PROGRAMME DE COLLE 28

Chapitre 21 Séries numériques.

I généralités

Définitions :

- Série de terme général u_n , notation; somme partielle de rang n
- Série convergente , divergente -nature d'une série
- Somme d'une série convergente- reste de rang n
- Série grossièrement divergente.

Condition nécessaire de convergence- Réciproque fausse.

II Opérations

Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série complexe.

Influence des premiers termes sur la nature et sur la somme d'une série.

Combinaison linéaire de séries convergentes et relation entre les sommes.

Nature d'une série $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ tq $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.

Nature commune de $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} a u_n$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et relation entre les sommes.

Nature commune de $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} \overline{u_n}$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et relation entre les sommes.

III Séries particulières

Séries géométriques $\sum_{n\geq 0} a^n$

Séries de Taylor $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$

Série exponentielle complexe $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

Série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. Cas particuliers $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim_{+\infty} \ln(N)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

IV Séries réelles et à termes positifs

Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série à termes positifs : majoration de la suite des sommes partielles.

Trois théorèmes de comparaison :

1) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$ alors $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge.} \\ \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum_{n\geq 0} v_n \text{ diverge} \end{cases}$.
2) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n$ et $0 \leq v_n$ et $u_n = O(v_n)$ (en particulier, $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$)
   alors $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge.} \\ \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum_{n\geq 0} v_n \text{ diverge} \end{cases}$
3) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n$ et $u_n \sim v_n$ alors ($\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge).

V Comparaison série-intégrale

Soit f une fonction **continue et décroissante et positive** sur $[n_0, +\infty[$. Alors,
la série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $(\int_{n_0}^{n} f(t)dt)$ converge.

VI Séries absolument convergentes

Définition : une série absolument convergente

Si la série de terme général u_n est absolument convergente alors la série de terme général u_n est convergente et $|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$. la réciproque est fausse.

VII Lien suite-série. Séries télescopiques.

La suite (u_n) converge **sietssi** la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

Exemples de calcul de somme de séries télescopiques : $S = \sum_{n=0}^{\infty} Arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$, $S = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+3n^2+2n}$, $S = \sum_{n=2}^{\infty} ln\left(\frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4+2n^3}\right)$, $S = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} tan(2^{-n}x)$ .... .

Chapitre 22 Espaces préhilbertiens réels

I Produit scalaire et norme

- Définition d'un produit scalaire . Définition d'un espace préhilbertien réel E.

l'application $\varphi : \begin{pmatrix} E^2 \to \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}/\vec{y}) \end{pmatrix}$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-e-v E lorsque

- ✓ φ est bilinéaire : $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E^3,\ \ (\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}/\vec{z}) = \alpha(\vec{x}/\vec{z}) + \beta(\vec{y}/\vec{z})$ et $(\vec{z}/\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha(\vec{z}/\vec{x}) + \beta(\vec{z}/\vec{y})$

- ✓ φ est symétrique : $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ (\vec{x}/\vec{y}) = (\vec{y}/\vec{x})$.
- ✓ φ est définie positive : $\forall \vec{x} \in E,\ (\vec{x}/\vec{x}) \geq 0 \ et\ [(\vec{x}/\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}]$.

- Produit scalaire usuel (canonique) dans $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[X], M_n(\mathbb{R}), C^0([a,b],\mathbb{R}), \mathbb{R}[X]$.
- Règles de calcul et inégalité de Cauchy-Schwarz.
  - ✓ $\forall \vec{x} \in E, (\vec{x}/\vec{O}) = 0$
  - ✓ $\forall(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\dots\overrightarrow{x_n},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2},\dots\overrightarrow{y_p}) \in E^{n+p}, \forall(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_p) \in \mathbb{R}^{n+p}$, $(\sum_{i=1}^n \alpha_i\overrightarrow{x_i}/\sum_{i=1}^p \beta_i\overrightarrow{y_i}) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^p \alpha_i\beta_j(\overrightarrow{x_i}/\overrightarrow{y_j})$. .
  - ✓ $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ (\vec{x}/\vec{y})^2 \overset{C.S}{\leqq} (\vec{x}/\vec{x})(\vec{y}/\vec{y})$.
- Définition d'une norme .

l'application $N : \begin{pmatrix} E \to \mathbb{R} \\ \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\| \end{pmatrix}$ est une norme sur le $\mathbb{R}$-e-v E lorsque

- ✓ $\forall \vec{x} \in E, \|\vec{x}\| \geq 0$
- ✓ $\forall \vec{x} \in E, [\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}]$
- ✓ $\forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$
- ✓ $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \|\vec{x}+\vec{y}\| \overset{I.T}{\leqq} \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.Inégalité triangulaire

- Norme euclidienne (norme associée à un produit scalaire). Nouvelle écriture de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ |(\vec{x}/\vec{y})| \overset{C.S}{\leqq} \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.$$

- Identité de polarisation $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, (\vec{x}/\vec{y}) = \frac{1}{4}\,[\|\vec{x}+\vec{y}\| - \|\vec{x}-\vec{y}\|]$.

II Orthogonalité dans un espace préhilbertien E

- Définition de deux vecteurs de E orthogonaux : $\vec{x} \perp \vec{u}$ lorsque $(\vec{x}/\vec{u}) = 0$, d'un vecteur orthogonal à une partie X de E : $\vec{u} \perp X$ lorsque $\forall \vec{x} \in X, (\vec{x}/\vec{u}) = 0$, de deux parties de E orthogonales : $Y \perp X$ lorsque $\forall \vec{x} \in X, \forall \vec{y} \in Y, (\vec{x}/\vec{y}) = 0$
- Définition de l'orthogonal d'une partie de E. L'orthogonal $X^\perp = \{\vec{u} \in E / \forall \vec{x} \in X, (\vec{x}/\vec{u}) = 0\}$.
- L'orthogonal $X^\perp$ d'une partie X de E est un sous-espace-vectoriel de E et $X^\perp = (vect(X))^\perp$.
- Propriétés :
  - ✓ Si $X \subset Y$ alors $Y^\perp \subset X^\perp$.
  - ✓ Si deux ss-e-v F et G de E sont orthogonaux alors F et G sont en somme directe et G est un ss-e-v de $F^\perp$ et F est un ss-e-v de $G^\perp$
- Caractérisation de l'orthogonal d'un ss-e-v de E engendré par une famille de vecteurs :
  - ✓ Si $F = vect(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n})$ alors $[\vec{x} \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], (\vec{x}/\overrightarrow{u_i}) = 0]$.
  - ✓ Si $F = vect(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n})$ et $G = vect(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_p})$ alors $[F \perp G \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,j]\!], (\overrightarrow{u_i}/\overrightarrow{v_j}) = 0]$.
- Définition d'une famille orthogonale, orthonormale, d'une base orthogonale et d'une base orthonormale.
- Base orthonormée de $\mathbb{R}^n$muni du p.s canonique . Idem dans $\mathbb{R}_n[X], M_n(\mathbb{R})$.
- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Toute famille orthonormée est libre.
- **Théorème de Pythagore :** $\vec{x} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \|\vec{x}+\vec{u}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{u}\|^2$. Et la généralisation de « $\Longrightarrow$ »: Si $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n})$ est une famille orthogonale alors $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i\overrightarrow{u_i}\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2\|\overrightarrow{u_i}\|^2$.
- **Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt** : Si $(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n})$ est une famille libre de vecteurs de E alors il existe une famille orthonormée de vecteurs $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ de E tel que $\forall i, \overrightarrow{e_i} \in vect((\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_i})$.

III Espace euclidien E

- Définition d'un espace euclidien E.
- **Existence d'une BON :** tout espace euclidien de dimension non nulle possède une BON.
- **Théorème de la base incomplète** : toute famille orthonormée d'un espace euclidien peut être complétée pour obtenir une BON de cet espace.
- **Ecriture dans une BON** : Soit $B = (\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ une BON de l'espace euclidien E. Alors pour tout $(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$ tels que $\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k\,\overrightarrow{e_k}\ \ et\ \ \vec{y} = \sum_{k=1}^n y_k\,\overrightarrow{e_k}\ ,\ on\ a:\ \ x_k = (\,\vec{x}/\overrightarrow{e_k}\,)\,, (\vec{x}/\vec{y}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ et $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n {x_k}^2}$.

IV Orthogonal d'un ss-e-v de dim. finie. Projection orthogonale sur un tel ss-e-v.

- **Théorème sur le supplémentaire orthogonal** Si F est un ss-e-v de dimension finie d'un espace préhilbertien réel alors $F^\perp$ est le seul ss-e-v de E, orthogonal à F et supplémentaire de F dans E i.e. $F \oplus F^\perp = E\ et\ F^\perp\ \perp\ F$. $F^\perp$est alors appelé le supplémentaire orthogonal de F.
- Si F est un ss-e-v de dimension finie d'un espace préhilbertien réel alors la projection orthogonale sur F notée p_F est alors la projection sur F et parallèlement à $F^\perp$.
- Caractérisation du projeté orthogonal sur F :
  - ✓ $\forall \vec{x} \in E, p_F(\vec{x})$ est le seul vecteur de E qui vérifie : $\begin{cases} p_F(\vec{x}) \in F \\ \vec{x} - p_F(\vec{x}) \in F^\perp \end{cases}$.
  - ✓ $Si\ B = (\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n})$ est une base de F alors $\forall \vec{x} \in E, p_F(\vec{x})$ est le seul vecteur de E qui vérifie:

$$\begin{cases} p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k\,\overrightarrow{u_k} \\ \forall j \in [\![1,n]\!], (\vec{x} - \sum_{k=1}^n \alpha_k\,\overrightarrow{u_k}/\overrightarrow{u_j}) = 0 \end{cases}.$$

- ✓ $Si\ B = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est une BON de F alors $\forall \vec{x} \in E, p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} (\vec{e_k}/\vec{x})\,\vec{e_k}$.

- Projeté orthogonal sur une droite vectorielle : Soit $D = vect(\vec{u})$, droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$. $\forall \vec{x} \in E, p_D(\vec{x}) = \frac{(\vec{x}/\vec{u})}{(\vec{u}/\vec{u})}\vec{u}$.

- Caractérisation du projection orthogonale: Si E est un espace euclidien et F est un ss-e-v de E alors

$$f \text{ est la projection orthogonale sur } F \text{ si et seulement si } \begin{cases} f \in \mathscr{L}(E) \\ f \circ f = f \\ Im(f) \perp Ker(f) \end{cases}.$$

- Distance à un ss-e-v de dimension finie F:
  - ✓ $\forall \vec{x} \in E, \forall \vec{f} \in F, \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| \leq \|\vec{x} - \vec{f}\|$.
  - ✓ $\forall \vec{x} \in E,\ d(\vec{x}, F) = \inf\{\|\vec{x} - \vec{f}\| / \vec{f} \in F\} = \min\{\|\vec{x} - \vec{f}\| / \vec{f} \in F\} = \|p_{F^\perp}(\vec{x})\| = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$
- Hyperplan dans un espace euclidien: Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E.
  - ✓ Tout vecteur $\vec{N}$ engendrant $H^\perp$ est un vecteur normal à H.
  - ✓ Soit $(\vec{e_i})$ $une\ BON\ de\ E$. Si $\vec{N}=\sum_{i=0}^{n} a_i\vec{e_i}$ normal à H alors $H = \{\sum_{i=0}^{n} x_i\vec{e_i} \,/\, \sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0\}$.
  - ✓ $\forall \vec{x} \in E, d(\vec{x}, H) = \frac{|(\vec{x}/\vec{N})|}{\|\vec{N}\|} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} a_i^2}}$.

Questions de cours :

1. **Théorème de condition nécessaire mais pas suffisante de convergence d'une série**
2. **Théorème de comparaison série-intégrale**
3. **Théorème de convergence d'une série absolument convergente.**
4. **Premier et deuxième théorèmes de comparaison.**
5. **Inégalité de Cauchy-Schwarz.**
6. **Théorème sur le supplémentaire orthogonal : si F est un ss-e-v de dimension finie d'un espace préhilbertien réel alors $F^\perp$ est le seul ss-e-v de E, orthogonal à F et supplémentaire de F dans E et $(F^\perp)^\perp = \mathrm{F}$.**