac{5}{9}-2+\frac{5}{3}+10-\frac{1}{7}\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{2^5}\left[-\frac{1}{13}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{5}{9} - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{5}{3} + 10cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{7}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\frac{1}{13}+\frac{5}{9}+\frac{5}{3}+8-\frac{1}{7}\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{2^5}\left[\left(-\frac{1}{13}-\frac{1}{7}+8\right)\frac{1}{2} - \frac{5}{9} - \frac{5}{3} + \left(\frac{1}{13}-\frac{5}{9}-\frac{5}{3}-8+\frac{1}{7}\right)\right] = \frac{1}{2^5}\left[\frac{1}{26} - 4 + \frac{1}{14} - \frac{40}{9}\right] = -\frac{3413}{13104}$$

EX 15 Soit x *et* y des réels, n un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)$. En déduire $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$.
2. $R_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx+y)$
3. $S = cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{9\pi}{11}\right)$.
4. $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{cos^k(x)}$
5. $X_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k+1} sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.
6. $V_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} cos(2kx)$
7. $S_n = \sum_{k=0}^n sin^2(kx)$
8. $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} cos^3(kx)$
9. $W_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} sin^2(kx)$.

1. $S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right) = \sum_{k=1}^n Im\left(e^{i\frac{k}{n}\pi}\right) = Im\left[\sum_{k=1}^n (e^{i\frac{\pi}{n}})^k\right]$. Or, $\sum_{k=1}^n (e^{i\frac{\pi}{n}})^k = \begin{cases} n \text{ si } e^{i\frac{\pi}{n}} = 1 \\ \frac{(e^{i\frac{\pi}{n}})^n - 1}{e^{i\frac{\pi}{n}} - 1} e^{i\frac{\pi}{n}} \text{ si } e^{i\frac{\pi}{n}} \neq 1 \end{cases}$ *Or,* $\frac{\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \underbrace{\pi \equiv 0[2n\pi]}_{impossible}$.

$\sum_{k=1}^n (e^{i\frac{\pi}{n}})^k = \frac{e^{i\pi}-1}{e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(2isin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)} e^{i\frac{\pi}{n}} = \frac{-2}{2isin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{i\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right) + i\frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)$

$\sum_{k=1}^n (e^{i\frac{\pi}{n}})^k = \frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right) + i\frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) = -1 + icotan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$. Ainsi, $S_n = cotan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

$$\sum_{k=1}^n Im(z_k) = Im\left[\sum_{k=1}^n z_k\right]$$
$$\sum_{k=1}^n Re(z_k) = Re\left[\sum_{k=1}^n z_k\right]$$

$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{ntan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\frac{\pi}{2n}}{tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right]$. Comme $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n} = 0 \\ \lim_{x\to0}\frac{\tan(x)}{x} = 1 \text{ donc } \lim_{x\to0}\frac{x}{\tan(x)} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$, je peux conclure , en composant, que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2n}}{tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 1$ *et par s*

2. $R_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx+y) = \sum_{k=1}^n Im(e^{i(kx+y)}) = Im(\sum_{k=1}^n e^{i(kx+y)})$. Or, $\sum_{k=1}^n e^{i(kx+y)} = \sum_{k=1}^n e^{ikx}e^{iy} = e^{iy}\sum_{k=1}^n (e^{ix})^k = e^{iy} \times \begin{cases} \frac{(e^{ix})^n - 1}{e^{ix}-1} e^{ix} \text{ si } e^{ix} \neq 1 \\ n \text{ si } e^{ix} = 1 \end{cases}$.

Or, $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi$.

<u>1er cas : $\forall k \in \mathbb{Z}, x \neq 2k\pi$</u>. $\sum_{k=1}^n e^{i(kx+y)} = e^{iy}\frac{(e^{ix})^n-1}{e^{ix}-1}e^{ix} = \frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}e^{i(x+y)} = \frac{2isin\left(\frac{nx}{2}\right)e^{\frac{inx}{2}}}{2isin\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{ix}{2}}}e^{i(x+y)} = \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\left(\frac{nx}{2}-\frac{x}{2}+x+y\right)} = \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\left(\frac{(n+1)}{2}x+y\right)}$

$$e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$
$$e^{i\theta} - 1 = 2\,isin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Donc, $R_n = \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\left(\frac{(n+1)}{2}x+y\right)\right)$.

<u>2ème cas : $\exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi$</u>. $\sum_{k=1}^n e^{i(kx+y)} = ne^{iy}$. Donc, $R_n = ncos(y)$.

3. $S = cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \sum_{k=1}^4 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{11}\right) = \sum_{k=1}^4 Re\left(e^{i\frac{(2k+1)\pi}{11}}\right) = Re\left(\sum_{k=1}^4 e^{i\frac{(2k+1)\pi}{11}}\right)$.

Et $\sum_{k=1}^4 e^{i\frac{(2k+1)\pi}{11}} = e^{i\frac{\pi}{11}}\sum_{k=1}^4\left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^k = e^{i\frac{\pi}{11}}\frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^4-1}{e^{i\frac{2\pi}{11}}-1}e^{i\frac{2\pi}{11}} = \frac{\left(e^{i\frac{8\pi}{11}}\right)-1}{e^{i\frac{2\pi}{11}}-1}e^{i\frac{3\pi}{11}} = \frac{2isin\left(\frac{4\pi}{11}\right)\left(e^{i\frac{4\pi}{11}}\right)}{2isin\left(\frac{\pi}{11}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{11}}\right)}e^{i\frac{3\pi}{11}} = \frac{sin\left(\frac{4\pi}{11}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}e^{i\frac{6\pi}{11}}$. Donc, $S = \frac{sin\left(\frac{4\pi}{11}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}\cos\left(\frac{6\pi}{11}\right)$.

je linéarise $sin^2(kx)$ avec $cos(2\theta)=1-2sin^2(\theta)$

4. $S_n = \sum_{k=0}^n sin^2(kx) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n[1-cos(2kx)] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n \cos(2kx) = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}Re(\sum_{k=0}^n e^{2ikx})$.

Or, $\sum_{k=0}^n e^{2ikx} = \sum_{k=0}^n (e^{2ix})^k = \begin{cases} \frac{(e^{2ix})^{n+1}-1}{e^{2ix}-1} \text{ si } e^{2ix} \neq 1 \\ n+1 \text{ si } e^{2ix} = 1 \end{cases}$. De plus, $e^{2ix} = 1 \Leftrightarrow 2x \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi]$.

Si $x \equiv 0[\pi]$ alors $Re(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}) = n+1$ *et* $S_n = 0$.

Si $x \not\equiv 0[\pi]$ alors $\sum_{k=0}^n e^{2ikx} = \frac{(e^{2ix})^{n+1}-1}{e^{2ix}-1} = \frac{e^{2i(n+1)x}-1}{e^{2ix}-1} = \frac{2i\sin((n+1)x)\,e^{i(n+1)x}}{2isin(x)e^{ix}} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}e^{i((n+1)x-x)} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}e^{i(nx)} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}[\cos(nx)+isin(nx)]$.

Donc, $Re(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}cos(nx)$. Alors $S_n = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\frac{sin((n+1)x)}{sin(x)}cos(nx)$.

5. $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} cos^3(kx)$.

Linéarisons $cos^3(kx)$:

$cos(3kx) \overset{Euler}{=} \left(\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\right)^3 \overset{FBN}{=} \frac{1}{8}((e^{ikx})^3 + 3(e^{ikx})^2e^{-ikx} + 3e^{ikx}(e^{-ikx})^2 + (e^{-ikx})^3) = \frac{1}{8}(e^{i3kx} + 3e^{ikx} + 3e^{-ikx} + e^{-3ikx}) = \frac{1}{8}(2\cos(3kx) + 6\cos(kx))$

$cos(3kx) = \frac{1}{4}(\cos(3kx) + 3\cos(kx))$.

Donc, $T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4}(\cos(3kx)+3\cos(kx)) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(3kx) + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(kx)$.

Calculons plus généralement $S(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta)$:

$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n-1}Re(e^{ik\theta}) = Re[\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\theta}]$ et $\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n-1}(e^{i\theta})^k = \begin{cases} \frac{(e^{i\theta})^n-1}{e^{i\theta}-1} \text{ si } e^{i\theta} \neq 1 \\ n \text{ si } e^{i\theta} = 1 \end{cases}$. Or, $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\theta = 2k\pi$

<u>1er cas : $\exists k \in \mathbb{Z}/\theta = 2k\pi$</u>. Alors, $\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta) = n$

<u>2ème cas : $\forall k \in \mathbb{Z}, \theta \neq 2k\pi$</u>. Alors, $\frac{(e^{i\theta})^n-1}{e^{i\theta}-1} = \frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = \frac{2isin\left(\frac{n\theta}{2}\right)e^{i\frac{n\theta}{2}}}{2isin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{\frac{i(n-1)\theta}{2}}$; *donc* $\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta) = \frac{sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right)$.

Retour à T_n :

<u>1er cas :</u> $\exists k \in \mathbb{Z}/x = 2k\pi$. Alors $3x = 2k\pi$ donc $T_n = \frac{1}{4}n + \frac{3}{4}n = n$.

<u>2ème cas :</u> $\exists k \in \mathbb{Z}/3x = 2k\pi$ et $\forall p \in \mathbb{Z}/x \neq 2p\pi$. Alors $T_n = \frac{1}{4}n + \frac{3}{4}\frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)$.

<u>3ème cas :</u> $\forall p \in \mathbb{Z}/3x \neq 2k\pi$ et $x \neq 2p\pi$. Alors $T_n = \frac{1}{4}\frac{sin\left(\frac{3nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{3x}{2}\right)}\cos\left(\frac{3(n-1)x}{2}\right) + \frac{3}{4}\frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)$.

si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, alors
$Re(\alpha z) = \alpha Re(z)$
et $Im(\alpha z) = \alpha Im(z)$.

6. $U_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(kx)}{cos^k(x)} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{Im}(e^{ikx})}{cos^k(x)} \overset{car\ \frac{1}{cos^k(x)}\in\mathbb{R}}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{ikx}}{cos^k(x)}\right) = Im\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikx}}{cos^k(x)}\right).$

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{ikx}}{cos^k(x)} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{e^{ix}}{cos(x)}\right)^k = \begin{cases}\frac{\left(\frac{e^{ix}}{cos(x)}\right)^n-1}{\frac{e^{ix}}{cos(x)}-1} & si\ \frac{e^{ix}}{cos(x)}\neq 1\\ n\ \ si\ \frac{e^{ix}}{cos(x)} = 1\end{cases}$. Or $\frac{e^{ix}}{cos(x)} = 1 \Leftrightarrow e^{ix} = \cos(x) \Leftrightarrow \cos(x)+isin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/x = k\pi.$

1er cas : $\forall k\in\mathbb{Z}, x\neq k\pi$.

$\frac{\left(\frac{e^{ix}}{cos(x)}\right)^n-1}{\frac{e^{ix}}{cos(x)}-1} = \frac{\frac{e^{inx}}{(cos(x))^n}-1}{\frac{e^{ix}}{cos(x)}-1} = \frac{e^{inx}-(cos(x))^n}{e^{ix}-\cos(x)}\frac{1}{(\cos(x))^{n-1}} = \frac{1}{(\cos(x))^{n-1}}\frac{\cos(nx)-(cos(x))^n+isin(nx)}{\cos(x)+i\sin(x)-\cos(x)} = \frac{1}{(\cos(x))^{n-1}}\frac{\cos(nx)-(cos(x))^n+isin(nx)}{i\sin(x)}$

$\frac{\left(\frac{e^{ix}}{cos(x)}\right)^n-1}{\frac{e^{ix}}{cos(x)}-1} \overset{car\ \frac{1}{i}=-i}{=} \frac{1}{\sin(x)(\cos(x))^{n-1}}(-i)[\cos(nx)-(cos(x))^n+isin(nx)] = \frac{1}{\sin(x)(\cos(x))^{n-1}}[\sin(nx)-i(\cos(nx)-(cos(x))^n)]$. Donc, $U_n = \frac{\cos(nx)-(cos(x))^n}{\sin(x)(\cos(x))^{n-1}}$.

2ème cas : $\exists k\in\mathbb{Z}, x = k\pi$. $U_n = Im(n) = 0.$

7. $X_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}Im\left(e^{i\frac{k\pi}{3}}\right) \overset{car\ \frac{1}{2^{k+1}}\in\mathbb{R}}{=} \sum_{k=1}^{n-1}Im\left(\frac{1}{2^{k+1}}e^{i\frac{k\pi}{3}}\right) = Im\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}e^{i\frac{k\pi}{3}}\right).$

Or, $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}e^{i\frac{k\pi}{3}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)-1}\right]\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = \frac{1}{2^n}\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n-2^{n-1}e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}-2} = \frac{1}{2^n}\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n-2^{n-1}e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}-2} = \frac{1}{2^n}\frac{\left[\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n-2^{n-1}e^{i\frac{\pi}{3}}\right]\left[e^{-i\frac{\pi}{3}}-2\right]}{\left|e^{i\frac{\pi}{3}}-2\right|^2}$

$\underbrace{=}_{e^{i\frac{\pi}{3}}-2 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-2 = \frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2^n}\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{n-1}-2\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n-2^{n-1}+2^ne^{i\frac{\pi}{3}}}{3} = \frac{1}{3\times 2^n}\left[e^{i(n-1)\frac{\pi}{3}}-2e^{in\frac{\pi}{3}}-2^{n-1}+2^ne^{i\frac{\pi}{3}}\right].$

$donc \left|e^{i\frac{\pi}{3}}-2\right|^2 = \frac{9}{4}+\frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$

Donc $X_n = \frac{1}{3\times 2^n}\left[\sin\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)+2^n\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{3\times 2^n}\left[\sin\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)+2^{n-1}\sqrt{3}\right].$

Vérification : $X_2 = \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{2^{k+1}}sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \frac{1}{2^2}sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$ et $\frac{1}{3\times 2^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\right] = \frac{1}{3\times 4}\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{8}$. Ok !!

$X_3 = \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2^{k+1}}sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \frac{1}{2^2}sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2^3}sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ et $\frac{1}{3\times 2^3}\left[\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\left(3\frac{\pi}{3}\right)+2^2\sqrt{3}\right] = \frac{1}{3\times 8}\left[9\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{3\sqrt{3}}{16}$. Ok !!

8. $V_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}cos(2kx) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Re(e^{i2kx}) \overset{car\ \binom{n}{k}\in\mathbb{R}}{=} \sum_{k=0}^{n}Re\left(\binom{n}{k}e^{i2kx}\right) = Re\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i2kx}\right).$

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i2kx} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{i2x})^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{i2x})^k1^{n-k} \overset{FBN}{=} (1+e^{i2x})^n = (2\cos(x)e^{ix})^n = 2^n\cos(x)^ne^{inx}$. Donc, $V_n = 2^n\cos(x)^n\cos(nx)$.

9. $S_n = \sum_{k=0}^{n}sin^2(kx) \overset{\substack{je\ linéarise\\ sin^2(kx)\\ avec\ \cos(2\theta)=1-2sin^2(\theta)}}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}[1-cos(2kx)] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}1-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx) = \frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}Re(\sum_{k=0}^{n}e^{2ikx}).$

en appliquant le résultat précédent

$Or, \sum_{k=0}^{n}e^{2ikx} = \sum_{k=0}^{n}(e^{2ix})^k = \begin{cases}\frac{(e^{2ix})^{n+1}-1}{e^{2ix}-1}\ si\ e^{2ix}\neq 1\\ n+1\ si\ e^{2ix} = 1\end{cases}$. De plus, $e^{2ix} = 1 \Leftrightarrow 2x\equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow x\equiv 0[\pi]$.

Si $x\equiv 0[\pi]$ alors $Re(\sum_{k=0}^{n}e^{2ikx}) = n+1\ et\ S_n = 0.$

Si $x\not\equiv 0[\pi]$ alors $\sum_{k=0}^{n}e^{2ikx} = \frac{(e^{2ix})^{n+1}-1}{e^{2ix}-1} = \frac{e^{2i(n+1)x}-1}{e^{2ix}-1} = \frac{2i\sin((n+1)x)e^{i(n+1)x}}{2isin(x)e^{ix}} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}e^{i((n+1)x-x)} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}e^{i(nx)} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}[\cos(nx)+isin(nx)].$

Donc, $Re(\sum_{k=0}^{n}e^{2ikx}) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\cos(nx)$. Alors $S_n = \frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\cos(nx).$

10. $T_n = \sum_{k=0}^{n-1}cos^3(kx)$. •**Linéarisons $cos^3(kx)$:**

$\cos(3kx) \overset{Euler}{=} \left(\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\right)^3 \overset{FBN}{=} \frac{1}{8}((e^{ikx})^3+3(e^{ikx})^2e^{-ikx}+3e^{ikx}(e^{-ikx})^2+(e^{-ikx})^3) = \frac{1}{8}(e^{i3kx}+3e^{ikx}+3e^{-ikx}+e^{-3ikx}) = \frac{1}{8}(2\cos(3kx)+6\cos(kx))$

$\cos(3kx) = \frac{1}{4}(\cos(3kx)+3\cos(kx))$.

Donc, $T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4}(\cos(3kx)+3\cos(kx)) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(3kx)+\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(kx).$

•**Calculons plus généralement $S(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta)$:**

$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Re}(e^{ik\theta}) = Re[\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\theta}]$ et $\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n-1}(e^{i\theta})^k = \begin{cases}\frac{(e^{i\theta})^n-1}{e^{i\theta}-1} & si\ e^{i\theta}\neq 1\\ n\ \ si\ e^{i\theta} = 1\end{cases}$. Or, $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\theta = 2k\pi$

1er cas : $\exists k\in\mathbb{Z}/\theta = 2k\pi$. Alors, $\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta) = n$

2ème cas : $\forall k\in\mathbb{Z}, \theta\neq 2k\pi$. Alors, $\frac{(e^{i\theta})^n-1}{e^{i\theta}-1} = \frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = \frac{2isin\left(\frac{n\theta}{2}\right)e^{\frac{in\theta}{2}}}{2isin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}} = \frac{sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{\frac{i(n-1)\theta}{2}}$; $donc\ \sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta) = \frac{sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right).$

si $\alpha\in\mathbb{R}$ et $z\in\mathbb{C}$, alors $Re(\alpha z) = \alpha Re(z)$ et $Im(\alpha z) = \alpha Im(z)$.

Retour à T_n :

1er cas : $\exists k\in\mathbb{Z}/x = 2k\pi$. Alors $3x = 2k\pi$ donc $T_n = \frac{1}{4}n+\frac{3}{4}n = n.$

2ème cas : $\exists k\in\mathbb{Z}/3x = 2k\pi\ \ et\ \forall p\in\mathbb{Z}/x\neq 2p\pi$. Alors $T_n = \frac{1}{4}n+\frac{3}{4}\frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)$.

11. $W_n \underbrace{=}_{\substack{car\\ le\ terme\\ k=0\\ est\ nul.}} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}sin^2(kx) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1-\cos(2kx)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(2kx) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right]-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}cos(2kx)\right]$

$W_n = \frac{1}{2}[2^n]+\frac{1}{2}[2^n\cos(2x)^n\cos(2nx)] = 2^{n-1}+2^n\cos(2x)^{n-1}\cos(2nx)$

EX 16 1) Calculer de deux manières $(1+i)^n$ et en déduire : $S_n = \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}(-1)^k$ et $T_n = \sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}(-1)^k$.

2) On pose $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

a. Calculer $1+j+j^2\ et\ j^p$ suivant les valeurs de l'entier naturel p puis placer les points M_p d'affixe j^p dans le plan complexe.

b. En déduire les valeurs des sommes : $U_n = \sum_{0\leq k\leq n}\binom{3n}{3k}$, $V_n = \sum_{0\leq k\leq n}\binom{3n}{3k+1}$ et $W_n = \sum_{0\leq k\leq n}\binom{3n}{3k+2}$.

1) D'une part, $z = (1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^ne^{i\frac{n\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$. Donc $\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = Re(z) et \left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = Im(z).$

D'autre part, $z=(1+i)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}i^p=\sum_{\substack{p=0\\ p\ pair}}^{n}\binom{n}{p}i^p+\sum_{\substack{p=0\\ p\ impair}}^{n}\binom{n}{p}i^p=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}i^{2k}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n}{2k+1}i^{2k+1}$

$z=(1+i)^n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}(-1)^k+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n}{2k+1}(-1)^k i=S_n+iT_n$. Comme S_n et T_n sont des réels, $S_n=Re(z)$ et $T_n=Im(z)$. Alors par unicité des parties réelle et im

d'un complexe, $S_n=\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ et $T_n=\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

2)

a. $j^p=e^{2ip\frac{\pi}{3}}=\begin{cases}1 & si\ p\equiv 0[3]\\ e^{2i\frac{\pi}{3}} & si\ p\equiv 1[3]\\ e^{4i\frac{\pi}{3}} & si\ p\equiv 2[3]\end{cases}=\begin{cases}1 & si\ p\equiv 0[3]\\ j & si\ p\equiv 1[3]\\ j^2 & si\ p\equiv 2[3]\end{cases}$.

b. $(1+j)^{3n}=\sum_{p=0}^{3n}\binom{3n}{p}j^p=\sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 0[3]}}^{3n}\binom{3n}{p}j^p+\sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 1[3]}}^{3n}\binom{3n}{p}j^p+\sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 2[3]}}^{3n}\binom{3n}{p}j^p=\sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 0[3]}}^{3n}\binom{3n}{p}+\sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 1[3]}}^{3n}\binom{3n}{p}j+\sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 2[3]}}^{3n}\binom{3n}{p}j^2$

$(-j^2)^{3n}=U_n+V_nj+W_nj^2$ .Donc, $(-1)^{3n}j^{6n}=U_n+V_nj+W_nj^2$.

Donc, $(-1)^n=U_n+V_nj+W_nj^2=U_n+V_n\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+W_n\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=U_n-\frac{1}{2}V_n-\frac{1}{2}W_n+i\frac{\sqrt{3}}{2}[V_n-W_n]$.Donc, par unicité des parties réelles et imaginaires d'un complexe, $U_n-\frac{1}{2}V_n-\frac{1}{2}W_n=(-1)^n$ et $V_n-W_n=0$. De plus, $U_n+V_n+W_n=\sum_{p=0}^{3n}\binom{3n}{p}=2^{3n}=8^n$. Ainsi U_n,V_n et W_n vérifient le système linéaire :

$\begin{cases}V_n-W_n=0.\\ U_n+V_n+W_n=8^n\\ U_n-\frac{1}{2}V_n-\frac{1}{2}W_n=(-1)^n\end{cases}$. Donc $\begin{cases}V_n=W_n.\\ U_n+2V_n=8^n\\ U_n-V_n=(-1)^n\end{cases}$ Donc $\begin{cases}V_n=W_n.\\ 3V_n=8^n-(-1)^n\\ 3U_n=8^n+2(-1)^n\end{cases}$. Ainsi, $\begin{cases}V_n=\frac{1}{3}[8^n-(-1)^n].\\ V_n=\frac{1}{3}[8^n-(-1)^n]\\ U_n=\frac{1}{3}[8^n+2(-1)^n]\end{cases}$.

EX 17 Soit α un réel fixé . Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z telle que :

1. $|2z-iz+1|=3$
2. $\left|\frac{2iz+1}{1-2i-(1+i\sqrt{3})z}\right|=1$
3. $\left|\frac{z+1-i}{2i-\bar{z}}\right|=2$
4. $arg(\bar{z}-1)=\frac{\pi}{3}[\pi]$
5. $\arg\left((2\bar{z}-i)(iz-1)\right)=0[\pi]$
6. $arg\left(\frac{\bar{z}-3i}{5+i-\bar{z}}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$
7. $arg\left(\frac{1-(1-i)z}{2+i(z-1)}\right)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$
8. $\frac{z+2+5i}{z-3i}\in\mathbb{R}^{-*}$
9. $\frac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}}\in i\mathbb{R}$.
10. $Re\left(\frac{i-z}{2z+3-i}\right)=0$

2. $|2z-iz+1|=3\Leftrightarrow|(2-i)z+1|=3\Leftrightarrow\left|(2-i)\left[z+\frac{1}{2-i}\right]\right|=3\Leftrightarrow|(2-i)|\left|z+\frac{1}{2-i}\right|=3\Leftrightarrow\sqrt{5}\left|z+\frac{1}{2-i}\right|=3\Leftrightarrow\left|z+\frac{1}{2-i}\right|=\frac{3}{\sqrt{5}}$

$\underset{Aff(A)=\frac{-1}{2-i}=-\left(\frac{2+i}{5}\right)}{\underbrace{\Leftrightarrow}}\ MA=\frac{3}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre A et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

6. Soit $M(z)$ un point tel que : $\bar{z}-3i\neq 0$ et $5+i-\bar{z}\neq 0$ i.e. $z\neq -3i$ et $z\neq -5-i$ i.e.

$arg\left(\frac{\bar{z}-3i}{5+i-\bar{z}}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]\Leftrightarrow arg\left(\overline{\frac{\bar{z}-3i}{5+i-\bar{z}}}\right)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]\Leftrightarrow\arg\left(\frac{z-3i}{5+i-z}\right)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BM})=-\frac{\pi}{2}[2\pi]\Leftrightarrow(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{2}[2\pi]\Leftrightarrow M\neq B$ et $M\neq A$ et M est sur le demi $-$ cercle supérieur de diamètre et délimité par $[A,B]$.

7. $arg\left(\frac{1-(1-i)z}{2+i(z-1)}\right)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]\Leftrightarrow 1-(1-i)z\neq 0$ et $2+i(z-1)\neq 0$ et $arg\left(\frac{1-i}{i}\times\frac{\frac{1}{1-i}-z}{\frac{2}{i}-1+z}\right)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Leftrightarrow z\neq\frac{1}{(1-i)}=\frac{1+i}{2}$ et $z\neq 1+2i$ et $arg\left((1+i)\times\frac{z-\frac{1+i}{2}}{z-(1+2i)}\right)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Leftrightarrow z\neq\frac{1+i}{2}$ et $z\neq 1+2i$ et $arg(1+i)+\arg\left(\frac{z-\frac{1+i}{2}}{z-(1+2i)}\right)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\underset{\substack{Aff(A)=(1+2i)\\ Aff(B)=\frac{1+i}{2}}}{\Leftrightarrow}\ M\neq B$ et $M\neq A$ et $\frac{\pi}{4}+(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Leftrightarrow M\neq B$ et $M\neq A$ et $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow M\neq B$ et $M\neq A$ et M est sur le demi $-$ cercle supérieur de diamètre et délimité par $[A,B]$.

8. Soit z un complexe tel que $1-2i-\left(1+i\sqrt{3}\right)z\neq 0$ i.e. $z=\frac{1-2i}{(1+i\sqrt{3})}$.

$\left|\frac{2iz+1}{1-2i-(1+i\sqrt{3})z}\right|=1\Leftrightarrow\left|\frac{2i\left(z+\frac{1}{2i}\right)}{(1+i\sqrt{3})\left(\frac{1-2i}{1+i\sqrt{3}}-z\right)}\right|=1\Leftrightarrow\frac{|2i|}{|1+i\sqrt{3}|}\left|\frac{z+\frac{1}{2i}}{\frac{1-2i}{1+i\sqrt{3}}-z}\right|=1\underset{|2i|=2=|1+i\sqrt{3}|}{\Leftrightarrow}\left|\frac{z-\frac{1}{2}i}{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i-z}\right|=1\Leftrightarrow\frac{\left|z-\frac{1}{2}i\right|}{\left|\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{4}\right)-\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)i-z\right|}=1\underset{\substack{Aff(A)=\frac{1}{2}i\\ Aff(B)=\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{4}\right)-\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)i}}{\Leftrightarrow}\frac{MA}{MB}=1$

$\Leftrightarrow MA=MB\Leftrightarrow M\in med[A,B]$.

9. Soit z un complexe tel que : $z\neq 3i$.

$\frac{z+2+5i}{z-3i}\in\mathbb{R}^{-*}\Leftrightarrow z=-2-5i$ et $\arg\left(\frac{z+2+5i}{z-3i}\right)\equiv\pi[2\pi]\underset{\substack{Aff(B)=-2-5i\\ Aff(A)=3i}}{\Leftrightarrow}M\neq B$ et $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})\equiv\pi[2\pi]\Leftrightarrow M\neq B$ et $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})\equiv\pi[2\pi]$

$\Leftrightarrow M\in[A,B]\backslash\{A,B\}$

EX 18 1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe complexe z tels que : M,P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle (puis isocèle).

2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points $M(z)$, $P(z^2)$ et $Q(z^4)$ sont alignés.

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points $M(z)$, $A(1)$ et $P(1+z^2)$ sont alignés.

1) Alors, $M=P$ ou $P=Q$ ou $M=Q\Leftrightarrow z=z^2$ ou $z^2=z^3$ ou $z=z^3\Leftrightarrow z(1-z)=0$ ou $z^2(1-z)=0$ ou $z(1-z)(1+z)=0\Leftrightarrow z\in\{-1,1,0\}$.
Désormais $z\notin\{-1,1,0\}$. (sinon MPQ n'est pas un triangle !!)

TRIANGLE RECTANGLE :

- M,P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle en M

$\Leftrightarrow(PM)\perp(QM)\Leftrightarrow(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{QM})\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\Leftrightarrow\arg\left(\frac{z-z^3}{z-z^2}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\Leftrightarrow\arg(1+z)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\underset{\substack{où\\ Aff(B)=-1}}{\underbrace{\Leftrightarrow}}(\vec{\imath},\overrightarrow{BM})\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\Leftrightarrow M$ est sur la droite D passant par B et dirigée par $\vec{\jmath}$.

- M,P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle en P

$\Leftrightarrow (PM) \perp (QP) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{PQ}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z^2-z^3}{z^2-z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{où } Aff(B)=-1} (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow M$ est sur la droite des imaginaires.

- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle en Q

$\Leftrightarrow (QM) \perp (QP) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{PQ}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z^3-z^2}{z^3-z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{où } Aff(B)=-1} (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow M$ est sur le cercle de diamètre [O,B] .

Ainsi, $Sol = (D \cup (Oy) \cup C_{[O,B]}) \backslash \{O, B\}$

TRIANGLE ISOCELE :

- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle isocèle en M

$\Leftrightarrow PM = QM \Leftrightarrow |z - z^3| = |z - z^2| \Leftrightarrow \frac{|z-z^3|}{|z-z^2|} = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z^3}{z-z^2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z+1| = 1 \Leftrightarrow BM = 1 \Leftrightarrow M$ est sur le cercle de centre B et de rayon 1.

- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle isocèle en P

$\Leftrightarrow PM = QP \Leftrightarrow |z^2 - z^3| = |z - z^2| \Leftrightarrow \frac{|z^2-z^3|}{|z-z^2|} = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z^2-z^3}{z-z^2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow M$ est sur le cercle de centre O et de rayon 1.

- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle en Q

$\Leftrightarrow QM = QP \Leftrightarrow |z^3 - z^2| = |z^3 - z| \Leftrightarrow \frac{|z^3-z^2|}{|z^3-z|} = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z}{z+1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{|z+1|} = 1 \Leftrightarrow |z+1| = |z| \Leftrightarrow BM = OM \Leftrightarrow M$ est sur la médiatrice de [O,B].

Ainsi, $Sol = (C(O,1) \cup C(B,1) \cup med[0,B])$

2) Si $M = P$ ou $M = Q$ ou $P = Q$ alors les points M, P et Q sont alignés.

Or $M = P \Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1$.

$M = Q \Leftrightarrow z^4 = z \Leftrightarrow z(z^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow z(z-1)(z^2+z+1) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ les\ solutions \\ de\ 1+z+z^2=0 \\ sont\ les\ racines\ 3ièmes \\ de\ l'unité\ sauf\ 1}} z = 0$ ou $z = 1$ ou $z = j$ ou $z = j^2$.

$P = Q \Leftrightarrow z^4 = z^2 \Leftrightarrow z^{2(z^2-1)} = 0 \Leftrightarrow z^2(z-1)(z+1) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1ou$ $z = -1$.

Donc finalement, si $M \in \{O, A(1), B(-1), C(j), D(j^2)\}$ alors M,P et Q sont alignés.

Prenons maintenant $z \notin \{0,1,-1; j; j^2\}$. Alors, M,P et Q sont distincts. Par conséquent,

M,P et Q sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MP}; \overrightarrow{PQ}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{z^4-z^2}{z^2-z}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{z^2(z-1)(z+1)}{z(z-1)}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg(z(z+1)) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow z(z+1) \in \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow z(z+1) = \overline{z(z+1)} \Leftrightarrow z(z+1) = \bar{z}(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 + z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z}+1) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$ ou $2Re(z) = -1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $Re(z) = -\frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow M$ $est\ sur\ l'axe\ réel\ ou\ sur\ la\ droite\ D\ vertciale\ d'équation\ x = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, *Sol=D ∪ (Ox) puisque les points 0,A,B,C et D sont aussi dans cet ensemble.*

1) Si $M = A$ (i.e $z = 1$) ou $A = P$ (i.e $z = 0$) ou $P = M$ ((i.e $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$) alors les points M, P et A sont alignés.

(en effet , $P = M \Leftrightarrow 1 + z^2 = z \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\Delta=1-4=-3=(i\sqrt{3})^2} z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$) .

Donc finalement, si $M \in \{O, A(1), C\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right), D\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\}$ alors A, M et P sont alignés.

Prenons maintenant $z \notin \left\{0,1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$. Alors, M,P et Q sont distincts. Par conséquent,

M,P et A sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MP}; \overrightarrow{PA}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{1+z^2-1}{z-1}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{z^2}{(z-1)}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow a \Leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)} = \overline{\left(\frac{z^2}{(z-1)}\right)} \Leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)} = \frac{\bar{z}^2}{(\bar{z}-1)}$

$\Leftrightarrow z^2(\bar{z}-1) = \bar{z}^{2(\bar{z}-1)} \Leftrightarrow z(z\bar{z}) - \bar{z}(z\bar{z}) - (z^2 - \bar{z}^2) = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})|z|^2 - (z-\bar{z})(z+\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})[|z|^2 - (z+\bar{z})] = 0$

$\Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$ ou $|z|^2 - (z+\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$ ou $|z|^2 = 2Re(z) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $(x-1)^2 - 1 + y^2 = 0$

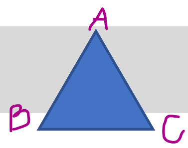
$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $|z-1|^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $|z-1| = 1 \Leftrightarrow M$ $est\ sur\ l'axe\ réel\ ou\ AM = 1$

$\Leftrightarrow M$ $est\ sur\ l'axe\ réel\ ou\ M\ est\ sur\ le\ cercle\ de\ centre\ A\ et\ de\ rayon\ 1$.

Comme O, D et C sont sur le cercle de centre A et de rayon 1, je peux conclure que $Sol = C(A,1) \cup (axe\ réel)$.

EX 19 Soit a, b et c trois complexes distincts et A, B et C leurs images ponctuelles respectives. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Compléter $j^3 = \cdots$. et $1 + j + j^2 = \cdots$.
2. Montrer que : le triangle ABC est équilatère direct (Cf dessin)si et ssi $a + bj + cj^2 = 0$



1. $j^3 = 1$, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = (e^{i\frac{2\pi}{3}})^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \bar{j}$. Donc, 1 ; j et j² sotn les racines troisièmes de l'unité, leur somme est nulle i.e. $1 + j + j^2 == 0$.

2. ABC est équilatère direct **sietssi** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB = AC$ **sietssi** $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $|b-a| = |c-a|$

sietssi $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = 1$ **sietssi** $\frac{c-a}{b-a} = 1e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\underbrace{\textbf{sietssi}}_{car\ e^{i\frac{\pi}{3}}=-j^2=1+j}$ $\frac{c-a}{b-a} = 1 + j$ **sietssi** $(c-a) - (1+j)(b-a) = 0$

sietssi $ja - (1+j)b + c = 0$ **sietssi** $a - \left(\frac{1}{j}+1\right)b + \frac{1}{j}c = 0$ $\underbrace{\textbf{sietssi}}_{car\ \frac{1}{j}=\bar{j}=j^2}$ $a + (j^2+1)b + j^2c = 0$ $\underbrace{\textbf{sietssi}}_{car\ 1+j+j^2=1}$ $a + jb + j^2c = 0$.

EX 20

1) Soit $\alpha = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}$. Représenter les points M_n d'affixe α^n tq $n \in \mathbb{N}$.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}i$ et u_n affixe de M_n .
   a) Montrer que tous les points M_n sont alignés.
   b) Exprimer u_n $en\ fonction\ de\ n$. Déterminer la limite des suites $Re(u_n)$ et $Im(u_n)$.
3) Soit (z_n) la suite de nombres complexes définie par : $z_0 = i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n+2(1-i)}{z_n-3i}$ $(**)$.
   On note M_n le point image de z_n.
   a) Calculer z_1 et z_2 .
   b) Trouver deux suites constantes égales à p et q (telles que $|p| > |q|$.)qui vérifient la même relation de récurrence $(**)$ que la suite (z_n) .
   c) Montrer que la suite $\left(\frac{z_n-p}{z_n-q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   d) En déduire z_n en fonction de n et Déterminer la limite des suites $Re(z_n)$ et $Im(z_n)$.

Ex 21 Soit a un nombre complexe . Résoudre le système (S) : $\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ \bar{a}x + y + az = 0 \\ \bar{a}^2x + \bar{a}y + z = 0 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

Cf corrigé DL 3