Corrigé du TD 23 Espaces euclidiens

Ex 0 Est-ce un produit scalaire ?

Soit $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. L'application $\varphi:((X,Y)\mapsto X^TAY)$ est-elle un produit scalaire sur $M_{3,1}(\mathbb{R})$?

Ex 1 Est-ce un produit scalaire ? Soit a,b , c et d des réels et $\varphi:\begin{pmatrix}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x,y),(x',y')\mapsto axx'+bxy'+cx'y+dyy'\end{pmatrix}$.

a) Justifier que φ est bilinéaire et symétrique.

b) Montrer que φ est produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ sietssi $\begin{cases}b=c\\a>0\\b^2-ad<0\end{cases}$.

Ex 2 Montrer que $\varphi:((P,Q)\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}P(n)Q(n)e^{-n})$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Ex 3 Soit $a=(a_n)$une suite d'éléments de $[0,1]$. On note $A=\{a_n/n\in\mathbb{N}\}$.

A.Préliminaire : A est dense dans $[0,1]$ lorsque tout intervalle inclus dans $[0,1]$ contient au moins un élément de A ; autrement dit lorsqu' entre deux réels de $[0,1]$, il y a toujours un élément de A.

Montrer que si A est dense dans $[0,1]$ alors tout élément de $[0,1]$ est limite d'une suite d'éléments de A.

B.Soit $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ *et* $\varphi(f,g)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}f(a_n)g(a_n)$.

1. Justifier que : $\forall(f,g)\in E^2,\varphi(f,g)$ existe bien.
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur E sietssi A est dense dans $[0,1]$.

Ex 4 Soient u et v deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien. Montrer que $\left\|\frac{u}{\|u\|^2}-\frac{v}{\|v\|^2}\right\|=\frac{\|u-v\|}{\|u\|\|v\|}$.

Ex 5 CAUCHY-SCHWARZ…. Dans $\mathbb{R}^n$

1. Soit x,y, et z des réels tels que $2x^2+y^2+3z^2\leq1$. Montrer que $(x+y+z)^2\leq\frac{11}{6}$.
2. Soit $(x_1,x_2,..,x_n)\in\mathbb{R}^n$.
   a) Démontrer que $(\sum_{k=1}^n x_k)^2\leq n\sum_{k=1}^n x_k^2$.
   b) On suppose ici que $\forall k\in[\![1,n]\!],x_k>0$ *et* $\sum_{k=1}^n x_k=1$. Démontrer que $\sum_{k=1}^n\frac{1}{x_k}\geq n^2$. Etudier le cas d'égalité.
3. Soit a,b et c trois réels tels que $a^2+b^2+c^2=1$. On pose $s=a+b+c$ et $D=\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}$.
   a) Montrer que $D=\frac{1}{2}s(3-s^2)$.
   b) Justifier que $|s|\leq\sqrt{3}$.
   c) En déduire que $|D|\leq1$.
4. Démontrer que : si X est une variable aléatoire non nulle à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sur un univers fini alors $\frac{(E(X))^2}{E(X)^2}\leq P(X\geq1)$ (Cf TD variables aléatoires)

Ex 6 CAUCHY-SCHWARZ…. Dans $M_n(\mathbb{R})$ Justifier que $\forall(A,B)\in S_n(\mathbb{R})^2,[tr(AB)]^2\leq tr(A^2)tr(B^2)$.

Ex 7 CAUCHY-SCHWARZ…. Dans $C^0([a,b],\mathbb{R})$.

1. Soit $f\in C^0([0,1],\mathbb{R}^+)$. $\forall k\in\mathbb{N}$, on pose $I_k=\int_0^1x^kf(x)dx$. Montrer que $\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2,I_{n+p}^2\leq I_{2n}I_{2p}$.
2. Déterminer inf $\left\{\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b\frac{1}{f}\right)/f\in C^0([a,b],\mathbb{R}^{+*})\right\}$.
3. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ à valeurs réelles et telle que $f(0)=0$.
   a) Soit $x\in[0,1]$ .Montrer que : $f(x)^2\leq x\int_0^x f'(t)^2dt$.
   b) En déduire que : $\int_0^1 f(x)^2dx\leq\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)^2dx$.
4. Soit f et g réelles et continues sur $[0,1]$ et telles que $\int_0^1 f=0$.

Montrer que $\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2\leq\left(\int_0^1 f(x)^2dx\right)\left(\int_0^1 g(x)^2dx-\left(\int_0^1 g(x)dx\right)^2\right)$.

1. On munit $C^0([0,1],\mathbb{R})$ du p.s. $(f|g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Soit $f\in C^0([0,1],\mathbb{R}^+)$ *et* $(n,p)\in\mathbb{N}^2$. On pose . $\forall k\in\mathbb{N},g_k=x^k\sqrt{f(x)}$.

Alors, $g_k\in C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $I_{n+p}=\int_0^1x^{n+p}f(x)dx=\int_0^1x^n\sqrt{f(x)}\times x^p\sqrt{f(x)}dx=(g_n|g_p)$. Alors Cauchy-Schwarz assure que :

$(g_n|g_p)^2\leq\|g_n\|^2\|g_p\|^2$ i.e. $I_{n+p}^2\leq\int_0^1\left(x^n\sqrt{f(x)}\right)^2dx\times\int_0^1\left(x^n\sqrt{f(x)}\right)^2dx=\int_0^1x^{2n}f(x)dx\times\int_0^1x^{2p}f(x)dx=I_{2n}\times I_{2p}$. OK !!

Ex 8 CAUCHY-SCHWARZ....Dans $\mathbb{R}[X]$ Justifier que $\forall P \in \mathbb{R}[X], [\int_{-1}^{1} tP(t)dt]^2 \leq \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(P(t))^2 dt$.

Ex 9 Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(E,(.\,/.))$ un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soit $e_1, e_2, \dots, e_p$ p vecteurs de E tels que : $\forall k, \|e_k\| = 1$ *et* $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p}(x/e_k)^2$.

1. Montrer que $B = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une famille orthonormée. Déterminer $(vect(B))^\perp$.
2. En déduire que B est une base de E et $p = n$.

1. Par « définition », les vecteurs de B sont unitaires. Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$1 = \|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^{p}(e_i/e_k)^2 = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}(e_i/e_k)^2 + \underbrace{(e_i/e_i)^2}_{=\|e_i\|^4=1} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}(e_i/e_k)^2 + 1$. Donc $\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}(e_i/e_k)^2 = 0$.

$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}(e_i/e_k)^2$ est donc une somme nulle de réels positifs. Ces réels sont donc tous nuls : $\forall k \in [\![1,p]\!]\backslash\{i\}, (e_i/e_k)^2 = 0$

i.e. $(e_i/e_k) = 0$. Ainsi, e_i est orthogonal à tous les autres vecteurs de B.

Ainsi, $B = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une famille orthonormée de vecteurs de E.

2. $O_E \in (vect(B))^\perp$ *car* $\forall k \in [\![1,p]\!], (O_E/e_k) = 0$.

Soit $y \in (vect(B))^\perp$. Alors , : $\forall k \in [\![1,p]\!], (y/e_k) = 0$. Par conséquent, $\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{p}(y/e_k)^2 = 0$. Par suite, $y = O_E$.

J'en déduis que $(vect(B))^\perp = \{O_E\}$.

3. $\{O_E\}$ est le seul supplémentaire de E dans E. De plus, $\{O_E\} \perp E$. Donc, comme $dimE < +\infty, E^\perp = \{O_E\}$ et $E = \{O_E\}^\perp$.

$$E = \{O_E\}^\perp = ((vect(B))^\perp)^\perp \underbrace{=}_{car\ dim(vect(B))<+\infty} vect(B).$$

Cela signifie que B est génératrice de E. Comme B est orthonormée, B est libre. Ainsi, B est une base orthonormée de E.

Ex 10 Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On note p_F la projection orthogonale sur F. Montrer que : $\forall (u,v) \in E^2, (p_F(u)/v) = (u/p_F(v)) = (p_F(u)/p_F(v))$.

Soit $(u,v) \in E^2$. Alors $u = p_F(u) + p_{F^\perp}(u)$ et $v = p_F(v) + p_{F^\perp}(v)$. Donc,

$(p_F(u)/v) = (p_F(u)/p_F(v) + p_{F^\perp}(v)) = (p_F(u)/p_F(v)) + \underbrace{(p_F(u)/p_{F^\perp}(v))}_{\substack{=0\ car\\ p_F(u)\in F\ et\\ p_{F^\perp}(v)\in F^\perp}} = (p_F(u)/p_F(v))$.

De même, $(u/p_F(v)) = (p_F(u)/p_F(v))$

Ex 11 $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, on\ pose\ \langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

1. Montrer que $((P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle)$ *est* un produit scalaire (p.s) sur $\mathbb{R}_n[X]$. On munit désormais $\mathbb{R}_n[X]$ de ce produit scalaire.
2. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/\tilde{P}(1) = 0\}$. Justifier que H est un ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer $H^\perp$. Calculer la distance de X à H.
3. Déterminer les uniques réels positifs $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $(\lambda_k X^k)_{k=0..n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce p.s.
4. En déduire le projeté orthogonal de $T = 3X^n - 4X^{n-1} + 5X^3 + 2X^2 - 1$ sur $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/P(X) = P(-X)\}$.

Ex 12 $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, (P/Q) = \int_{-1}^{1}\tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)dt$.

1. Montrer que $(./.)$ est un $p.s$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $n = 3$, trouver une BON de $\mathbb{R}_3[X]$ muni de ce $p.s$.
3. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/XP(X) = P(X^2)\}$. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], p_H(Q) = \left[\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} t\tilde{Q}(t)dt\right]X$.

Ex 13 On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique. Soit $H = \{(x,y,z,t)/x - y + z - t = 0\}$ et $F = \{(x,y,z,t)/x + y = y + z = z + t\}$

1. Montrer que H est un hyperplan et préciser $H^\perp$.
2. Déterminer une base orthonormée de H.
3. Déterminer la matrice de p_H et celle de $p_{H^\perp}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
4. Soit $X = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $d(X,F)$.

Ex 14 On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel : $(A/B) = tr(A^T B)$.

1. Prouver qu'il s'agit bien d'un $p.s.$ sur $M_n(\mathbb{R})$
2. Déterminer $D_n(\mathbb{R})^\perp$.
3. Montrer que $S_n(\mathbb{R})^\perp = AS_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |tr(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
5. Montre que $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

1. Soit $A = (a_{ij}), B$ *et* $C \in M_n(\mathbb{R})$. Soit a et b réels. $(A/B) = tr(A^T B) \in \mathbb{R}$.

$(aA + bB|C) = tr((aA + bB)^T B) = tr((aA^T + bB^T)C) = tr(aA^T C + bB^T C) = atr(aA^T C) + btr(B^T C) = a(A|C) + b(B|C)$.

$(A|B) = tr(A^T B) = tr((A^T B)^T) = tr(B^T(A^T)^T) = tr(B^T A) = (B|A)$.

$(A|A) = tr(A^T A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$. Enfin,

$(A|A) = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}_{\text{somme nulle de réels positifs.}} = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = O_n.$

Donc, il s'agit bien d'un $p.s.$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

2. $D_n(\mathbb{R}) = vect((E_{ii})_{i=1..n})$. Donc, $D_n(\mathbb{R})^\perp = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \forall k \in [\![1,n]\!], (A|E_{kk}) = 0\}$.

Soit $A = (a_{ij})$ et $k \in [\![1,n]\!]$. On pose $E_{kk} = (e_{ij})$. $\forall k \in [\![1,n]\!], (A|E_{kk}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_{ij} \underbrace{=}_{car\ e_{ij}=0\ si\ i\neq k\ ou\ j\neq k} a_{kk} e_{kk} \underbrace{=}_{car\ e_{kk}=1} a_{kk}$.

Donc, $D_n(\mathbb{R})^\perp = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) / \forall k \in [\![1,n]\!], a_{kk} = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & & & 0 \end{pmatrix} / a_{ij} \in \mathbb{R} \right\} = vect\left((E_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n \\ i\neq j}} \right)$.

3. On a déjà prouvé que $AS_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$. Comme $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il reste à prouver que : $AS_n(\mathbb{R}) \perp S_n(\mathbb{R})$. Pour cela, considérons une matrice A de $S_n(\mathbb{R})$ et une matrice B de $AS_n(\mathbb{R})$. Alors, $(A|B) = tr(A^T B) = tr(A(-B^T)) = -tr(AB^T) = -tr(B^T A) = -(B|A) = -(A|B)$. Donc $(A|B) = 0$. Ainsi, $AS_n(\mathbb{R}) \perp S_n(\mathbb{R})$. J'en conclus que $S_n(\mathbb{R})^\perp = AS_n(\mathbb{R})$.

4. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$, $|tr(A)| = |tr(I_n{}^T A)| = |(I_n|A)| \overset{C.S.}{\leq} \sqrt{(I_n|I_n)}\sqrt{(A|A)} = \sqrt{n}\|A\|$.
5. *Soit* $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$. Posons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ et $AB = (c_{ij})$. Alors $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

Donc, $\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)^2$.

Or , C.S dans $\mathbb{R}^n$, muni de son $p.s.$ usuel, assure que : $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)^2 \leq \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right)}_{U_i} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2\right)}_{V_j}$. Donc,

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} U_i V_j \underbrace{=}_{\text{Produit de deux sommes}} \left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} V_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}^2\right)$$

J'en conclus que : $\|AB\|^2 \leq \|A\|^2\|B\|^2$.

Ex 15 $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, (P/Q) = \int_{-1}^{1} \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)\sqrt{1-t^2}dt$.
1. Montrer que $(./.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}, \sin((n+1)u) = \sin(u)\widetilde{Q_n}(\cos(u))$. Déterminer le degré et coefficient dominant de Q_n.
3. Montrer que la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$est orthogonale.
4. Soit $g: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (a,b,c) \mapsto \int_{-1}^{1}(t^3+at^2+bt+c)^2\sqrt{1-t^2}\,dt \end{pmatrix}$. Montrer que g admet un minimum et préciser en quels points ce minimum est atteint.

1. On montrer facilement que $(./.)$ est bilinéaire, symétrique et positive.

$$(P/P) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\tilde{P}(t)^2dt = 0 \underset{\text{positive et d'intégrale nulle sur } [-1,1]}{\overset{car\ (t\mapsto\sqrt{1-t^2}\tilde{P}(t)^2) est\ continue}{\Leftrightarrow}} \forall t \in [-1,1], \sqrt{1-t^2}\tilde{P}(t)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall t \in]-1,1[, \tilde{P}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow P \text{ admet tous les réels de }]-1;1[\text{ comme racines} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{le polynôme nul est le seul polynôme ayant une infinité de racinces}} P \text{ est le polynôme nul.}$$

Ainsi, $(./.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u \in \mathbb{R}$.

$\sin((n+1)u) = Im(e^{i(n+1)u}) = Im((e^{iu})^{n+1}) = Im((\cos(u) + i\sin(u))^{n+1})$. Or,

$$(\cos(u) + i\sin(u))^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cos(u)^{n+1-k}(i\sin(u))^k$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k\ pair}}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cos(u)^{n+1-k}(i\sin(u))^k}_{réel} + \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k\ impair}}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cos(u)^{n+1-k}(i\sin(u))^k}_{imaginaire\ pur}.$$

Donc, $i\sin((n+1)u) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ impair}}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cos(u)^{n+1-k} (i\sin(u))^k = \sum_{0\le p\le\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n+1}{2p+1} \cos(u)^{n+1-(2p+1)} (i\sin(u))^{2p+1}$

$$= i\sin(u) \sum_{0\le p\le\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n+1}{2p+1} \cos(u)^{n-2p} (-1)^p \sin(u)^{2p}.$$

Donc, $\sin((n+1)u) = \sin(u) \sum_{0\le p\le\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n+1}{2p+1} \cos(u)^{n-2p} (-1)^p (1-\cos^2(u))^p = \sin(u)\, Q_n(\cos(u))$

en posant $Q_n(X) = \sum_{0\le p\le\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n+1}{2p+1} X^{n-2p} (-1)^p (1-X^2)^p$.

$\boldsymbol{degQ_n? \ codomQ_n?}$

$deg \binom{n+1}{2p+1} X^{n-2p}(-1)^p(1-X^2)^p = n-2p+2p = n$ $donc$ $Q_n$est la somme de polynôme de degré n. De plus, $codom \binom{n+1}{2p+1} X^{n-2p}(-1)^p(1-X^2)^p = \binom{n+1}{2p+1}(-1)^p(-1)^p = \binom{n+1}{2p+1}$. Comme $\sum_{0\le p\le\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n+1}{2p+1}$ est strictement positif donc non nul, $degQ_n = n$ et $codomQ_n = \sum_{0\le p\le\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n+1}{2p+1}$. Calculons ce $codom$:

$$\sum_{0\le p\le\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n+1}{2p+1} + \sum_{0\le p\le\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n+1}{2p} = \sum_{0\le k\le n} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$$

et $\sum_{0\le p\le\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n+1}{2p} - \sum_{0\le p\le\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n+1}{2p+1} = \sum_{0\le k\le n} (-1)^k \binom{n+1}{k} = (1-1)^{n+1} = 0$.

Donc, $2\sum_{0\le p\le\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n+1}{2p+1} = 2^{n+1}$. Ainsi, $codomQ_n = 2^n$.

3. Soit n et m deux entiers naturels distincts.

$$(Q_n/Q_m) = \int_{-1}^{1} \widetilde{Q_n}(t)\widetilde{Q_m}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt \underbrace{=}_{\substack{CV \\ t=\cos(u) \\ dt=-\sin(u)du \\ t=-1\Leftrightarrow u=\pi \\ t=1\Leftrightarrow u=0}} \int_{\pi}^{0} \widetilde{Q_n}(\cos(u))\widetilde{Q_m}(\cos(u))\sqrt{1-\cos^2(u)}\,(-\sin(u))du$$

$$= \int_0^{\pi} \widetilde{Q_n}(\cos(u))\widetilde{Q_m}(\cos(u))|\sin(u)|(\sin(u))du \underbrace{=}_{\substack{car\ \sin(u)\ge 0 \\ pour\ u\in[0,\pi]}} \int_0^{\pi} \widetilde{Q_n}(\cos(u))\widetilde{Q_m}(\cos(u))\sin^2(u)du$$

$$= \int_0^{\pi} \sin((n+1)u)\sin((m+1)u)du$$

$$\overset{sinasinb=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]}{=} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}[\cos((n-m)u) - \cos((n+m+2)u)]du$$

$$\underset{\substack{car\ n\neq m \\ et \\ n+m+2\neq 0}}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)u)}{n-m} - \frac{\sin((n+m+2)u)}{n-m+2}\right]_0^{\pi}$$

$$\underbrace{=}_{car\ \forall k\in\mathbb{Z}, \sin(k\pi)=\sin(0)=0} 0$$

Donc, la famille (Q_n) est orthogonale sans polynôme nul donc cette famille est libre.

4. Soit $g: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (a,b,c) \mapsto \int_{-1}^{1} (t^3+at^2+bt+c)^2\sqrt{1-t^2}\,dt \end{pmatrix}$.

$A = \{g(a,b,c)/(a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$ est un ss-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0 . Donc inf (A) existe et est finie. Je remarque que $g(a,b,c) = \|X^3+aX^2+bX+c\|^2 = \|X^3-(-aX^2-bX-c)\|^2$.
Donc, $A = \{d(X^3,-aX^2-bX-c)^2/a,b,c\ réels\} = \{d(X^3,aX^2+bX+c)^2/a,b,c\ réels\} = \{d(X^3,P)^2/P\in\mathbb{R}_2[X]\}$. Alors d'après le cours, inf $(A) = minA = d(X^3,\mathbb{R}_2[X])^2 = \|X^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)\|^2$. Ainsi, min$(g)$ $existe\ et$ $\min(g) = \|X^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)\|^2$.

Déterminons $\boldsymbol{p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)}$:

Comme (Q_0,Q_1,Q_2) est une famille orthogonale, libre et maximale dans $\mathbb{R}_2[X]$, (Q_0,Q_1,Q_2) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors, $\left(\frac{Q_0}{\|Q_0\|},\frac{Q_1}{\|Q_1\|},\frac{Q_2}{\|Q_2\|}\right)$ est une BON de $\mathbb{R}_2[X]$. Par conséquent,

$$p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = \left(\frac{Q_0}{\|Q_0\|}/X^3\right)\frac{Q_0}{\|Q_0\|} + \left(\frac{Q_1}{\|Q_1\|}/X^3\right)\frac{Q_1}{\|Q_1\|} + \left(\frac{Q_2}{\|Q_2\|}/X^3\right)\frac{Q_2}{\|Q_2\|} = (Q_0/X^3)\frac{Q_0}{\|Q_0\|^2} + (Q_1/X^3)\frac{Q_1}{\|Q_1\|^2} + (Q_2/X^3)\frac{Q_2}{\|Q_2\|^2}.$$

$\forall u \in \mathbb{R}, \sin(u) = sin(u) \times 1\ donc\ \ Q_0 = 1.$
$\forall u \in \mathbb{R}, \sin(2u) = 2sin(u) \times \cos(u)\ donc\ \ Q_1 = X.$
$\forall u \in \mathbb{R}, \sin(3u) = sin(2u) \times \cos(u) + \sin(u)\, cos(2u) = 2sin(u) \times \cos^2(u) + \sin(u)\,(2cos^2(u) - 1) = \sin(u)\,[4cos^2(u) - 1]$ donc $Q_1 = 4X^2 - 1.$

$$(Q_0/X^3) = \int_{-1}^{1} t^3\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{\pi}^{0} \cos^3(u)\sqrt{1-\cos^2(u)}\,(-\sin(u))du = \int_0^{\pi} \cos^3(u)\, sin^2(u)du = \int_0^{\pi} cos(u)(\, sin^2(u) - sin^4(u))du$$
$$= \left[\frac{sin^3(u)}{3} - \frac{sin^5(u)}{5}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$(Q_1/X^3) = \int_{-1}^{1} t^4\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{\pi}^{0} \cos^4(u)\sqrt{1-\cos^2(u)}\,(-\sin(u))du = \int_0^{\pi} \cos^4(u)\, sin^2(u)du$$
$$= \frac{1}{32}\int_0^{\pi} \cos(2u) - \cos(6u) - 2\cos(4u) + 2\,du = \frac{\pi}{16}.$$

$$(Q_2/X^3) = \int_{-1}^{1} (4t^5 - t^3)\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{\pi}^{0} [4\cos^5(u) - \cos^3(u)]\sqrt{1-\cos^2(u)}\,(-\sin(u))du$$
$$= 4\int_0^{\pi} \cos^5(u)\, sin^2(u)du - \int_0^{\pi} \cos^3(u)\, sin^2(u)du = 0.$$

De plus, $\|Q_1\|^2 = (X/X) = \int_{-1}^{1} t^2\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{\pi}^{0} \cos^2(u)\sqrt{1-\cos^2(u)}\,(-\sin(u))du = \int_0^{\pi} \cos^2(u)\, sin^2(u)du = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} sin^2(2u)\,du = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(4u)}{2}du = \frac{1}{4}\left[\frac{4u - \sin(4u)}{8}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}.$

Donc, $p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = \frac{\frac{\pi}{16}}{\frac{\pi}{8}}X = \frac{1}{2}X.$

Alors, $\min(g) = \left\|X^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)\right\|^2 = \left\|X^3 - \frac{1}{2}X\right\|^2 = \int_{-1}^{1}(t^3 - \frac{1}{2}t)^2\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^{\pi}\left(\cos^3(u) - \frac{\cos(u)}{2}\right)^2 sin^2(u)du = \frac{\pi}{128}.$

Ex 16 Calculer $inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{\pi}(e^x - a\cos(x) - bsin(x))^2dx$.=

Ex 17 Soit $E = C^{\infty}([-1,1],\mathbb{R})$muni du produit scalaire $(f/g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$

A. Soit $H = \{f \in E / f(0) = 0\}$. Montrer que H est ss-e-v de E et $H^{\perp} = \{0\}$. Que pensez-vous de $(H^{\perp})^{\perp}$?

B. Etudions deux familles orthogonales.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : \begin{pmatrix} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2-1)^n \end{pmatrix}$ $et\ p_n = u_n^{(n)}$.Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une famille orthogonale de E.

2. $a)$ Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation $xtan(x) = 1$ admet une unique solution x_n dans l' intervalle$]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
   $b)$ Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty\ et$ donner un équivalent simple de x_n.
   $c)$ On pose $a_n = \frac{2+{x_n}^2}{1+{x_n}^2}$ et $f_n : \begin{pmatrix} [-1;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\cos(x_n t)}{\sqrt{a_n}} \end{pmatrix}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une famille orthonormée de E.