Sup PCSI 2023-2024

DC 12

Ex 1 Soit E un $K-e-v$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2+6f-7id_E=0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}en fonction de f et id.
2. Montrer que :$(f-id)\circ(f+7id)=0$. En déduire que $Im(f-id)\subset Ker(f+7id)$et $Im(f+7id)\subset Ker(f-id)$.
3. Démontrer enfin que $Ker(f+7id)\oplus Ker(f-id)=E$.
4. Montrer que $Ker(f+7id)$ et $Ker(f-id)$ sont stables par f . On note h et g les endomorphismes induits par f sur respectivement $Ker(f+7id)$ et $Ker(f-id)$. Reconnaitre g et h .
5. Soit p la projection sur $Ker(f+7id)$ et parallèlement à $Ker(f-id)$ et q l'autre projection associée.
   a. Montrer que $f=-7p+q$.
   b. En déduire que $f^n=(-7)^n p+q$.

Ex 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) f est-il un automorphisme ?

2) Montrer que $\ker(f - 4id_{\mathbb{R}^3})^2 \oplus Ker(f - 2id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$

3 Montrer qu'il existe une base $B' = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que : $A' = mat_{B'}f = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4) En déduire $A^n \ tq \ n \in \mathbb{N}$.

Ex 3 Soit E un K-e_v de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que : $f^2 \neq 0 \; et \; f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Application : Montrer que $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....
....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....