TD 23 Espaces euclidiens

Ex 0 Est-ce un produit scalaire ?

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. L'application $\varphi: ((X,Y) \mapsto X^T AY)$ est-elle un produit scalaire sur $M_{3,1}(\mathbb{R})$?

Ex 1 Est-ce un produit scalaire ? Soit a, b , c et d des réels et $\varphi: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y),(x',y') \mapsto axx' + bxy' + cx'y + dyy' \end{pmatrix}$.

a) Justifier que φ est bilinéaire et symétrique.

b) Montrer que φ est produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ sietssi $\begin{cases} b = c \\ a > 0 \\ b^2 - ad < 0 \end{cases}$.

Ex 2 Montrer que $\varphi: ((P,Q) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)Q(n)e^{-n})$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}$[X].

Ex 3 Soit $a = (a_n)$une suite d'éléments de $[0,1]$. On note $A = \{a_n / n \in \mathbb{N}\}$.

Préliminaire : A est dense dans $[0,1]$ lorsque tout intervalle inclus dans $[0,1]$ contient au moins un élément de A ; autrement dit lorsqu' entre deux réels de $[0,1]$, il y a toujours un élément de A.

Montrer que si A est dense dans $[0,1]$ alors tout élément de $[0,1]$ est limite d'une suite d'éléments de A.

1. Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n)g(a_n)$.
2. Justifier que : $\forall (f,g) \in E^2, \varphi(f,g)$ existe bien.
3. Montrer que φ est un produit scalaire sur E sietssi A est dense dans $[0,1]$.

Ex 4 Soient u et v deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien. Montrer que $\left\| \frac{u}{\|u\|^2} - \frac{v}{\|v\|^2} \right\| = \frac{\|u-v\|}{\|u\|\|v\|}$.

Ex 5 CAUCHY-SCHWARZ…. Dans $\mathbb{R}^n$

1. Soit x, y, et z des réels tels que $2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}$.
2. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
   a) Démontrer que $(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. En déduire tous les réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que : $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n^2 \end{cases}$.
   b) On suppose ici que $\forall k \in [\![1,n]\!], x_k > 0$ et $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$. Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$. Etudier le cas d'égalité.
3. Démontrer que : si X est une variable aléatoire non nulle à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sur un univers fini alors $\frac{(E(X))^2}{E(X)^2} \leq P(X \geq 1)$
4. Soit a, b et c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose $s = a + b + c$ et $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.
   a) Montrer que $D = \frac{1}{2} s(3 - s^2)$.
   b) Justifier que $|s| \leq \sqrt{3}$.
   c) En déduire que $|D| \leq 1$.

Ex 6 CAUCHY-SCHWARZ…. Dans $M_n(\mathbb{R})$

Justifier que $\forall (A,B) \in S_n(\mathbb{R})^2, [tr(AB)]^2 \leq tr(A^2)tr(B^2)$.

Ex 7 CAUCHY-SCHWARZ…. Dans $C^0([a,b], \mathbb{R})$.

1. Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R}^+)$. $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_0^1 x^k f(x)dx$. Montrer que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$.
2. Déterminer inf $\left\{ \left(\int_a^b f \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f} \right) / f \in C^0([a,b], \mathbb{R}^{+*}) \right\}$.
3. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ à valeurs réelles et telle que $f(0) = 0$.
   a) Soit $x \in [0,1]$ .Montrer que : $f(x)^2 \leq x \int_0^x f'(t)^2 dt$.
   b) En déduire que : $\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x)^2 dx$.
4. Soit f et g réelles et continues sur $[0,1]$ et telles que $\int_0^1 f = 0$.

Montrer que $\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)^2 dx \right) \left(\int_0^1 g(x)^2 dx - \left(\int_0^1 g(x)dx \right)^2 \right)$.

Questions déjà traitées dans le TD Intégration

Ex 8 CAUCHY-SCHWARZ….Dans $\mathbb{R}[X]$

Justifier que $\forall P \in \mathbb{R}[X], [\int_{-1}^{1} tP(t)dt]^2 \leq \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} (P(t))^2 dt$.

Ex 9 Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$et $(E,(.\ /.))$ un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soit $e_1, e_2, \dots, e_p$ p vecteurs de E tels que : $\forall k, \|e_k\| = 1\ et\ \forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} (x/e_k)^2$.

1. Montrer que $B = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une famille orthonormée. Déterminer $(vect(B))^{\perp}$.
2. En déduire que B est une base de E et $p = n$.

Ex 10 Soit E un espace euclidien et $B = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base orthonormée de E.

1. Montrer que $f: \begin{pmatrix} E \to \mathbb{R}^n \\ u \mapsto ((u/e_1), (u/e_2), \dots, (u/e_n)) \end{pmatrix}$ est linéaire et injective.
2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Justifier qu'il existe un unique vecteur u de E tel que : $\forall k \in [\![1,n]\!], (u/e_k) = \lambda_k$.

Ex 11 Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On note p_F la projection orthogonale sur F. Montrer que : $\forall (u,v) \in E^2, (p_F(u)/v) = (u/p_F(v)) = \ (p_F(u)/p_F(v))$.

Ex 12 $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, on\ pose\ \langle P,Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

1. Montrer que $((P,Q) \mapsto \langle P,Q \rangle)\ est$ un produit scalaire (p.s) sur $\mathbb{R}_n[X]$. On munit désormais $\mathbb{R}_n[X]$ de ce produit scalaire.
2. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n\ [X]/\tilde{P}(1) = 0\}$. Justifier que H est un ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer $H^{\perp}$. Calculer la distance de X à H.
3. Déterminer les uniques réels positifs $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $(\lambda_k X^k)_{k=0..n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce p.s.
4. En déduire le projeté orthogonal de $T = 3X^n - 4X^{n-1} + 5X^3 + 2X^2 - 1$ sur $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/P(X) = P(-X)\}$.

Ex 13 $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, (P/Q) = \int_{-1}^{1} \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)dt.$

1. Montrer que $(./.)$ est un $p.s$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $n = 3$, trouver une BON de $\mathbb{R}_3[X]$ muni de ce $p.s$.
3. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n\ [X]/XP(X) = P(X^2)\}$.Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], p_H(Q) = \left[\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} t\tilde{Q}(t)dt\right] X.$

Ex 14 On munit $\mathbb{R}^4$du produit scalaire canonique. Soit $H = \{(x,y,z,t)/x - y + z - t = 0\}$ et $F = \{(x,y,z,t)/x + y = y + z = z + t\}$.

1. Montrer que H est un hyperplan et préciser $H^{\perp}$.
2. Déterminer une base orthonormée de H.
3. Déterminer la matrice de p_H et celle de $p_{H^{\perp}}$dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
4. Soit $X = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $d(X,F)$.

Ex 15 On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel : $(A/B) = tr(A^T B)$.

1. Déterminer $D_n(\mathbb{R})^{\perp}$.
2. Montrer que $S_n(\mathbb{R})^{\perp} = AS_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer $d\big(M, S_n(\mathbb{R})\big)$.
4. Montrer que $\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ |tr(A)| \le \sqrt{n}\|A\|$.
5. Montre que $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ \|AB\| \le \|A\|\|B\|$.

Ex 16 $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, (P/Q) = \int_{-1}^{1} \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)\sqrt{1-t^2}dt.$

1. Montrer que $(./.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}, \sin\big((n+1)u\big) = \sin(u)\widetilde{Q_n}(\cos(u))$.
   Déterminer le degré et coefficient dominant de Q_n.
3. Montrer que la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$est orthogonale.
4. Soit $g: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (a,b,c) \mapsto \int_{-1}^{1} (t^3 + at^2 + bt + c)^2\sqrt{1-t^2}\,dt \end{pmatrix}$. Montrer que g admet un minimum et préciser en quels points ce minimum est atteint.

Ex 17 Calculer $inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{\pi} (e^x - \mathrm{acos}(x) - bsin(x))^2 dx.$

Ex 18 Soit $E = C^{\infty}([-1,1],\mathbb{R})$muni du produit scalaire $(f/g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

A. Soit $H = \{f \in E/f(0) = 0\}$. Montrer que H est ss-e-v de E et $H^{\perp} = \{0\}$. Que pensez-vous de $(H^{\perp})^{\perp}$?

B. Etudions deux familles orthogonales.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n: \begin{pmatrix} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2-1)^n \end{pmatrix}\ et\ p_n = u_n^{(n)}$.Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une famille orthogonale de E.
2. $a)$ Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation $xtan(x) = 1$ admet une unique solution x_n dans l' intervalle$]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
   $b)$ Justifier que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty\ et$ donner un équivalent simple de x_n.
   $c)$ On pose $a_n = \frac{2+x_n{}^2}{1+x_n{}^2}$ et $f_n: \begin{pmatrix} [-1;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\cos(x_n t)}{\sqrt{a_n}} \end{pmatrix}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une famille orthonormée de E.