Ensembles-Applications
Dénombrement.

I. Ensembles-Applications (beaucoup de rappels)

Définitions 1: Un **ensemble** E est une collection d'objets. Les objets qui le constituent sont les éléments de E. Si x est un **élément** de , on note $x \in E$ (se lit x élément de E ou x appartient à E), sinon on note $x \notin E$. On note $\emptyset$ l' ensemble vide.
Soit E et F deux ensembles.
• $E = F$ signifie que E et F ont exactement les mêmes éléments i.e $x \in E \Leftrightarrow x \in F$.
• $E \cup F$, la **réunion** de Eet F ,est l'ensemble constitué des éléments de E et de F i.e. $x \in E \cup F \Leftrightarrow x \in E$ **ou** $x \in F$.
• $E \cap F$, **l'intersection** de E et F , est l'ensemble des éléments communs à E et F i.e. $x \in E \cap F \Leftrightarrow x \in E$ **et** $x \in F$.
• E et F sont **disjoints** lorsque $\cap F = \emptyset$.
• $A \subset E$ signifie que tout élément de A est élément de E et se lit A est **inclus** dans E. On dit alors que A est une **partie ou un sous-ensemble** de E.**On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.** NB: $\mathscr{P}(E)$ contient $\emptyset$ et E.
On définit alors le **complémentaire de A dans E**, noté $\bar{A}$ ou C_E^A , par : $C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$.
On définit aussi la fonction indicatrice de A, notée χ_A ou $\mathbb{1}_A$ et définie par :$\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$.
•$E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$ est le produit cartésien de E et F.
•Soit p un entier naturel non nul. E^p est l'ensemble des p-uplets d'éléments de E .
•Une famille d'éléments de E indexée par I est une application F de I dans E . F (i) est noté x_i et F $= (x_i)_{i \in I}$.
Lorsque $I = \mathbb{N}$, la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une suite d'éléments de E.

Remarques 2:

1. $E = F \Leftrightarrow \underbrace{E \subset F \text{ et } F \subset E}_{\text{double inclusion}} \Leftrightarrow \left[\underbrace{(x \in E \Leftrightarrow x \in F)}_{E \text{ et} F \text{ ont les mêmes éléments}}\right]$.
2. $E \subset F \Leftrightarrow E \cap F = E \Leftrightarrow E \cup F = F$.
3. Si A et B sont deux parties de E alors $A \backslash B = A \cap C_E^B = A \cap \bar{B}$. En probabilité, on choisira d'écrire l'intersection car la notation $A \backslash B$ sera utilisée pour les probabilités conditionnelles (A sachant B).
4. Si A et B sont deux parties de E alors $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E^B \Leftrightarrow A \subset \bar{B}$.

Propriété 3: Soit A, B et C trois ensembles.
1. La réunion et l'intersection sont commutatives et associatives.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
3. si A et B sont deux parties de E , $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Démo :
1. $x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } x \in C \Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ ou } x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$. Donc , $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. Idem avec $\cap$.
2. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)$
$\Leftrightarrow \underbrace{(x \in A \text{ et } x \in A) \text{ou} (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in A)}_{x \in A} \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \cap C$
$\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cap C)$ OK .
De même, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ et } x \in A \cap C \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B \cup C$
$\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C)$ OK .
4. $x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \in A \backslash B \text{ ou } x \in B \backslash A \text{ ou } x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B) \text{ ou} (x \notin A \text{ et } x \notin B) \Leftrightarrow$ $\underbrace{(x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ou} (x \notin A \text{ et } x \notin B)}_{x \notin B} \text{ ou } \underbrace{(x \notin A \text{ et } x \in B) \text{ ou} (x \notin A \text{ et } x \notin B)}_{x \notin A} \Leftrightarrow x \in \bar{B} \text{ ou } x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \in \bar{B} \cup \bar{A}$
5. $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ et } x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \notin \bar{A} \cap \bar{B}$.

Définition 4: Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties d'un ensemble E.
$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \in E / \exists i \in \{1, \ldots, n\}; x \in A_i\}$, la réunion des A_i , contient tous les éléments de tous les A_i.
$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \in E / \forall i \in \{1, \ldots, n\}, x \in A_i\}$, l'intersection des A_i, contient tous les éléments communs à tous les A_i.
La famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est une partition de E lorsque
les ensembles A_i tels que $i \in \{1, \ldots, n\}$ sont deux à deux disjoints ($i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$)
E est la réunion de tous les A_i ie $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$.
Cas particuliers : Si A est une partie de E alors $(A, \bar{A})$ est une partition de E.

Prop 4 bis Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des parties d'un ensemble E et F est une partie de E

1. $F \cup (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} F \cup A_i$ et $F \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} F \cap A_i$.
2. $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ et $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.
3. Si $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est une partition de E et F est une partie de E alors $(A_1 \cap F, A_2 \cap F, \dots, A_n \cap F)$ est une partition de F.

Définition rappel 5 : •Une application de E $dans$ F est une relation f qui à chaque objet de E associe exactement un objet dans F . On note F^E ou $\mathrm{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans . Si f est une application de E dans F et $x \in E$, on note $f(x)$ l'objet de F associé à x par f et $y = f(x)$ est l'image de x par f et x est un antécédent de y par f. On a : $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$ ...La réciproque n'est vraie que si f est injective .

•Soit f une application de E dans F , A une partie de E et B une partie de F.

$f(A) = \{f(x)/x \in A\} \subset F$ et $f^{-1}\langle B\rangle = \{x \in E/f(x) \in B\} \subset E$.

NB: 1) $f(E)$ est donc l'ensemble de toutes les images par f.

2)$f^{-1}\langle B\rangle$ existe même si f n'est pas bijective (ie quand f^{-1} n' existe pas). Mais si f^{-1} existe alors $f^{-1}\langle B\rangle = f^{-1}(B)$.

f est injective si et ssi tout élément de F a au plus un antécédent par f .
si et ssi pour tout élément de F , l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution .
si et ssi tous éléments distincts de E ont des images par f distinctes .
si et ssi tous éléments de E ayant la même image par f sont nécessairement égaux.

f est surjective si et ssi tout élément de F a au moins un antécédent par f
si et ssi pour tout élément de F , l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution .
si et ssi $f(E) = F$

f est bijective si et ssi tout élément de F a exactement un antécédent par f .
si et ssi pour tout élément de F , l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution .
si et ssi f est injective et surjective.
si et ssi il existe une application g de F $dans$ E telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$

Dans ce cas , $f^{-1}(= g)$ est la bijection réciproque de f définie par : $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

$\forall y \in F, f^{-1}(y) = l'unique\ antécédent\ de\ y\ par\ f = l'unique\ solution\ de\ l'équation "f(x) = y"$

f^{-1} est aussi l'unique application de F dans E vérifiant $f^{-1} \circ f = id_E$ et $f \circ f^{-1} = id_F$.

Propriété 6: La composée d'injections (resp. surjections, resp. bijections) est injective (resp. surjective, resp. bijective). Le cas échéant, $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
Si $f \circ g$ est injective alors g est injective. Si $f \circ g$ est surjective alors f est surjective.

Démo : Soit $f: E \to F$ et $g: F \to G$.

1) Supposons f et g injectives et montrons que $g \circ f$ est injective. Soit $(x, y) \in E^2 / g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Montrons que $x = y$. Alors $g(f(x)) = g(f(y))$. Donc, $f(x)$ et $f(y)$ ont la même image par g. Comme g est injective, nécessairement, $f(x) = f(y)$. Alors x et y ont la même image par f. Donc nécessairement $x = y$.
2) Supposons f et g surjectives et montrons que $g \circ f$ est surjective.
$g \circ f(E) = g\big(f(E)\big) \underbrace{=}_{car\ f\ surjective} g(F) \underbrace{=}_{car\ g\ surjective} G.$
3) Supposons f et g bijectives et montrons que $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
f et g sont injectives et surjectives donc, $g \circ f$ est injective et surjective donc bijective.
De plus, $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_F \circ f = f^{-1} \circ f = id_E$ et de même $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = id_G$. J'en déduis que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
4) Supposons $g \circ f$ est injective. Montrons que f est injective. Soit $(x, y) \in E^2 / f(x) = f(y)$. Alors $g\big(f(x)\big) = g\big(f(y)\big) i.e.\ g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Comme $g \circ f$ est injective, nécessairement $x = y$.
5) Supposons $g \circ f$ est surjective. Montrons que g est surjective. Soit $z \in G$. Montrons que nz est a un antécédent par g.
$g \circ f$ est surjective donc, z a un antécédent x par $g \circ f$. Donc $z = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$. Alors $y = f(x)$ est un antécédent de z par g.

Définition 7: Soit E un ensemble . $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur E lorsque : $\mathfrak{R}$ met en relation des éléments de E deux par deux ($x\ \mathfrak{R}\ y$ signifie que x et y sont en relation par $\mathfrak{R}$) et vérifie : $x\ \mathfrak{R}\ y$

$\forall x \in E$, $x\ \mathfrak{R}\ x$.(tout élément de E est toujours en relation avec lui même) $\mathfrak{R}$ est dite réflexive

$\forall (x, y) \in E^2$, $x\ \mathfrak{R}\ y \Rightarrow y\ \mathfrak{R}\ x$ (on dit alors que x et y sont en relation). $\mathfrak{R}$ symétrique

$\forall (x, y, z) \in E^3$, ($x\ \mathfrak{R}\ y$ et $y\ \mathfrak{R} z \Rightarrow x\ \mathfrak{R}\ z$) ,(si x est en relation avec y et y avec z alors x est en relation avec z) $\mathfrak{R}$ transitive

Soit $x \in E$. La classe de x est noté $cl(x)$ ou $\bar{x}$ $des\ élements\ de\ E\ en\ relation\ avec\ x\ par\ \mathfrak{R}\ i.e. \bar{x} = \{y \in E / x\mathfrak{R}y\}$

Exemples 8:

1. $E = M_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{R}$ est la relation « est équivalente par colonne à ...» ou « est semblable à ..» .

Soit $A \in M_n(K)$ $et\ u\ l'endomorphisme\ de\ K^n\ canoniquement\ asocié$ à A. Alors $\bar{A} = \{M / \exists B\ base\ de\ K^n, M = mat\,u\}$

2. $E = \mathbb{Z}$ et $\mathfrak{R}$ est la relation « est congru modulo 6 à ... » . $\bar{1} = \{1 + 6n / n \in \mathbb{Z}\}$

Théo : Soit E un ensemble et $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur E . L'ensemble des classes d'équivalence est une partition de $\boldsymbol{E}$.

II. Ensembles finis

Définition9 : Un ensemble non vide E est fini (e) s'il (ou elle) contient un nombre fini d'éléments. Le cardinal de E est alors le nombre d'éléments de E et est noté $card(E)$. Et par convention, l'ensemble vide est de cardinal nul.

Attention : dans un ensemble, les éléments ne sont pas ordonnés et si deux éléments sont égaux, on en notera qu'un seul et il ne sera compté qu'une seule fois . Par contre dans une famille ou une suite ou un n-uplet, les éléments sont indéxés et ordonnés et deux éléments indéxés différemment mais prenant la même valeur comptent pour deux éléments.
Exemple : Si $E = \{1;1;3;-4\} = \{1;3;-4\}$ $alors$ $cardE = 3$. Si F=((1,1,1)),(2,1,0),(2,1,0),(1,1,1)) alors card F =4.

NB 10: Soit un ensemble fini E de cardinal p. Les éléments de E peuvent être nommés et pour cela, le plus souvent on numérote ces éléments et on note $E = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ et cette notation signifie sauf indication contraire que les x_i dans l'accolade sont distincts. Numéroter les p éléments de E revient à construire une bijection de $\{1,2,\dots,p\}$ dans E qui à chaque entier de 1 à p fait correspondre un élément de E. On peut d'ailleurs caractériser les ensembles finis par :
Un ensemble non vide E est fini de cardinal p sietssi il existe une bijection de $\{1,2,\dots,p\}$ $dans$ E.

Théorème 11: Soit A une partie d'un ensemble fini E. Alors A est fini et $card(A) \leq card(E)$ et ($A = E \Leftrightarrow cardA = cardE$)

Démo : A étant inclus dans E, donc nécessairement A ne peut contenir pus d'éléments que E et par conséquent A est fini et $card(A) \leq card(E)$. De plus, $cardA = cardE \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\, A\subset E} A$ et E ont exactement les mêmes éléments.

Théorème 12 : Si E et F sont deux ensembles finis <u>d'intersection vide</u> (disjoints) alors $E \cup F$ est un ensemble fini et
$$card(E \cup F) = card(E) + card(F).$$

Démo : Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ et $F = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ où $p = card(E)$ et $n = card(F)$. $Alors, E \cup F$ =$\{x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Comme $E \cap F = \emptyset$, aucun x_i n'est égal à un y_j. Donc $card(E \cup F) = p + n = card(E) + card(F)$.

Généralisation 13 : Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des ensembles deux à deux <u>disjoints</u> alors $card \bigcup_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n cardE_i$.

Démo : Soit H_n: " Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des ensembles deux à deux disjoints alors $card \bigcup_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n cardE_i$."
<u>Init° :</u> H_2 est vraie d'après le théo12.
<u>Propag°</u> : Soit $n \in \mathbb{N}/n \geq 2$. Je suppose que $H_n$est vraie. Soit $E_1, E_2, \dots, E_{n+1}$ des ensembles deux à deux disjoints.
Posons $E = E_1 \cup E_2, \dots \cup E_n$ et $F = E_{n+1}$ .Alors par associativité de la réunion, $E \cup F = \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i$. Et par hypothèse de récurrence, $\bigcup_{i=1}^n E_i$ est $finie$ et $cardE = card \bigcup_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n cardE_i$. De plus, $E \cap F = (\bigcup_{i=1}^n E_i) \cap E_{n+1} = \bigcup_{i=1}^n (E_i \cap E_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^n \emptyset = \emptyset$.
Autrement dit, E et F sont disjoints. Donc, d'après le théorème 12, $card(E \cup F) = card(E) + card(F)$; autrement dit,
$card \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i = \sum_{i=1}^n cardE_i + cardE_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} cardE_i$. OK !
<u>CCL</u> : $\forall n \geq 2, H_n$ est vraie.

Proposition 14 : Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E .
1) $card\bar{A} = cardE - cardA$.
2) $card(B \backslash A) = cardB - card(A \cap B)$.
3) Si la famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est une partition de E alors $cardE = \sum_{i=1}^n cardA_i$.

Démo : 1) A et $\bar{A}$ vérifient $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$. Donc, $card(E) = card(A \cup \bar{A}) \underbrace{=}_{théo\,12} cardA + card\bar{A}$. De même,
$B \backslash A$ et $A \cap B$ vérifient $(B \backslash A) \cap (A \cap B) = \emptyset$ et $(B \backslash A) \cup (A \cap B) = B$. Donc, $card(B) \underbrace{=}_{théo\,12} card(B \backslash A) + card(A \cap B)$.
2) Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une partition de E. Alors, $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$ et $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des ensembles deux à deux disjoints.
Par conséquent, $cardE = card \bigcup_{i=1}^n A_i \underbrace{=}_{généralisation\,13} \sum_{i=1}^n cardA_i$.

Théorème 15 : Soit E et F deux ensembles. $card(E) + card(F) = card(E \cup F) + card(E \cap F)$.

Démo : ($E \backslash F, F \backslash E, E \cap F$) est une partition de $E \cup F$. Donc, $card(E \cup F) \underbrace{=}_{prop\,14.3} card(E \backslash F) + card(F \backslash E) + card(E \cap F)$
$card(E \cup F) \underbrace{=}_{prop\,14.b)} card(E) - card(E \cap F) + card(F) - card(E \cap F) + card(E \cap F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$. OK !

Conséquence 16: E et F sont disjoints $\Leftrightarrow card(E) + card(F) = card(E \cup F)$.

Démo : E et F sont disjoints $\Leftrightarrow E \cap F = \emptyset \Leftrightarrow card(E \cap F) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{théo\,15} card(E) + card(F) = card(E \cup F)$.

Théorème 17 Soit E et F deux ensembles finis. $card(E \times F) = (cardE) \times (cardF)$.

Démo : Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ et $F = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ où $p = card(E)$ et $n = card(F)$.
Alors $E \times F = \{(x_i, y_j)/i \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,n]\!]\}$. Soit $A_i = \{(x_i, y_j)/\, j \in [\![1,n]\!]\}$. Alors $i \neq i' \Rightarrow x_i \neq x_{i'} \Rightarrow A_i \neq A_{i'}$. Donc, les sous-ensembles $A_1, A_2, \dots, A_p$ de $E \times F$ sont deux à deux disjoints. De plus, $\bigcup_{i=1}^n A_i = E \times F$ J'en conclus que $(A_1, A_2, \dots, A_p)$ est une partition de $E \times F$ .Par conséquent, $card(E \times F) = \sum_{i=1}^p cardA_i = \sum_{i=1}^p n = np = card(E) \times card(F)$.

Généralisation 18 : Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Si $E_1, E_2, \dots, E_q$ sont des ensembles finis alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q$ est fini *et* $card\left(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q\right) = card(E_1) \times card(E_2) \times \dots \times card(E_q)$.
Cas particulier : $card(E^q) = card(E)^q$.

<u>Démo</u> Soit H_q : " Si $E_1, E_2, \dots, E_q$ sont des ensembles finis alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q$ est fini *et* $card\left(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q\right) = cardE_1) \times card(E_2) \times \dots \times card(E_q)$."
init: H_1 *et* H_2 sont vraies.
Propag : Soit $q \in \mathbb{N}^*$. *Je suppose que* H_q *est vraie*. Soit $E_1, E_2, \dots, E_{q+1}$ des ensembles finis alors par hypothèse de récurrence $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q$ est fini *et* $card\left(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q\right) = card(E_1) \times card(E_2) \times \dots \times card(E_q)$. De plus, on peut considérer que $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{q+1} = (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q) \times E_{q+1}$. Donc d'après le théorème 17, $(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q) \times E_{q+1}$ est fini et card($(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q) \times E_{q+1}$)= $card(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q) \times cardE_{q+1}$=$card(E_1) \times card(E_2) \times \dots \times card(E_q) \times card(E_{q+1})$.
CCL : $\forall q \in \mathbb{N}^*, H_q$ *est vraie*.

III. <u>Applications entre ensembles finis.</u>

Proposition 19 : Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E *dans* F .
1. Si f est injective et E est fini alors $card(E) \leq card(F)$.
2. Si f est surjective et F est fini alors $card(E) \geq card(F)$.
3. Si E ou F est de cardinal fini et f est bijective de E sur F alors $card(E) = card(F)$.

Démo :
1) Supposons f injective. Alors $i \neq i' \Rightarrow x_i \neq x_{i'} \Rightarrow f(x_i) \neq f(x_{i'})$. *Par conséquent* , $card\left\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)\right\} = card(E) = p$.
Or , $H = \left\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)\right\}$ est une partie de F donc $p = card(H) \leq card(F) = n$.
2) Supposons f surjective. Alors $f(E) = \left\{\underbrace{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)}_{pas\ forcément\ distincts}\right\} = F$. *Donc*, $card\big(f(E)\big) = card(F) = n$.
Mais, $card\left\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)\right\} \leq p$. Donc, $card(F) = n \leq p = card(E)$.

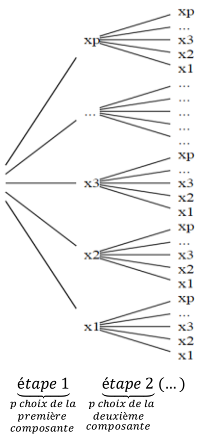
Théorème 20 : Soit E et F deux <u>ensembles finis</u> tels que $\underline{card(E) = card(F)}$ et f une application de E dans F.
Alors, f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.

Démo : f injective$\Leftrightarrow$ $card\left\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)\right\} = p = card(E)$
f injective $\underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ card(E)=card(F)}$ $card\ \underbrace{\left\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)\right\}}_{f(E)} = card(F)$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{f(E) ss-ensemble\ de\ F}$ $f(E) = F \Leftrightarrow f$surjective.
Par conséquent, f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.

IV. <u>Nombre de q −uplets. Nombre d'applications.</u>

Théorème 21 : Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Si E est un ensemble fini tel que $\underline{card(E) = p}$ alors E^q, l'ensemble des q-uplets d'éléments de E, est un ensemble fini et $card(E^q) = (cardE)^q$.
Autrement dit, $\boldsymbol{p^q = card(E)^q}$ **est le nombre de q-uplets d'éléments de E.**

Démo : il suffit d'appliquer la géné 18. en prenant $E = E_1 = E_2 = \cdots = E_q$ un ensemble fini, alors E^q est fini et $ard(E^q) = (cardE)^q$.
Autre démo : par un arbre de dénombrement. $E = \left\{x_1, x_2, \dots, x_p\right\}$ .On cherche combien il existe d'objets de la forme $\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_q}\right)$ où les i_k sont des entiers de $[\![1, p]\!]$ pas forcément distincts. Pour le choix de x_{i_1}, on a donc p possibilités parmi les p éléments de E ; pour le choix de x_{i_2}, on a donc p possibilités parmi les p éléments de E...... Pour le choix de x_{i_q}, on a donc p possibilités parmi les p éléments de E.



(...)

Pour chaque composante, on a p choix.
A chaque nouvelle étape, le nombre de bras est donc multiplié par p.
$p \times p \times \dots \times p = p^q$ est donc le nombre de q-uplets différents dont les composantes sont choisies parmi les p éléments de E.

Théorème 22 : Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs $p\ et\ n$.
L'ensemble $F^E\ ou\ \mathscr{F}(E,F)$ des applications de E dans F est un ensemble fini et $card\,\mathscr{F}(E,F)=(cardF)^{card(E)} = n^p$.

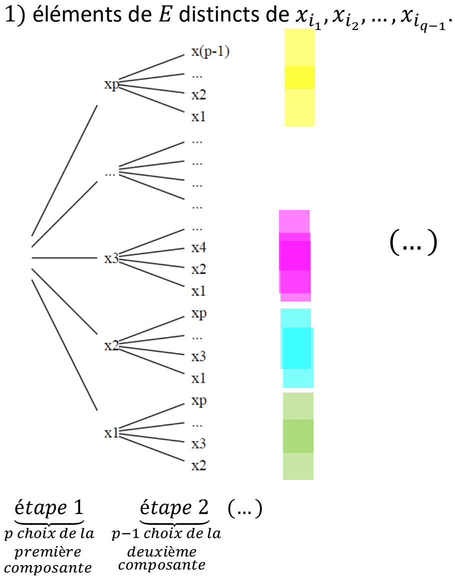
Démo : Chaque application de E dans F est entièrement définie par le choix des images $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)$ parmi les vecteurs de F.On peut considérer Δ: $\begin{pmatrix} F^p \to F^E \\ (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_p}) \mapsto f\colon \begin{pmatrix} E \to F \\ x_k \mapsto y_{i_k} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ où les i_k sont des entiers de $[\![1,n]\!]$ pas forcément distincts.

Alors, Δ est bijective de F^p sur F^E. Donc, $card(F^E) = card(F^p) \underbrace{=}_{théo\ 21} card(F)^p = card(F)^{card(E)}$.

Définition 23 : Pour tous entiers naturels p et q,
on pose : $A_p^q = \begin{cases} p(p-1)\dots(p-q+1) = \frac{p!}{(p-q)!} & si\ q \le p \\ 0 & si\ q > p \end{cases} = q!\binom{p}{q}$. A_p^q *est l'*arrangement de q éléments choisis parmi p.

Proposition 24 : Soit $p\ et\ q$ deux entiers naturels. Alors,
A_p^q est le nombre de q-uplets de composantes toutes <u>distinctes</u> choisies parmi p éléments.
Si E est constitué de ces p éléments, alors un tel q-uplet d'éléments distincts de E est appelé <u>un arrangement de q éléments de E</u> (ou un q-arrangement).

Démo : Notons N le nombre de q-uplets de composantes toutes distinctes choisies parmi les éléments de E.
si $q > p$ alors il n'existe pas q éléments de E distincts donc il n'existe aucun q-uplets de composantes toutes distinctes choisies parmi les éléments de E. Ici $N = 0$.
Si $\le p$, faisons un arbre de dénombrement. On cherche donc combien il existe d'objets de la forme $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_q})$ où les i_k sont des entiers de $[\![1,p]\!]$ et tous distincts. Pour le choix de x_{i_1}, on a donc p possibilités parmi les p éléments de E ; pour le choix de x_{i_2}, on a donc $p-1$ possibilités parmi les $p-1$ éléments de E distincts de x_{i_1}...... Pour le choix de x_{i_q}, on a donc $p-(q-1)$ possibilités parmi les $p-(q-1)$ éléments de E distincts de $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{q-1}}$.



A chaque nouvelle étape, on a un choix de moins qu'à l'étape précédente .
.... x1 interdit, ... x2 interdit, , ... x3 interdit .., , ... xp interdit puisque les composantes doivent être toutes distinctes.
$N = \underbrace{p}_{\substack{choix\\pour\\x_{i_1}}} \times \underbrace{(p-1)}_{\substack{choix\\pour\\x_{i_2}}} \times \dots \times \underbrace{(p-(q-1))}_{\substack{choix\\pour\\x_{i_{q-1}}}} = \frac{p!}{(p-q)!}$ est donc le nombre de q-uplets différents dont les composantes sont toutes distinctes et sont choisies parmi les p éléments de E.

Ainsi, $N = A_p^q$ est le nombre de q-uplets de composantes toutes <u>distinctes</u> choisis parmi les éléments de E.

Proposition 25: Soit $n\ et\ p\ \ deux\ entiers\ naturels.$.
Alors, A_n^p est le nombre d'applications injectives d'un ensemble fini à p éléments dans un ensemble fini à n éléments. .

Démo : Soit E et F deux ensembles tels que $card(E) = p$ et $card(F) = n$.
Si $p > n$ alors la prop. 19 assure qu'il n'existe pas d'application injective de E sur F.
Si $p \le n$, alors chaque application injective de E dans F est entièrement définie par le choix des images toutes distinctes $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)$ parmi les vecteurs de F. Notons G l'ensemble des applications injectives de E dans F et H l'ensemble des p-uplets d'éléments de F dont les composantes sont toutes distinctes. On peut considérer Δ: $\begin{pmatrix} H \to G \\ (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_p}) \mapsto f\colon \begin{pmatrix} E \to F \\ x_k \mapsto y_{i_k} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ où les i_k sont des entiers de $[\![1,n]\!]$ tous distincts .Alors, Δ est bijective de H sur G. Donc, $card(G) = card(H) \underbrace{=}_{théo\ précédent} A_n^p$.

Ainsi, A_n^p est le nombre d'applications injectives de E dans F.

Proposition 26: Soit E un ensemble fini de cardinal p . Le nombre de bijections de E dans lui-même est $p!$.
$p!$ est aussi le nombre de bijections d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal p.
Une telle bijection de E sur E est aussi appelée permutation de E .
$p!$ est le nombre de façon différente d'ordonner p éléments donnés .

Démo : D'après la prop.20, une bijection de $E\ dans\ E$ est une application de $E\ dans\ E$ injective. Or, la prop. précédente assure que $A_p^p = p!$ est le nombre d'applications injectives de E dans E. Ainsi, $p!$ est le nombre d'applications bijectives de E sur E.

V. Parties d'un ensemble fini

Rappel 27 : Pour tous entiers naturels n et p, $\binom{p}{n} = \begin{cases} \frac{p!}{n!(p-n)!} & si\ n \leq p \\ 0 & si\ n > p \end{cases}$ (coefficient binomial) et $A_p^n = n!\binom{p}{n}$.

Proposition 28 : Soit $p\ et\ q$ deux entiers naturels.

$\binom{p}{q}$ est le nombre de parties à q éléments dans un ensemble à p éléments.

$\binom{p}{q}$ est le nombre de façon de choisir q éléments parmi p.

Démo : Soit E un ensemble de cardinal p.
Si $q > p$ alors il n'existe aucune partie de E à q éléments.
Si $q = 0$ alors il n'existe qu'une seule partie de E à 0 éléments : c'est l'ensemble vide.
Si $0 < q \leq p$ alors chaque q-uplet d'éléments distincts de E est entièrement définie par le choix de q éléments distincts de E et par le choix de la place de ces q éléments dans le q-uplet. Soit H l'ensemble des q-uplets d'éléments de E dont les composantes sont toutes distinctes.
Première démo :
Prenons une partie A de E à q éléments. Notons Q_A l'ensemble des q-uplets dont les composantes sont distinctes et sont les éléments de A. Combien de q-uplets différents peut -on construire avec ces q éléments de A ? Autant que de manières différentes de ranger q objets dans q boites, autant que de bijections d'un ensemble à q éléments dans un ensemble à q éléments. J'ai donc $q!$ q-uplets différents dont les composantes sont les q éléments de la partie A. Autrement dit $card(Q_A) = q!$. De plus, si A et B sont deux parties de E distincts et de cardinal q alors les q-uplets formés à partir des éléments de A seront tous distincts des q-uplets formés à partir des éléments de B. Autrement dit $Q_A \cap Q_B = \emptyset$. Ainsi $(Q_A)_{\substack{A\subset E \\ card(A)=q}}$ est une partition de H. J'en déduis que

$$A_p^q = card(H) = \sum_{\substack{A\subset E \\ card(A)=q}} card(Q_A) = \sum_{\substack{A\subset E \\ card(A)=q}} q! = q!\left(\sum_{\substack{A\subset E \\ card(A)=q}} 1\right) = q! \times (nombre\ de\ parties\ de\ E\ à\ q\ éléments).$$

Ainsi, $nombre\ de\ parties\ de\ E\ à\ q\ éléments = \frac{1}{q!}A_p^q = \binom{p}{q}$.

Autre démo :
Notons U l'ensemble des sous-ensembles de E à q éléments , V l'ensemble des permutations de $⟦1, q⟧$.

Soit ∇: $\begin{pmatrix} U \times V \to H \\ (\underbrace{\{x_{i_1}, x_{i_2}, .., x_{i_q}\}}_{avec\ i_1<i_2<\cdots<i_q}, f) \mapsto (x_{i_{f^{-1}(1)}}, x_{i_{f^{-1}(2)}}, ..., x_{i_{f^{-1}(q)}}) \end{pmatrix}$. Par exemple, prenons $q = 3$, $A = \{x_2, x_3, x_7\}$ (ici $i_1 = 2, i_2 = 3$ et $i_3 = 7$) et

$f: \begin{pmatrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{pmatrix}$ $(*)$ permutation de $⟦1,3⟧$. Alors $\nabla(A, f) = (x_{i_2}, x_{i_1}, x_{i_3}) = (x_3, x_2, x_7)$.

$(*)$2 indique la place de x_{i_1} dans le triplet image , 1 indique la place de x_{i_2} dans le triplet et 3 indique la place de x_{i_3} dans le triplet.

Alors, ∇ est une bijection de $U \times V$ sur H. Donc, $\underbrace{card(H)}_{=A_p^q} = card(U \times V) = card(U) \times \underbrace{card(V)}_{=q!}$. Ainsi, $card(U) = \frac{1}{q!}A_p^q = \binom{p}{q}$.

CCL : dans tous les cas, $\binom{p}{q}$ est le nombre de parties de E contenant exactement q éléments. $\binom{p}{q}$ est donc le nombre de façon de faire des paquets de q éléments parmi p éléments.

Exemple 29 : Un jeu de tarot contient 78 cartes, lorsqu'on y joue à 3 joueurs, chaque joueurs a en début de partie 24 cartes. Il y a $\binom{78}{24}$ mains possibles au début du jeu.

Définition 30 : Si E **un ensemble fini de cardinal** p **alors une partie de** E **à** q **éléments est encore appelée** <u>une combinaison de q éléments de E</u> **(**ou une q-combinaison) . Il y a donc $\binom{p}{q}$ q-combinaisons dans E.

Théorème 31: Soit E un ensemble fini tq $\underline{card(E) = p}$.
Le nombre de sous-ensembles (parties) de E est 2^p.
Autrement dit, $card\ \mathscr{P}(E) = 2^{card(E)}$.

Démo : Soit A_q l'ensemble des parties de E à q éléments. Alors $(A_0, A_1, \dots, A_q)$ est une partition $\mathscr{P}(E)$. J'en déduis que :

$$card\mathscr{P}(E) = \sum_{k=0}^{q} card(A_i) = \sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q} = \sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}1^q1^{p-q} = (1+1)^p = 2^p.$$

Exemple 32: Soit $= \{1,2,3,4\}$. Alors,

$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

$card$ P $(E) = 2^4 = 16\ OK!$

NB: E et $\mathscr{P}(E)$ ne contiennent pas du tout les mêmes objets. $\mathscr{P}(E)$ est un ensemble de sous-ensembles de E.